

# Теоремы Штейнера и Понселе в геометриях Евклида и Лобачевского

П. В. Бибииков

## 1. Одно неравенство для многоугольника Лобачевского

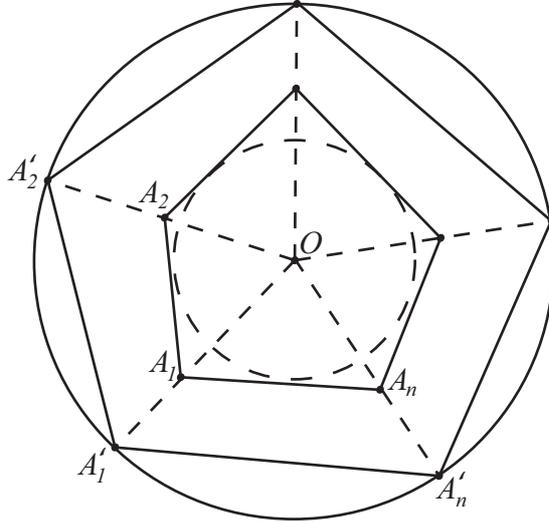
В статье [4] приводится много красивых неравенств, связывающих разные характеристики выпуклого евклидова  $n$ -угольника. В этом разделе мы докажем одно аналогичное неравенство для случая  $n$ -угольника на плоскости Лобачевского.

**Определение.** *Радиусом Бляшке  $n$ -угольника  $M$  назовем максимальный радиус лежащего в нем круга, который будем называть *кругом Бляшке*. Обозначим этот радиус через  $r_n(M)$ .*

**Теорема 1.** *На плоскости Лобачевского для каждого  $n$ -угольника  $M$  выполнено неравенство*

$$r_n(M) \leq \ln \operatorname{ctg} \frac{\pi}{2n}. \quad (1)$$

*Доказательство.* Рассмотрим для начала произвольный выпуклый  $n$ -угольник  $A_1A_2 \dots A_n$  в модели Клейна. Докажем, что его радиус Бляшке не превосходит радиуса Бляшке некоторого вырожденного  $n$ -угольника (т.е.  $n$ -угольника, все вершины которого лежат на абсолюте). Без ограничения общности можно считать, что центр круга Бляшке совпадает с центром граничного круга. Проведем прямые  $OA_k$ , пересекающие абсолют в точках  $OA'_k$  (рис. 1). Тогда очевидно, что радиус Бляшке многоугольника  $A_1A_2 \dots A_n$  не превосходит радиуса Бляшке вырожденного многоугольника  $A'_1A'_2 \dots A'_n$ . Таким образом, достаточно найти максимальный радиус Бляшке для *вырожденного  $n$ -угольника*.



**Рис. 1.**

Опять-таки, можно считать, что центр круга Бляшке совпадает с центром граничного круга. В таком случае евклидова длина  $R_n$  и неевклидова длина  $r_n$  радиуса Бляшке многоугольника  $A'_1 \dots A'_n$  связаны соотношением

$$R_n = \operatorname{th} \frac{r_n}{2}.$$

Из этой формулы видно, что величина  $r_n$  максимальна тогда и только тогда, когда максимальна величина  $R_n$ . Учитывая, что с точки зрения геометрии Евклида многоугольник  $A'_1 \dots A'_n$  вписан в окружность (абсолют) радиуса 1, с помощью неравенства, приведенного в статье [4], получаем:

$$R_n \leq \cos \frac{\pi}{n},$$

а значит,

$$r_n \leq \ln \operatorname{ctg} \frac{\pi}{2n},$$

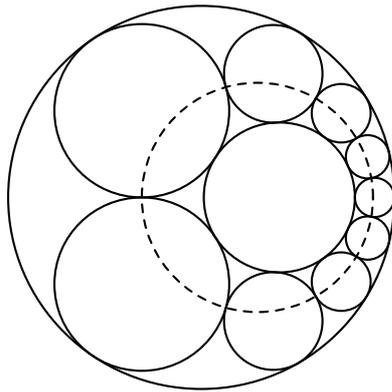
что и требовалось.

Осталось доказать, что неравенство (1) остается в силе, когда  $M$  — невыпуклый или даже самопересекающийся  $n$ -угольник. Для этого достаточно взять выпуклую оболочку  $M$ , для которой неравенство (1)

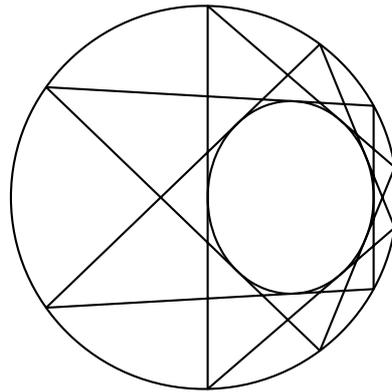
уже доказано, и заметить, что ее радиус Бляшке не меньше радиуса Бляшке многоугольника  $M$ .  $\square$

Заметим, что если многоугольник  $A'_1 \dots A'_n$  является правильным (с точки зрения геометрии Евклида), то неравенство (1) обращается в равенство.

Рассмотрим более подробно эту ситуацию. Пусть  $A'_1 \dots A'_n$  — вырожденный  $n$ -угольник, описанный вокруг неевклидовой окружности  $\omega$  в модели Клейна. При доказательстве теоремы 1 мы с помощью движения плоскости Лобачевского специально расположили многоугольник  $A'_1 \dots A'_n$  так, чтобы  $\omega$  была также и евклидовой окружностью. Теперь же мы движением переведем  $\omega$  в некоторый эллипс, вокруг которого по-прежнему будет описан  $n$ -угольник.



**Рис. 2.**



**Рис. 3.**

Давайте теперь рассмотрим аналогичную картинку в модели Пуанкаре в круге. Как известно, прямыми в ней являются дуги окружностей, перпендикулярных граничной окружности. Рассмотрим вместе с этой картинкой ее образ при инверсии относительно граничной окружности.

**Упражнение 1.** Убедитесь, что при этом получится рис. 2.

А теперь нарисуем эти две картинку рядом: то, что получилось в модели Пуанкаре в круге, и то, что получилось в модели Клейна (рис. 2 и 3). Посмотрим сначала на них, а потом на название статьи. Узнаете? Да это же поризмы Штейнера и Понселе!

## 2. Теоремы Штейнера и Понселе

Сначала напомним классические результаты Штейнера и Понселе.

**Теорема 2** (Штейнер). *Возьмем на плоскости кольцо (т.е. две окружности, одна из которых расположена строго внутри другой) и начнем вписывать в него окружности  $C_1, C_2, \dots$ , каждая из которых касается предыдущей. Тогда если получившаяся цепочка окружностей замкнется (т.е. найдется такое натуральное  $n$ , что  $C_k = C_{n+k}$  для всех  $k \geq 1$ ; рис. 2), то при любом другом выборе начальной окружности  $C'_1$  соответствующая цепочка окружностей  $C'_1, C'_2, \dots$  тоже замкнется, причем количество окружностей в цепочках будет одинаковым.*

Классическое доказательство этой теоремы проводится применением инверсии: с ее помощью исходное кольцо можно привести к концентрическому, а для него утверждение теоремы очевидно.

В связи с теоремой Штейнера возникает следующий естественный вопрос: *для какого кольца существует замкнутая цепочка окружностей?* Понятно, что любое кольцо однозначно с точностью до движений плоскости определяется тремя параметрами: радиусами  $a$  и  $b$  внешней и внутренней окружностей соответственно, а также расстоянием  $c$  между их центрами. Поэтому существование замкнутой цепочки из  $n$  окружностей определяет некоторое соотношение между величинами  $a, b, c$  и  $n$ . А именно, верна следующая

**Теорема 3.** *Для данного кольца цепочка из  $n$  окружностей замкнется тогда и только тогда, когда выполняется соотношение*

$$\cos^2 \frac{\pi}{n} = \frac{4ab}{(a+b)^2 - c^2}. \quad (2)$$

*Доказательство.* Пусть  $O_1$  и  $O_2$  — центры соответственно внешней и внутренней окружностей кольца. Проведем через точку  $O_2$  диаметр  $RS$  внешней окружности, пересекающий внутреннюю окружность в точках  $P$  и  $Q$ .

Сначала рассмотрим случай  $c = 0$ , т.е. случай концентрического кольца с центром в точке  $O = O_1 = O_2$  (рис. 4). Тогда радиус вписанных в кольцо окружностей равен  $\frac{a-b}{2}$ . Пусть  $A$  — центр одной из таких окружностей, а  $B$  — точка ее касания со следующей окружностью кольца. Т.к.

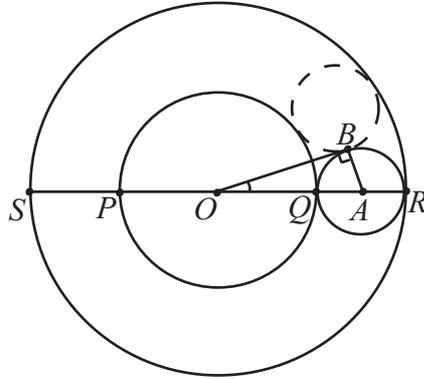


Рис. 4.

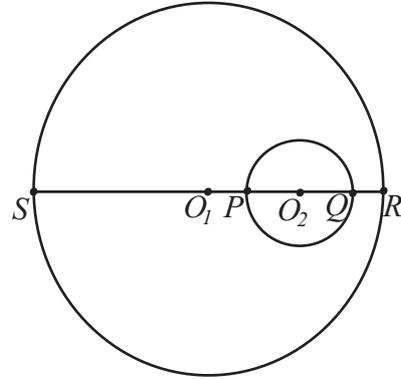


Рис. 5.

треугольник  $OBA$  прямоугольный,  $\angle AOB = \frac{\pi}{n}$  и  $OA = \frac{a+b}{2}$ , то

$$\sin \frac{\pi}{n} = \frac{a-b}{a+b}.$$

Эта формула тривиально преобразуется в формулу (2) с  $c = 0$ . Нам будет удобно записать ее в следующем виде:

$$[PQ, RS] = \frac{1}{\sin^2 \pi/n}.$$

(Здесь  $[PQ, RS] = \frac{RP}{RQ} : \frac{SP}{SQ}$  — стандартное двойное отношение.)

Рассмотрим теперь общий случай (рис. 5). Мы уже отмечали, что любое кольцо с помощью инверсии можно перевести в концентрическое. Осталось заметить, что при инверсии двойное отношение  $[PQ, RS]$  не изменится! Нам остается только выразить величины  $RP$ ,  $RQ$ ,  $SP$  и  $SQ$  через  $a$ ,  $b$  и  $c$  и подставить все в предыдущую формулу.

**Упражнение 2.** Завершите доказательство, проделав необходимые вычисления.

□

**Упражнение 3.** Докажите, что если цепочка окружностей замыкается после  $m$  оборотов, то формула (2) изменится на следующую:

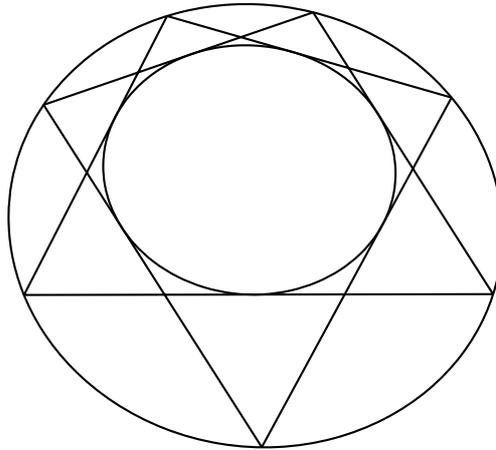
$$\cos^2 \frac{m\pi}{n} = \frac{4ab}{(a+b)^2 - c^2}.$$

Отметим, что экспонента от двойного отношения, используемого нами, есть не что иное, как расстояние между точками  $P$  и  $Q$  в модели Пуанкаре в круге (абсолют в которой совпадает с внешней окружностью кольца) геометрии Лобачевского, а его инвариантность относительно инверсии следует из того, что в этой модели инверсия является движением.

Другое доказательство приводится в [5].

Перейдем теперь к теореме Понселе.

**Теорема 4** (Малая теорема Понселе). *Возьмем на плоскости кольцо и, начиная с произвольной точки  $A$ , впишем в него ломаную  $L$  со звеньями  $L_1, L_2, \dots$  (т.е.  $L_k$  является хордой внешней окружности и касательной внутренней при всех  $k \geq 1$ ). Тогда если получившаяся ломаная замкнется (т.е. найдется такое натуральное  $n$ , что  $L_k = L_{n+k}$  для всех  $k \geq 1$ ), то при любом другом выборе начальной точки  $A'$  соответствующая ломаная  $L'$  тоже замкнется, причем количество звеньев в ломаных будет одинаковым.*



**Рис. 6.**

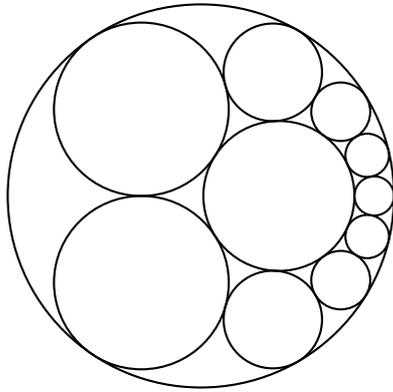
Элементарное (но непростое!) доказательство приводится в [6].

Если в теореме 4 заменить окружности на коники (рис. 6), то получится *большая теорема Понселе*. Ее доказательство приводится, например, в [2].

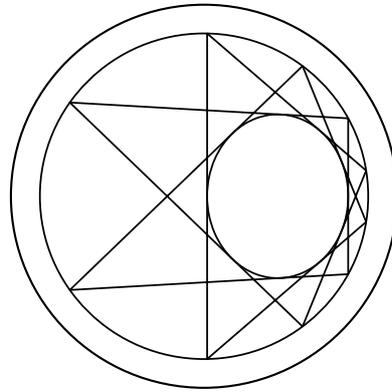
Теперь рассмотрим теоремы Штейнера и Понселе в геометрии Лобачевского.

**Теорема 5.** *В геометрии Лобачевского верны теорема Штейнера и малая теорема Понселе.*

*Доказательство.* Для доказательства теоремы Штейнера воспользуемся моделью Пуанкаре в верхней полуплоскости (рис. 7). Поскольку в этой модели окружности Лобачевского совпадают с окружностями Евклида, то справедливость теоремы Штейнера в геометрии Лобачевского равносильна ее справедливости в геометрии Евклида.



**Рис. 7.**



**Рис. 8.**

Для доказательства большой теоремы Понселе разумно воспользоваться все той же моделью Клейна (рис. 8). В ней окружности Лобачевского являются евклидовыми кониками, а прямая Лобачевского — отрезком. Поэтому справедливость малой теоремы Понселе в геометрии Лобачевского следует из справедливости большой теоремы Понселе в геометрии Евклида.  $\square$

Визуально теоремы Штейнера и Понселе кажутся очень похожими. Действительно, ведь исходная конфигурация в них практически одинакова, только в одном случае в кольцо вписываются окружности, а другом — ломаная. Однако, несмотря на кажущееся сходство в формулировке, эти теоремы имеют принципиально разные доказательства, которые никак не демонстрируют взаимосвязь этих теорем.

Поэтому сейчас мы приведем рассуждение, которое покажет, что на самом деле теоремы Штейнера и Понселе являются практически единым

целым, и поможет нам в этом геометрия Лобачевского.<sup>1</sup>

Рассмотрим большую теорему Понселе в следующем частном случае: внешняя коника является окружностью, а внутренняя — эллипсом, причем этот эллипс должен быть окружностью Лобачевского в модели Клейна относительно внешней окружности (рис. 8). Тогда любая замкнутая ломаная, вписанная в полученное кольцо, является *вырожденным описанным многоугольником* (возможно, самопересекающимся) в геометрии Лобачевского.

Перейдем теперь в модель Пуанкаре в круге геометрии Лобачевского. В этой модели окружности Лобачевского совпадают с евклидовыми, а прямыми являются дуги окружностей, лежащие внутри абсолюта и перпендикулярные ему. Тогда предыдущая конфигурация примет следующий вид: эллипс станет окружностью, а звенья ломаной — дугами окружностей, каждая из которых перпендикулярна абсолюту (а значит, касается предыдущей дуги). Тогда окружности, содержащие эти дуги, будут касаться еще одной окружности (см. рис. 2 и упражнение 1). А это как раз и есть теорема Штейнера.

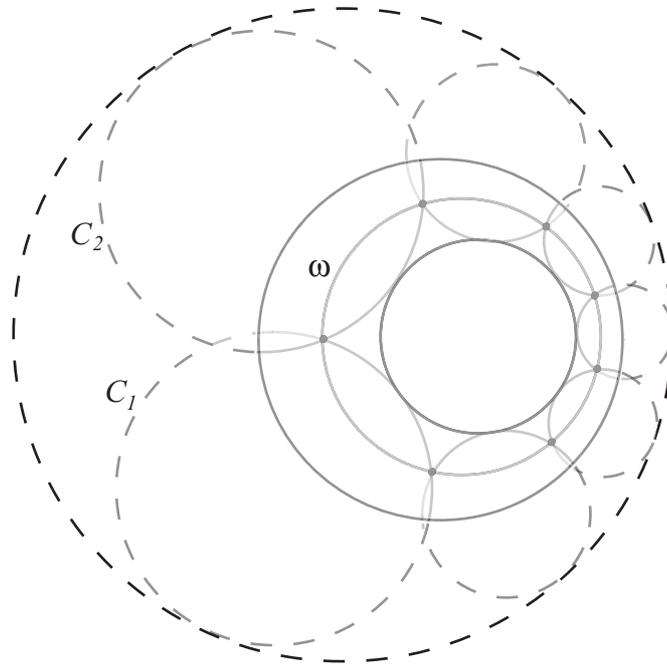
Таким образом, мы видим, что теорема Штейнера является частным случаем большой теоремы Понселе. Также интересен и обратный переход к теореме Понселе. К сожалению, таким способом получить ее доказательство в общем случае нельзя, поскольку окружность в модели Клейна геометрии Лобачевского — это не произвольный эллипс (у него, например, малая ось лежит на диаметре абсолюта).

Теперь с помощью теоремы Понселе в геометрии Лобачевского мы докажем следующую теорему евклидовой геометрии, которая является обобщением теоремы Штейнера и малой теоремы Понселе.

**Теорема 6** (Эмх). *Возьмем на плоскости кольцо (т.е. две окружности, одна из которых расположена строго внутри другой) и окружность  $\omega$ , лежащую в нем и содержащую меньшую окружность кольца. Начнем вписывать в это кольцо окружности  $C_1, C_2, \dots$ , каждая из которых проходит через точку пересечения предыдущей окружности с окружностью  $\omega$  (рис. 9). Тогда если получившаяся цепочка окружностей замкнется (т.е. найдется такое натуральное  $n$ , что  $C_k = C_{n+k}$  для всех  $k \geq 1$ ), то при любом другом выборе начальной окружности  $C'_1$*

---

<sup>1</sup>Адамар говорил, что часто путь между двумя вещественными результатами проходит через комплексное. А в данном случае путь между двумя евклидовыми теоремами проходит через неевклидову геометрию!



**Рис. 9.**

*соответствующая цепочка окружностей  $C'_1, C'_2, \dots$  тоже замкнется, причем количество окружностей в цепочках будет одинаковым.*

*Доказательство.* Как и при доказательстве теоремы Штейнера, с помощью инверсии переведем граничные окружности кольца в концентрические. Тогда найдется окружность, перпендикулярная всем окружностям  $C_k$  кольца (докажите!), причем эта окружность не будет зависеть от выбора начальной окружности  $C_1$ . Мысленно сотрем все, что лежит вне этой окружности и внимательно посмотрим на то, что осталось. После секундного размышления становится понятно, что перед нами не что иное, как малая теорема Понселе в модели Пуанкаре в круге геометрии Лобачевского!  $\square$

**Упражнение 4.** На самом деле, теорема Эмха верна для произвольного расположения трех окружностей. Докажите это.

**Упражнение 5.** С помощью теоремы Эмха докажите теорему Штейнера и малую теорему Понселе.

Аналогично теореме 5, верна следующая

**Теорема 7.** *Теорема Эмха верна в геометрии Лобачевского.*

**Упражнение 6.** Докажите эту теорему.

Приведенный выше пример использования геометрии Лобачевского при доказательстве теорем геометрии Евклида является довольно редким и на практике встречается нечасто (см., например, [1, 3]).

## Список литературы

- [1] Андреев Е. *Невписываемые многогранники* // Квант, №8, 1970. С. 3–9.
- [2] Берже М. *Геометрия. Том второй*. М.: Мир, 1984. С. 140–148.
- [3] Гальперин Г. А. *Бильярдная формула для измерения расстояний в геометрии Лобачевского* // Математическое просвещение. Третья серия. Вып. 8. 2004. С. 102–109.
- [4] Гашков С. Б. *Неравенства для выпуклых многоугольников и многоугольники Рейнхардта* // Математическое просвещение. Третья серия. Вып. 11. 2007. С. 91–103.
- [5] Исмагилов Р. *Ожерелье Штейнера, или Любовь к вычислениям* // Квант, №2, 2003. С. 9–12.
- [6] Шарыгин И. Ф. *Геометрия. Планиметрия. Задачник. 9–11 кл.* М.: Дрофа, 2001. С. 77, 235–236.