К понятию действительного числа*

Э.ВИНБЕРГ

ДЕЙСТВИТЕЛЬНОЕ ЧИСЛО МЫслится как результат бесконечной последовательности измерений со все возрастающей точностью. Давайте посмотрим, какой это может иметь смысл. Известно, что точность физических измерений не превосходит 15 значащих цифр, и есть принципиальные ограничения точности из-за прерывистости материи. Но даже если бы этой трудности не было, все равно бесконечная последовательность измерений никогда не могла бы быть завершена! Поэтому данное выше «определение» действительного числа должно пониматься как мысленный образ.

Можно дать точное определение действительного числа, не используя слова «измерение». Назовем действительным числом всякую бесконечную последовательность рациональных чисел

$$r_1, r_2, \ldots, r_n, \ldots, \qquad (1)$$

все меньше и меньше отличающихся друг от друга (с чем же еще сравнивать?). Последнее требование следует понимать так: для любого натурального числа m найдется такое n_0, что при $n_1, n_2 > n_0$

$$\left|r_{n_1} - r_{n_2}\right| < \frac{1}{m}.$$

Последовательность, удовлетворяющая этому условию, называется фундаментальной.

Действительное число, определенное последовательностью (1), следует считать равным действительному числу

$$r_1', r_2', \ldots, r_n', \ldots,$$

если $r_n - r_n'$ стремится к нулю при увеличении n, т.е. для любого натурального числа m существует такое n_0, что при $n > n_0$

$$\left|r_n - r_n'\right| < \frac{1}{m}.$$

Что же это: игра ума или закрепленный в математическом определении результат познания природы? (Заметим, что к такому определению пришли далеко не сразу, оно выстрадано несколькими поколениями математиков. Но, может быть, это объясняется тем, что правила игры были очень запутанными?)

На этот вопрос не ответишь, если копаться в определении и пытаться физически истолковать каждый его пункт. Надо посмотреть, что можно с этим определением сделать. А сделать, оказывается, можно дифференциальное и интегральное исчисление. А с помощью этого исчисления можно решить разные физические задачи, например, рассчитать прочность какого-нибудь сооружения иди орбиту планеты. Это и есть решение нашего вопроса. Ведь если бы определение действительного числа было лишь игрой нашего ума, то ничего кроме продолжения игры из него не могло бы проистекать.

Правда, понятие действительного числа является идеализацией, оно лишь приблизительно отражает свойства реального мира. Но так всегда бывает в любой науке. Без идеализации ничего не сделаешь. Почитайте по этому поводу прекрасное рассуждение «Что есть сила?» в первом томе «Фейнмановских лекций по физике».

Рассмотрим теперь вопрос: какие задачи надо решать в математике? В этом отношении очень поучителен следующий пример из истории математики. Раньше очень интересовались получением формул для решения алгебраических уравнений

$$x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0, \qquad (2)$$

вроде известной формулы для решения квадратного уравнения. Такие формулы для уравнений 3-й и 4-й степени были найдены итальянцами в XVI в. Уравнения более высоких степеней не поддавались. В 1824 году Абель окончательно доказал, что для общих уравнений степени 5 и выше невозможно получить желанные формулы. Чтобы точно понять смысл этого результата, надо знать,

* Опубликовано в сборнике «Математическая школа. Лекции и задачи. II» (М.: Издательство Московского университета, 1965).

DOI: https://doi.org/10.4213/kvant20200700

что в данном случае означает слово «формула». Имеется в виду определенная последовательность арифметических операций и извлечений корней (любых степеней), которые надо произвести над числами $a_1, \ldots, a_n$ и определенными целыми числами (например, в формулу для квадратного уравнения входит число 2). Абель доказал, что при $n \geq 5$ не существует формулы, которая при любых $a_1, a_2, \ldots, a_n$ давала бы точное решение уравнения (1).

Оставалась возможность, что для каждого набора чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ существует своя формула. Через несколько лет после работы Абеля французский математик Эварист Галуа нашел необходимые и достаточные условия для того, чтобы такая формула существовала, и доказал, что для каждого $n \geq 5$ можно указать числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$, для которых эти условия не выполняются.

В ходе своих исследований Галуа ввел новые понятия и придумал новые методы, которые имели решающее значение для создания так называемой «теории групп». Начиная с конца XIX в. теория групп получает различные применения в физике. Кроме того, она оказала плодотворное влияние на развитие других разделов математики.

Выходит, что Галуа старался не зря! Но вернемся к его задаче и посмотрим, что она представляет собой с наивной физической точки зрения. Любую величину можно с достаточной степенью точности выразить рациональным числом, т.е. представить как отношение целых чисел. В частности, это относится к решению уравнения (1), и задача Галуа при таком подходе становится бессмысленной! Она приобретает смысл только при абстрактном математическом толковании. Могло бы показаться, что этой задачей заниматься не стоит, однако мы видели, что это неверно.

Итак, не всякое математическое понятие и не всякая теорема имеет ощутимый физический смысл, но из этого не следует, что математика – это плод нашего воображения. Если представить реальный «физическнй» мир в виде почвы, на которой растет дерево математики, а математические теории – в виде ветвей этого дерева (идущих как от ствола, так и от других ветвей), то математика будет похожа на дерево баньян, некоторые ветви которого пускают корни в почву. К этому нужно еще добавить, что ветви переплетаются между собой (не знаю, как обстоит дело с настоящим баньяном). Это убеждает нас в том, что каждая содержательная математическая теория, пусть даже очень абстрактная, отражает какие-то свойства материального мира и не может остаться бесполезной.

Задачи

1. Найдите все фундаментальные последовательности, составленные из целых чисел.

2. Являются ли фундаментальными следующие последовательности рациональных чисел:

а) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$;

б) $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{(-1)^{n-1}}{n}, \ldots$;

в) $1, 0, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{3}, 0, \ldots$;

г) $\frac{1}{2}, 0, \frac{2}{3}, 0, \frac{3}{4}, 0, \ldots$;

д) $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}+\frac{1}{4}, \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}, \ldots$;

е) $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}-\frac{1}{4}, \frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{8}, \ldots$;

ж) $\frac{1}{4}, \frac{4}{7}, \frac{9}{10}, \ldots, \frac{n^2}{3n+1}, \ldots$;

з) $0, \frac{3}{5}, \frac{8}{10}, \ldots, \frac{n^2-1}{n^2+1}, \ldots$;

и) $1, 1+\frac{1}{1!}, 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}, \ldots$;

к) $0, 0{,}3, 0{,}33, 0{,}333, \ldots$;

л) $1, 1+\frac{1}{2}, 1+\frac{1}{2+\frac{1}{2}}, 1+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2}}}, \ldots$;

м) последовательность, определенная равенствами

$$a_1 = 1, \ a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{2}{a_n}\right)?$$

3. Какие из фундаментальных последовательностей задачи 2 задают одно и то же действительное число?

4. Докажите, что если последовательности

$$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$$
$$b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$$

фундаментальные, то последовательности

$$a_1 + b_1,\ a_2 + b_2,\ \ldots,\ a_n + b_n,\ldots$$

$$a_1b_1,\ a_2b_2,\ \ldots,\ a_nb_n,\ \ldots$$

также фундаментальные.

5. Как следует определять действия над действительными числами?

6. Можно ли рассматривать рациональные числа как частный случай действительных? Если да, то какие к тому основания и какие фундаментальные последовательности следует считать отвечающими рациональным числам?

7. Как следует определять неравенства между действительными числами?

8. Докажите, что между любыми двумя (различными) действительными числами найдется рациональное число.

9. Докажите, что если последовательность фундаментальная, то всякая ее подпоследовательность также фундаментальна и определяет то же действительное число.

10. Что такое $\sqrt{2}$?

11. Докажите, что последовательности л) и м) из задачи 2 определяют $\sqrt{2}$. Вычислите $\sqrt{2}$ с точностью до 0,001, используя последовательность *м*).

12. Пусть дана бесконечная десятичная дробь $c_0, c_1c_2\ldots$ (c_0 обозначает целую часть, $c_1, c_2, \ldots$ – какие-то цифры). Рассмотрим последовательность, n-й член которой равен $c_0, c_1c_2\ldots c_n$. Докажите, что эта последовательность всегда фундаментальна.

13. В каком случае действительные числа, представленные двумя бесконечными десятичными дробями, равны?

14. Докажите, что всякое действительное число может быть представлено бесконечной десятичной дробью.

15. Пусть $c_0, c_1, c_2, \ldots$ – целые числа, причем $c_1, c_2, \ldots$ положительны. Докажите, что последовательность подходящих дробей бесконечной цепной дроби $c_0 + \cfrac{1}{c_1 + \cfrac{1}{c_2 + \ldots}}$ всегда фундаментальна.

16. В каком случае действительные числа, представленные двумя бесконечными цепными дробями, равны?

17. Докажите, что всякое действительное число может быть представлено бесконечной цепной дробью.

18. Последовательность называется ограниченной сверху, если существует такое число r, что все ее члены не превосходят r. Есть ли среди последовательностей задачи 2 неограниченные?

19. Докажите, что всякая фундаментальная последовательность ограничена.

20. Докажите, что всякая возрастающая ограниченная сверху последовательность фундаментальна.

21. Докажите, что последовательность, n-й член которой равен $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, фундаментальна. (Действительное число, определяемое этой последовательностью, обозначается через e.)

22. Докажите, что последовательность и) задачи 2 определяет число e. Вычислите его с точностью до 0,001.

Подробные сведения о построении системы действительных чисел можно найти в первом томе «Энциклопедии элементарной математики» (в статье И.В.Проскурякова) или, в другом изложении, в книге Э.Ландау «Основы анализа», Госиноиздат, 1947.

Своенравный волчок

М.СТАРШОВ

ЭТА ПРОСТЕНЬКАЯ КОНСТРУКЦИЯ под названием спиннер (рис.1), можно сказать, колесом прошла по свету, и кто-то

DOI: https://doi.org/10.4213/kvant20200700

Рис. 1

даже назвал ее «обязательной *офисной игрушкой* в 2017 году». В самом деле, некоторое время спиннер имел и бездумно любовался его завораживающим вращением едва ли не каждый молодой человек примерно до четвертьвекового возраста.

Но мода всегда непостоянна, и сейчас трудно вспомнить, когда последний раз видел спиннер у кого-нибудь в руках.

Один такой волчок перешел по наследству от внука к деду, а тот и начал искать игрушке новое применение. Прежде всего были очевидны гироскопические способности вертушки. Поэтому возникла идея заставить ее вращаться не в руках, а на какой-то опоре. Действительно, спиннер хорошо чувствует себя, например, на вертикально закрепленном отрезке стержня от шариковой авторучки (пока хватает его вращательной инерции).

Затем из канцелярской скрепки большого размера было согнуто миниатюрное подобие вилки переднего колеса велосипеда. В таком захвате игрушка хорошо вращалась. Но главное, можно было ощутить давление на пальцы при изменении направления ее оси вращения. Понятно же, гироскоп!

А вчера пришла мысль прикрепить вертушку к линейке и подвесить сооружение на ниточке (рис.2). Получилось интересно, линейка поворачивалась. Но быстро захотелось от линейки избавиться или, по крайней мере, сделать ее полегче.

В «полезном мусоре» нашлась полосочка гетинакса с продольными прорезями. Через одну из них маленьким винтиком спиннер был прижат к гетинаксу, а за вторую прорезь все это подвешивалось на тонкой нитке (рис.3).

И вот здесь-то и происходит самое интересное – при быстром вращении спиннера пластинка начинает медленно раскручиваться вокруг вертикальной оси. Направление этого поворота зависит от направления вращения самого волчка, и больше того – при изменении направления вращения меняется характер поворота пластинки. В одном случае это простой медленный поворот, а в другом пластинка поворачивается скачками градусов по тридцать, своеобразными квантами. Со временем эта скорость несколько возрастает, а после остановки волчка меняется ее направление – это, видимо, раскручивается нитка.

Рис. 3

Такое поведение кажется неожиданным для гироскопа, ведь на ракетах используется именно сохранение ориентации оси вращения…

Сегодня цена этой игрушки настолько упала, что мировые производители наверняка утратили к ней интерес и массовое производство прекратилось. А жаль, было бы интересно поиграть с этим волчком, только с заменой трех грузов одним тяжелым кольцом, чтобы волчок стал ближе к обычному гироскопу.

Полезно и поломать голову, откуда берется сила, поворачивающая ось висящего на нити волчка (так сказать, призрак центробежной силы). И как проявляется в этом опыте закон сохранения момента количества движения системы.

Подумайте обо всем этом!

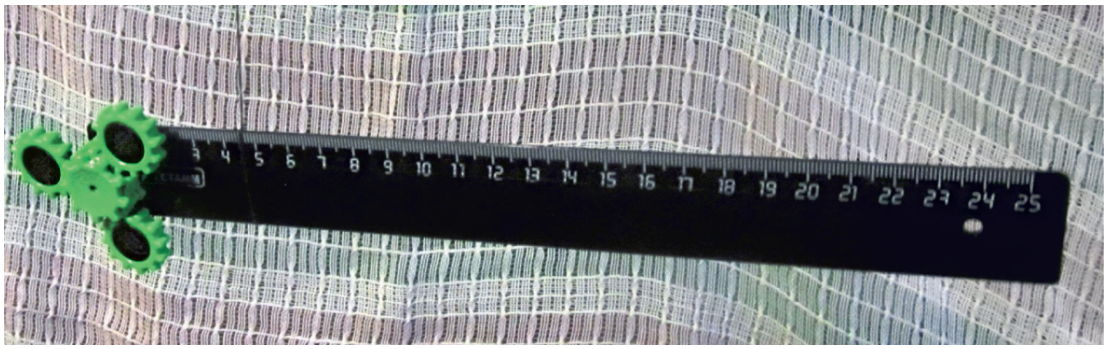


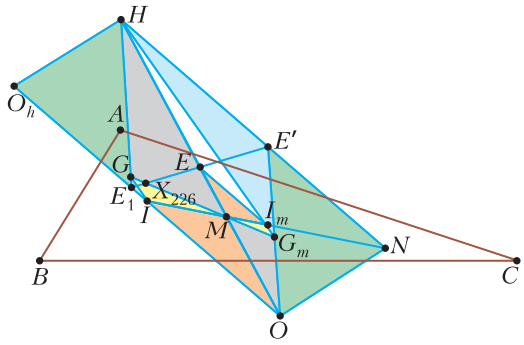
Рис. 2

Параллелограмм замечательных точек

К.КОЗЕРЕНКО

СУЩЕСТВУЕТ ОГРОМНОЕ МНОЖЕСТВО замечательных точек, связанных с треугольником, более 30000 из них уже включены в известную энциклопедию Encyclopedia of Triangle Centers (ETC) Кларка Кимберлинга (Clark Kimberling). Конечно, многие точек интересны не только сами по себе, но в связи с другими замечательными точками.

Здесь мы опишем весьма регулярную конструкцию из многих замечательных точек (см. рисунок), конструкция во многом резюмирует известные факты и результаты из



статьи К.Козеренко и П.Факанова «Птолемеева ось треугольника» («Квант» №2 за 2017 г.).

Используем обозначения: ABC – произвольный треугольник, M – его центр масс, т.е. точка пересечения медиан AA_m, BB_m, CC_m, H – ортоцентр, O – центр описанной окружности, E – центр окружности девяти точек. Хорошо известно, что четыре перечисленные точки лежат на одной прямой (прямая Эйлера), при этом E – середина OH, а M делит отрезок OH в отношении $OM : MH = 1 : 2$. Это следует, например, из гомотетии с центром в M и коэффициентом -2, переводящей серединный треугольник $A_mB_mC_m$ в ABC, поскольку O является ортоцентром треугольника $A_mB_mC_m$: $O = H_m$. Здесь и далее индексом m обозначаем точку в серединном треугольнике, соответствующую точке в исходном треугольнике ABC.

Далее, пусть I – центр вписанной окружности, а N – точка Нагеля (напомним, что точкой Нагеля называют точку пересечения трех отрезков, соединяющих вершины треугольника и точки касания противоположных сторон с вневписанными окружностями). Известно, что I, M и N лежат на одной прямой (прямая Нагеля), при этом M делит отрезок IN в отношении $IM : MN = 1 : 2$. Точка I_m также лежит на прямой Нагеля (опять работает гомотетия с центром в M, переводящая $A_mB_mC_m$ в ABC), при этом $IM : MI_m = 2 : 1$, отсюда I_m – середина отрезка IN.

Сопоставляя расположения точек на прямых Эйлера и Нагеля, видим тройку гомотетичных с центром M треугольников $IMO \sim NNH \sim I_mME$.

– $IMO \sim I_mME$ (оранжевые треугольники) гомотетичны с коэффициентом 2.

– $IMO \sim MNH$ – гомотетичны с коэффициентом $1/2$.

Из последнего вытекает, что $\overline{NH} = 2\overline{OI}$. Поэтому конструкцию можно достроить до параллелограмма, отразив O относительно I (отраженная точка – O_h). Итак,

– $HNOO_h$ – параллелограмм с центром E.

Добавляя в рассмотрение точку Жергонна G (т.е. точку пересечения трех отрезков, соединяющих вершины треугольника ABC и точки касания сторон с вписанной окружностью – вершины треугольника Жергонна) и соответствующую точку G_m, получаем новые пары гомотетичных с центром M треугольников:

– $IMG \sim I_mMG_m$ (желтые треугольники) с коэффициентом 2;

– $HMG \sim OMG_m$ (серые треугольники) с коэффициентом 2.

И как следствие, параллельности:

– $I_mG_m \parallel IG$;

– $OG_m \parallel HG$.

В упомянутой статье «Птолемеева ось» одно из ключевых точек являлся центр E_1 окружности Эйлера треугольник Жергонна.

DOI: https://doi.org/10.4213/kvant20200700

Там было показано, что E_1 лежит на прямых OI и HG, причем

– $\overrightarrow{IE_1} = \frac{r}{2R}\overrightarrow{OI}$ и

– $\overrightarrow{GE_1} = \frac{r}{4R}\overrightarrow{HG}$.

В частности, E_1 лежит на стороне нашего параллелограмма. Пусть E' симметрична E_1 относительно центра параллелограмма E, так что зеленые треугольники O_hHE_1 и NOE' равны (симметричны относительно E). Поскольку $HE_1 \parallel OE'$ (иначе говоря, HE_1OE' – параллелограмм), получаем, что

– G_m лежит на OE'.

Новое интересное наблюдение состоит в том, что

– I_m лежит на HG_m или, эквивалентно,

– $GI \parallel G_mH$.

В следующем абзаце мы укажем возможную схему доказательства этой параллельности, но читатель может попробовать вывести ее самостоятельно из уже накопленных фактов.

Схема доказательства параллельности $GI \parallel G_mH$. Достаточно доказать, что GI пересекает прямую Эйлера в точке X такой, что $\overrightarrow{MX} = 2\overrightarrow{HM}$ (или, эквивалентно, $\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{HO}$). Это можно сделать, используя равенства $\overrightarrow{IE_1} = \frac{r}{2R}\overrightarrow{OI}$ и $\overrightarrow{GE_1} = \frac{r}{4R}\overrightarrow{HG}$.

Теперь мы видим еще одну пару гомотетичных треугольников (соответствующие стороны параллельны):

– $IE_1G \sim HE'G_m$ (голубые треугольники);

и, значит,

– IH, E_1E и GM пересекаются в одной точке.

Начав рассказ с упоминания энциклопедии Кимберлинга, ею и завершим: последнюю полученную точку – центр гомотетии голубых треугольников – мы можем обнаружить в этой энциклопедии под номером 226.

ИНФОРМАЦИЯ

Заочная школа СУНЦ НГУ

В новосибирском Академгородке в составе Специализированного учебно-научного центра Новосибирского государственного университета (СУНЦ НГУ) уже более 50 лет работает Заочная физико-математическая школа (ЗФМШ НГУ) для учащихся 5–11 классов общеобразовательных школ. В ЗФМШ НГУ принимаются все желающие, без вступительных экзаменов. Прием в школу ведется круглогодично. Ежегодно лучшие ученики 8–10 классов ЗФМШ приглашаются в Летнюю школу СУНЦ НГУ, которая проводится в новосибирском Академгородке с 1 по 23 августа. По результатам обучения в Летней школе проводится зачисление в СУНЦ НГУ.

Учащиеся, успешно выполнившие все задания, по окончании одиннадцатого класса получают удостоверение выпускника Заочной школы СУНЦ НГУ.

Учителя общеобразовательных учреждений могут организовывать группы учащихся и проводить факультативные занятия по программам ЗФМШ, используя полученные методические материалы.

Всю подробную информацию можно найти на сайте ЗФМШ: http://zfmsh.nsu.ru

Наш адрес: 630090 Новосибирск, ул. Пирогова, 11/1, Заочная школа СУНЦ НГУ

Телефон: +7 (383) 363-40-66

E-mail: zfmsh@yandex.ru

Первые задания на 2020/21 учебный год

Необходимо присылать решенное задание того класса, в котором будете учиться в Заочной школе.

Математическое отделение

5 класс

1. Известно, что если первое из двух заданных чисел умножить на 3 и вычесть второе число, то получится 742893, а если второе число умножить на 3 и вычесть первое, то получится 257107. Найдите, чему равна сумма заданных чисел.