

## Неевклидовы решения для евклидовых задач

П. В. Бибибков<sup>1</sup>, И. И. Фролов<sup>2</sup>

### 1 Введение

Поводом для написания данной статьи послужила следующая задача, предлагавшаяся в шорт-листе Международной математической олимпиады 2010 г. (т.е. эта задача не была предложена на самой олимпиаде, но вошла в число потенциальных претендентов на эту почетную роль; полный список задач шорт-листа 2010 г. можно найти на странице <https://www.imo-official.org/problems.aspx>).

**Задача 1.** Рассмотрим отрезок  $AB$  и точку  $H$  на нем. Проведем три дуги окружностей с концами в точках  $A$  и  $B$ , лежащие в одной полуплоскости относительно прямой  $AB$ , и три луча с началом в точке  $H$ , лежащие в той же полуплоскости. При пересечении дуг окружностей и лучей возникают четыре криволинейных четырехугольника (две их стороны лежат на дугах окружностей, а две оставшиеся — на лучах). Докажите, что если в три этих четырехугольника можно вписать окружность, то и в четвертый четырехугольник можно вписать окружность (см. рис. 1).

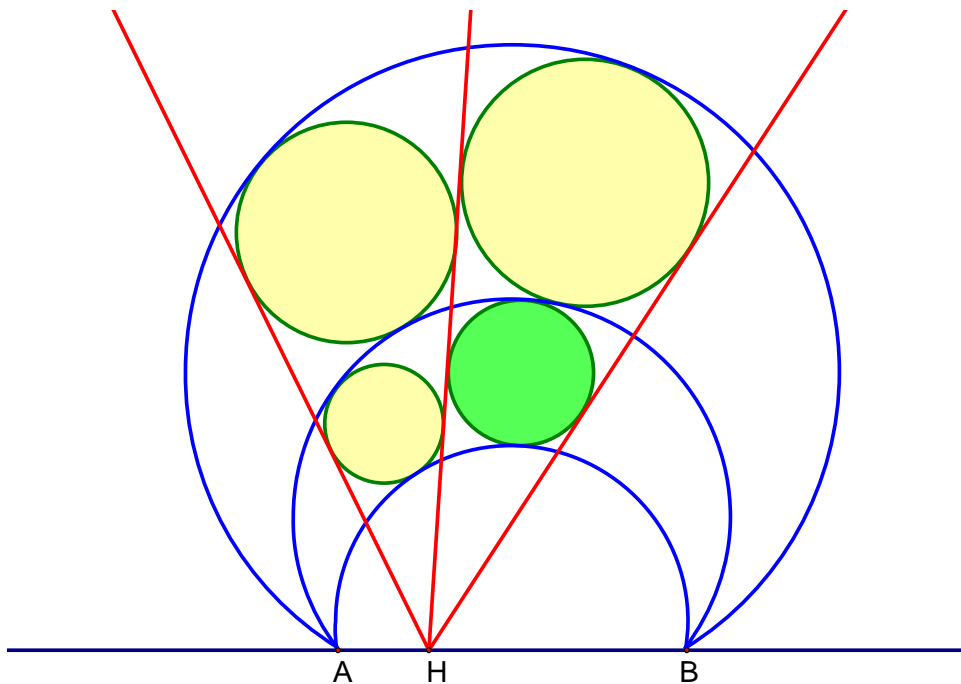


Рис. 1:

Оказывается, что у этой задачи существует очень короткое решение (буквально устное). И для того, чтобы понять его, нам нужно будет посмотреть на рис. 1 под несколько иным углом зрения. А именно, с точки зрения геометрии Лобачевского... В принципе, подобный подход не является новым (см., например, статью Гальперина [3]), однако, по всей видимости, он до сих пор считается весьма экзотическим и работающим буквально с единичными случаями. Познакомившись с задачами, приведенными ниже, можно убедиться, что это не так, и данный метод вполне заслуживает того, чтобы о нем знали и умели применять.

<sup>1</sup>Лицей «Вторая школа»; e-mail: bibikov.pv@sch2.ru

<sup>2</sup>Факультет математики НИУ ВШЭ; e-mail: frolov1999@yandex.ru

## 2 Модели Пуанкаре и модель Клейна

Мы начнем с описания трех наиболее часто встречающихся моделей плоскости Лобачевского: моделей Пуанкаре в верхней полуплоскости и в круге, а также модели Клейна. Все три эти модели будут необходимы нам в тех или иных евклидовых задачах. Более подробное описание этих моделей можно найти в [6].

Начнем с модели Пуанкаре в верхней полуплоскости. В этой модели *плоскостью Лобачевского* называется фиксированная полуплоскость (которую обычно называют верхней) относительно некоторой прямой. Эта прямая вместе с бесконечно удаленной точкой называется *абсолютом*. Точки абсолюта называются бесконечно удаленными. *Прямыми* в модели Пуанкаре являются полуокружности с центром на абсолюте и вертикальные лучи, перпендикулярные абсолюту. Угол между двумя неевклидовыми прямыми по определению полагается равным евклидовому углу между соответствующими кривыми.

Одним из наиболее важных фактов в геометрии Лобачевского (равно как и в евклидовой геометрии) является теорема о сумме углов треугольника. Оказывается, что сумма углов любого неевклидова треугольника строго меньше  $\pi$ . Легко убедиться в этом, рассмотрев треугольник, получающийся малым шевелением прямых, попарно пересекающихся на абсолюте: дуги полуокружностей, образующих такой треугольник, практически касаются друг друга, поэтому углы между ними могут быть сделаны сколь угодно малыми.

**Упражнение 1.** *Попробуйте доказать, что сумма углов любого неевклидова треугольника строго меньше  $\pi$ .*

Из теоремы о сумме углов неевклидова треугольника следует *четвертый признак равенства треугольников*: два треугольника равны по трем углам. В частности, отсюда следует, что в геометрии Лобачевского нет подобий: любое преобразование подобия сохраняет углы, а потому в силу четвертого признака равенства треугольников является движением.

**Упражнение 2.** *Докажите четвертый признак равенства треугольников.*

В свою очередь из четвертого признака равенства треугольников следует важный факт: инверсия относительно полуокружности с центром на абсолюте является движением в модели Пуанкаре геометрии Лобачевского. В самом деле, такая инверсия сохраняет верхнюю полуплоскость и углы между кривыми (в силу свойства конформности инверсии). Более того, можно даже сказать, как называется это движение: это *осевая симметрия*. Именно поэтому инверсия играет такую большую роль в модели Пуанкаре: ведь соответствующие преобразования являются осевыми симметриями, которые, как известно, порождают всю группу движений плоскости Лобачевского (т.е. любое движение является композицией конечного числа инверсий).

**Упражнение 3.** *Докажите, что гомотетия с центром на абсолюте и положительным коэффициентом также является движением в модели Пуанкаре. Каким образом это движение раскладывается в композицию инверсий, и как разумно назвать это движение (по аналогии с евклидовой геометрией)?*

В геометрии Лобачевского также можно определить простейшие кривые. Однако, в отличие от евклидовой геометрии, в геометрии Лобачевского элементарные кривые более разнообразны и не ограничиваются одной лишь окружностью.

**Упражнение 4.** *Докажите, что всякая евклидова окружность, целиком лежащая в верхней полуплоскости, является также неевклидовой окружностью, и наоборот, каждая неевклидова окружность является одновременно и евклидовой окружностью.*

Возникает естественный вопрос: а чем является евклидова окружность, пересекающая абсолют? Для того, чтобы ответить на этот вопрос, напомним еще два определения.

*Эквидистантой* называется множество точек, расположенных на заданном расстоянии  $h$  от данной прямой  $p$  и лежащих в заданной полуплоскости относительно этой прямой. Прямая  $p$  называется *базой* эквидистанты, величина  $h$  — *высотой*. Иначе говоря, эквидистанта — это неевклидов аналог прямой, параллельной данной.

Орициклом называется кривая, пересекающая все прямые, имеющие общую бесконечно удаленную точку, под прямым углом.

Отметим, что наклонные лучи с началом на абсолюте также являются эквидистантами, а прямые, параллельные абсолюту, — орициклами.

**Упражнение 5.** Докажите, что евклидова окружность, касающаяся абсолюта, является орициклом, а окружность, пересекающая абсолют в двух точках, — эквидистантой (см. рис. 2).

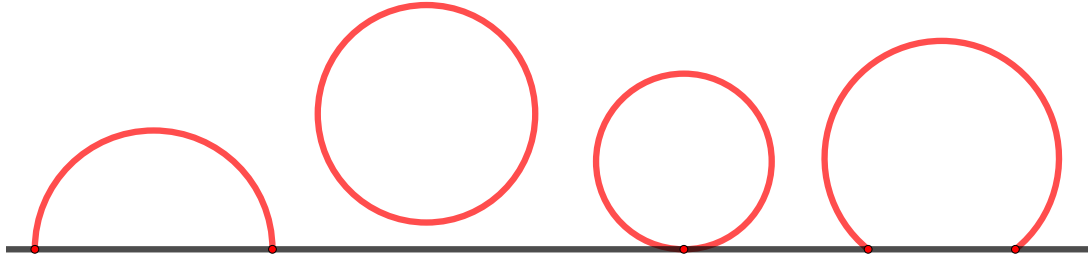


Рис. 2:

**Упражнение 6.** Докажите, что если даны две эквидистанты с общей базой и высотами  $h_1$  и  $h_2$ , лежащие в одной полуплоскости относительно базы, то расстояние от любой точки одной из эквидистант до другой равно  $|h_1 - h_2|$ . Эту величину естественно назвать расстоянием между эквидистантами.

Теперь опишем модель Пуанкаре в круге. Легче всего сделать это, совершив инверсию уже знакомой нам модели в верхней полуплоскости относительно окружности с центром в нижней полуплоскости. В таком случае плоскость Лобачевского станет внутренностью некоторого круга (который также называется абсолютом), а прямые в этой модели будут изображаться дугами окружностей, ортогональных абсолюту, а также диаметрами самого абсолюта.

**Упражнение 7.** Опишите, как выглядят окружности, эквидистанты и орициклы в модели Пуанкаре в круге.

Наконец, опишем модель Клейна. Переход к ней от модели Пуанкаре в круге можно осуществить так. Рассмотрим сферу, экватором которой служит абсолют модели Пуанкаре в круге. Пусть  $A$  — точка модели Пуанкаре,  $A_1$  — точка пересечения прямой  $NA$  с поверхностью сферы, где  $N$  — это северный полюс. Спроектируем точку  $A_1$  на экватор и получим точку  $A'$ . Сопоставив каждой точке  $A$  точку  $A'$ , мы получим некоторое преобразование экваториального круга. То, что получилось, мы назовем моделью Клейна плоскости Лобачевского.

Давайте поймем, как выглядят прямые в модели Клейна. В модели Пуанкаре в круге прямая изображается или в виде диаметра абсолюта, или в виде дуги окружности, ему перпендикулярной. Понятно, что образом диаметра круга будет тот же диаметр. Посмотрим, во что перейдет дуга окружности, ортогональная абсолюту. При центральной проекции на сферу эта дуга перейдет в дугу окружности, перпендикулярную плоскости абсолюта (т.к. такая проекция есть не что иное как пространственная инверсия). Поэтому ортогональной проекцией получившейся дуги окружности на экватор сферы является хорда экватора. Таким образом, в модели Клейна все неевклидовы прямые изображаются в виде хорд абсолюта.

**Упражнение 8. 1.** Опишите, как выглядят окружности, эквидистанты и орициклы в модели Клейна.

2. Докажите, что окружности в модели Клейна — это либо евклидовы окружности, центр которых совпадает с центром абсолюта, либо эллипсы, касающиеся абсолюта в двух мнимых точках.

### 3 Вокруг задачи из шорт-листа

Теперь мы готовы перейти к решению задачи из шорт-листа, сформулированной во введении. Уже сейчас, глядя на рис. 1, становится понятно, что для ее решения будет полезна модель Пуанкаре в верхней полуплоскости. Ведь с точки зрения этой модели на картинке нарисованы две тройки эквидистант с общими базами. И это обстоятельство действительно можно использовать.

Чтобы проследить весь путь к решению, мы начнем с красивого утверждения, которое интересно и само по себе. А именно, докажем следующую лемму.

**Лемма** (о грустном приведении). *Рассмотрим две окружности  $\omega_1$  и  $\omega_2$ , вписанные в область между дугами с концами в точках  $A$  и  $B$  (см. рис. 3). Тогда центр внешней гомотетии этих окружностей лежит на прямой  $AB$ .*

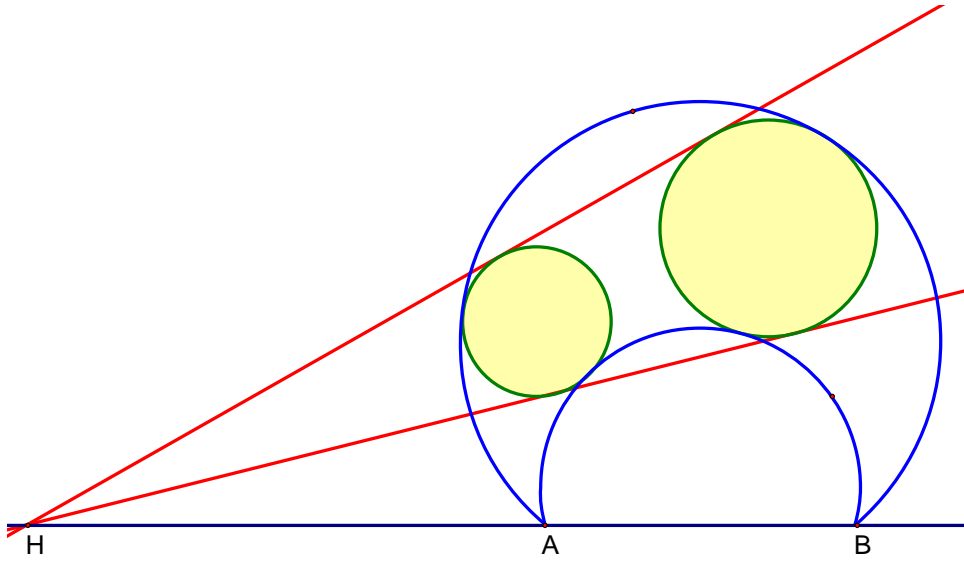


Рис. 3:

*Доказательство.* Посмотрим на эту картинку с точки зрения геометрии Лобачевского. Тогда прямая  $AB$  станет абсолютом, дуги с концами в точках  $A$  и  $B$  станут эквидистантами, а евклидовы окружности, вписанные в область между ними, превратятся в неевклидовы (хотя по форме они не отличаются от евклидовых, но центр их смещен ближе к абсолюту). Заметим, что радиусы *неевклидовых* окружностей  $\omega_1$  и  $\omega_2$  равны, поскольку оба они равны половине расстояния между эквидистантами. Теперь докажем, что если взять любую другую эквидистанту, касающуюся обеих окружностей и пересекающую абсолют в точках  $C$  и  $D$ , то найдется вторая эквидистанта, проходящая через  $C$  и  $D$  и также касающаяся обеих окружностей. В самом деле, рассмотрим эквидистанту, которая расположена в той же части неевклидовой плоскости, что и окружности, и которая удалена от первой эквидистанты на расстояние, равное диаметру окружностей. Легко видеть, что она касается обеих окружностей (например, потому, что концы диаметров окружностей, проведенные через точки касания с первой эквидистантой, должны лежать на второй эквидистанте).

Осталось применить это соображение к паре эквидистант, являющихся общими внешними касательными к нашим окружностям. □

Неформально говоря, конструкцию, описанную в этой лемме, с точки зрения евклидовой геометрии можно представлять так. Поскольку эквидистанта — это неевклидов аналог прямой, параллельной данной (т.е. ГМТ, равноудаленных от данной прямой в фиксированной полуплоскости), то пара эквидистант с общей базой — это просто пара параллельных прямых.

Тогда понятно, что радиусы всех окружностей, вписанных в пространство между ними, равны: ведь это просто окружности, вписанные в полосу между параллельными прямыми. Такие окружности можно совместить параллельным переносом, который в неевклидовой геометрии является композицией двух инверсий относительно полуокружностей с центрами на абсолюте. Такая неформальная трактовка бывает удобна, чтобы лучше понять ситуацию.

Посмотрим, какие факты можно извлечь из этой леммы, и как при этом будет работать модель Пуанкаре.

**Предложение.** *В обозначениях предыдущей леммы точки касания окружностей и эквидистант лежат на одной (евклидовой) окружности, а прямые, проходящие через эти точки, пересекаются в центре  $H$  внешней гомотетии окружностей.*

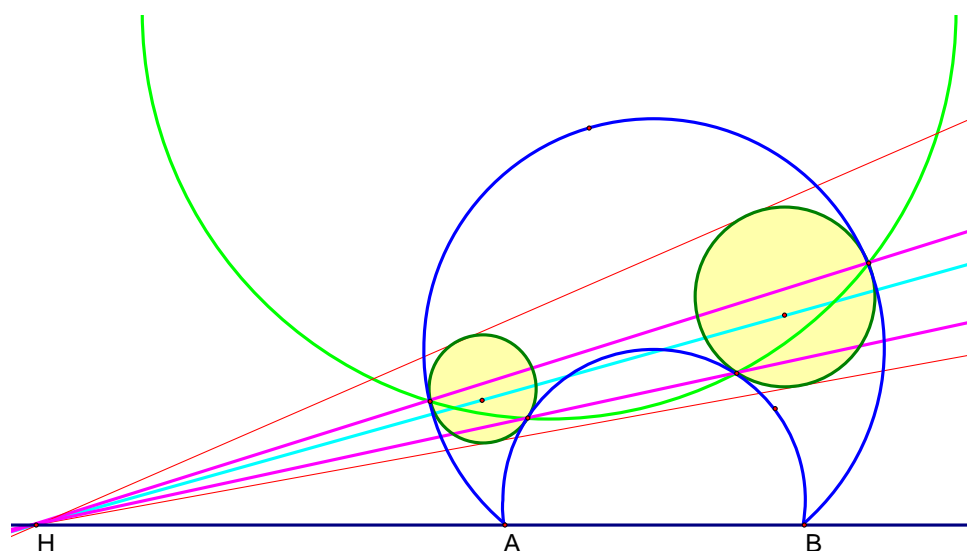


Рис. 4:

*Доказательство.* В самом деле, рассмотрим инверсию с центром в точке  $H$  относительно окружности, ортогональной синим дугам и переводящей желтые окружности друг в друга (с точки зрения неевклидовой геометрии мы рассматриваем осевую симметрию относительно прямой, ортогональной паре эквидистант и переводящей одну неевклидову окружность в другую; из этой интерпретации также следует существование такой инверсии: достаточно рассмотрим неевклидову прямую, являющуюся серединным перпендикуляром к отрезку между неевклидовыми центрами желтых окружностей). Тогда точки касания желтых окружностей с синими дугами перейдут друг в друга, т.к. точки касания должны перейти в точки касания (см. рис. 4). Отсюда сразу следует, что пары точек касания лежат на прямых, проходящих через центр инверсии  $H$ . А из леммы о подобных треугольниках (см., например, [4]) следует, что все четыре точки касания лежат на одной окружности.  $\square$

*Замечание 1.* Из решения также следует, что прямые, проходящие через евклидовы центры желтых окружностей и через их неевклидовы центры, также проходят через точку  $H$  (см. рис. 4).

Теперь перейдем к задаче из шорт-листа, с которой и начинался этот сюжет. Мы приведем здесь даже два решения: первое будет более «евклидовым» (отчасти оно похоже на авторское решение), а второе будет использовать исключительно геометрию Лобачевского. Читатель может сравнить эти решения и решить для себя, какое из них проще и понятнее.

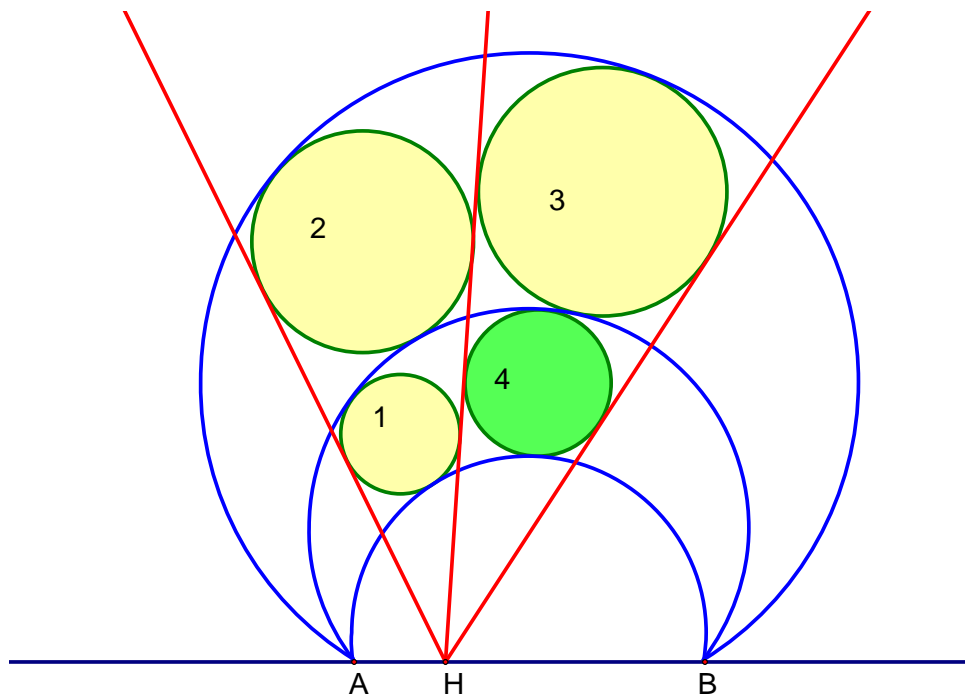


Рис. 5:

*Первое решение.* По лемме о грустном приведении центр гомотетии окружностей 2 и 3 лежит на абсолюте. Поэтому по теореме о трех гомотетиях (см., например, [8]) для окружностей 1, 2, 3 центр гомотетии окружностей 1 и 3 также лежит на абсолюте. Рассмотрим окружность 4, касающуюся двух синих окружностей и левой красной прямой (см. рис. 5). По лемме о грустном приведении центр гомотетии окружностей 1 и 4 лежит на абсолюте. Значит, по теореме о трех гомотетиях для окружностей 1, 3, 4 центр гомотетии окружностей 3 и 4 также лежит на абсолюте. Но тогда это в точности точка  $H$ . Поэтому окружность 4 касается и второй красной прямой, что и требовалось доказать.

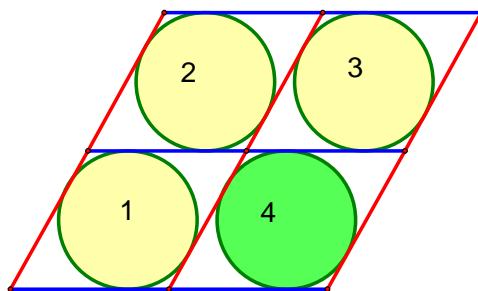


Рис. 6:

*Второе решение.* По сути картинка эквивалентна вот такой картинке в евклидовой геометрии (см. рис. 6). Ведь эквидистанта — это аналог параллельной прямой, поэтому криволинейные четырехугольники — это просто неевклидовы аналоги параллелограммов. А если в параллелограмм можно вписать окружность, то это ромб. Таким образом, нужно просто доказать, что если в сетке из параллелограммов есть три ромба, как на картинке, то в ней все параллелограммы будут ромбами. Но это очевидно!

Формально и без аналогии с евклидовой геометрией это можно доказать так. Заметим, что неевклидовы желтые окружности равны, поскольку все они попарно вписаны в эквидистанты. Тогда рассмотрим пару синих эквидистант и центральную красную эквидистанту. Рассмотрим

окружность, касающуюся их трех (существование такой окружности следует, например, из задачи Аполлония, см. [7]). Поскольку расстояние между центральной и правой красными эквидистантами равно диаметру этой окружности, то правая эквидистанта также будет касаться этой окружности. Все!

В таком виде задача допускает следующее обобщение. Рассмотрим две тройки соосных окружностей, имеющих одну и ту же радикальную ось, где каждая окружность из первой тройки пересекает каждую окружность из второй тройки ровно в двух точках. Тогда если три криволинейных четырехугольника будут описанными, то и четвертый будет описанным.

**Упражнение 9.** Докажите это утверждение.

Теперь рассмотрим пример задачи, найти евклидово решение у которой пока не удалось, а неевклидово получатся в две строчки.

**Задача 2.** Рассмотрим отрезок  $AB$  и точку  $H$  на нем. Проведем три дуги окружностей с концами в точках  $A$  и  $B$ , лежащие в одной полуплоскости относительно прямой  $AB$ , и три луча с началом в точке  $H$ , лежащие в той же полуплоскости. При пересечении дуг окружностей и лучей возникают четыре криволинейных четырехугольника (две их стороны лежат на дугах окружностей, а две оставшиеся — на лучах). Докажите, что если в два диагональных четырехугольника (т.е. не имеющих общих сторон) можно вписать окружность, то и в большой криволинейный четырехугольник можно вписать окружность (см. рис. 7).

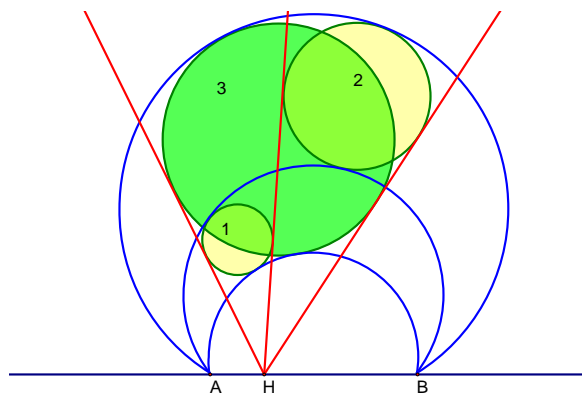


Рис. 7:

*Решение.* Теперь картинка становится эквивалентной вот такой картинке в евклидовой геометрии. Есть сетка из параллелограммов, в которой два параллелограмма по диагонали являются ромбами. Тогда большой параллелограмм тоже будет ромбом. Следовательно, в него можно вписать окружность.

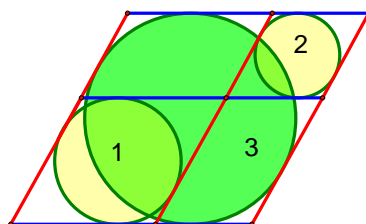


Рис. 8:

Приведем также несколько модификаций этой задачи.

**Задача 3.** 1. Рассмотрим две тройки соосных окружностей, имеющих одну и ту же радикальную ось, где каждая окружность из первой тройки пересекает каждую окружность из второй тройки ровно в двух точках. Тогда если два диагональных криволинейных четырехугольника будут описанными, то и большой криволинейный четырехугольник будет описанным.

2. Более того, можно делить большой четырехугольник на  $n^2$  частей и брать маленькие части по одной в каждом столбце и строке.

В заключение приведем пару хорошо известных картинок из евклидовой геометрии, которые также допускают простое неевклидово решение с помощью тех же соображений.

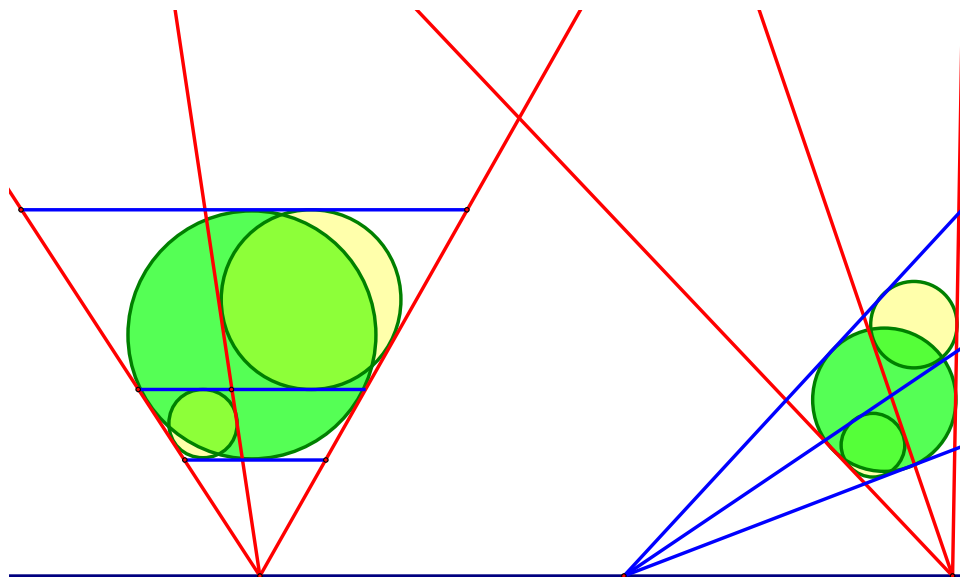


Рис. 9:

В первой можно говорить о двух тройках эквидистант, а во второй — о тройке орициклов и тройке эквидистант (См. рис. 9).



## 4 По мотивам олимпиады Шарыгина

Теперь посмотрим, как работают модель Пуанкаре в круге и модель Клейна. Часто бывает так, что необходимо осуществлять переход между этими моделями, поэтому напомним, что для этого достаточно заменить дуги окружностей, перпендикулярных абсолюту, на общие хорды этих дуг и окружности абсолюта.

**Задача 4.** Окружность  $\Omega$  касается окружностей  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  и  $\omega_3$  внешним образом. Окружность  $\Gamma_1$  соосна с  $\omega_2$  и  $\omega_3$  и проходит через точку касания  $\omega_1$  с  $\Omega$ . Окружности  $\Gamma_2$  и  $\Gamma_3$  определяются аналогично. Тогда окружности  $\Gamma_1$ ,  $\Gamma_2$  и  $\Gamma_3$  соосны (см. рис. 10).

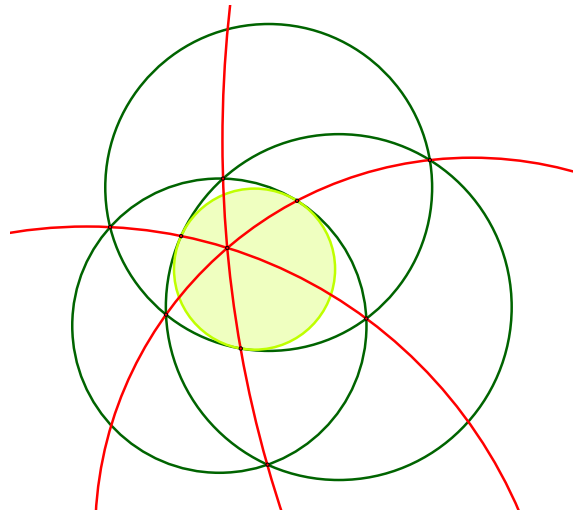


Рис. 10:

*Решение.* Вначале рассмотрим случай, когда не все окружности  $\omega_1$ ,  $\omega_2$ ,  $\omega_3$  пересекаются. В таком случае рассмотрим окружность  $\omega$ , перпендикулярную  $\omega_1$ ,  $\omega_2$ ,  $\omega_3$ . Легко видеть, что она обязательно существует: ее центр это — радикальный центр окружностей  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  и  $\omega_3$ . Заметим, что любая окружность, соосная с  $\omega_2$  и  $\omega_3$ , также будет перпендикулярна  $\omega$ . Значит, окружности  $\Gamma_1$ ,  $\Gamma_2$  и  $\Gamma_3$  перпендикулярны  $\omega$ .

Примем теперь  $\omega$  за абсолют для модели Пуанкаре в круге плоскости Лобачевского и сразу же перейдем к модели Клейна. Окружности  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  и  $\omega_3$  станут прямыми, образующими неевклидов треугольник. Окружность  $\Omega$  станет коникой, вписанной в этот треугольник, а окружности  $\Gamma_1$ ,  $\Gamma_2$  и  $\Gamma_3$  превратятся в прямые, соединяющие вершины треугольника с точками касания коники со сторонами. Как хорошо известно, эти прямые пересекаются в одной точке (в этом можно убедиться, сделав проективное преобразование, переводящее конику в окружность и сводя задачу к точке Жергонна). Переходя обратно к модели Пуанкаре, получаем, что окружности  $\Gamma_1$ ,  $\Gamma_2$  и  $\Gamma_3$  ортогональны абсолюту и имеют общую точку. Значит, они соосны.

**Упражнение 10.** Решите задачу в случае, когда окружности  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  и  $\omega_3$  попарно пересекаются. Указание: сделайте инверсию в точке касания  $\Omega$  и  $\omega_1$ .

**Упражнение 11.** Диагонали вписанного четырехугольника  $ABCD$  пересекаются в точке  $M$ . Окружность  $\omega$  касается отрезка  $MA$  в точке  $P$ , отрезка  $MD$  в точке  $Q$  и окружности  $ABCD$  в точке  $X$ . Докажите, что  $X$  лежит на радикальной оси окружностей  $(ACQ)$  и  $(BDP)$ .

Предыдущая задача по существу эквивалентна существованию точки Жергонна в неевклидовом треугольнике. Следующая задача эквивалентна существованию точки Нагеля. Нам не известно ее решение, не использующее геометрии Лобачевского.

**Задача 5.** Окружности  $\omega_1, \omega_2$  и  $\omega_3$  попарно пересекаются. Окружность  $\Gamma_1$  касается окружностей  $\omega_2$  и  $\omega_3$  внешним образом и касается  $\omega_1$  внутренним образом, причем  $\Gamma_1$  лежит внутри  $\omega_1$ . Рассмотрим окружность, проходящую через точку касания  $\omega_1$  с  $\Gamma_1$  и точки пересечения  $\omega_2$  с  $\omega_3$  и две аналогичных окружности. Тогда эти три окружности пересекаются в двух точках (см. рис. 11).

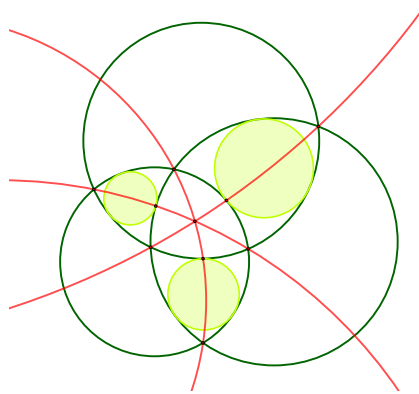


Рис. 11:

*Решение.* Как было замечено выше, эта задача эквивалентна следующей. Пусть  $ABC$  — треугольник на плоскости Лобачевского,  $A_1, B_1$  и  $C_1$  — точки касания вневписанных окружностей со сторонами. Тогда прямые  $AA_1, BB_1$  и  $CC_1$  пересекаются в одной точке.

*Замечание 2.* Вообще говоря, иногда вместо вневписанных окружностей нужно рассматривать эквидистанты или орициклы (подробнее см. [2]). Наше рассуждение не зависит от этого, поэтому для краткости мы будем говорить «вневписанные окружности», имея ввиду евклидовы окружности.

Это утверждение проще всего доказать с помощью неевклидовой *теоремы Чевы*: если выполнено соотношение

$$\frac{\text{sh}(AB_1)}{\text{sh}(B_1C)} \cdot \frac{\text{sh}(CA_1)}{\text{sh}(A_1B)} \cdot \frac{\text{sh}(BC_1)}{\text{sh}(C_1A)} = 1,$$

то прямые  $AA_1, BB_1$  и  $CC_1$  пересекаются в одной точке. Здесь  $\text{sh } x = (e^x - e^{-x})/2$  — гиперболический синус числа  $x$ ; подробнее см. [6].

Для того, чтобы применить неевклидову теорему Чевы, заметим, что  $AB_1 = BA_1, BC_1 = CB_1$  и  $CA_1 = AC_1$ .

**Упражнение 12.** Докажите эти равенства.

*Замечание 3.* Точно так же можно было бы решить и предыдущую задачу, сводящуюся к точке Жергонна. Однако в отличие от точки Жергонна для точки Нагеля нам неизвестно чисто геометрического доказательства, не использующего теорему Чевы.

## 5 Классические теоремы и модель Клейна

Теперь посмотрим, как работает в евклидовых задачах модель Клейна. Поскольку эта модель основана на проективной геометрии, неудивительно, что три задачи, о которых сейчас пойдет речь, также имеют проективную природу. Первые две задачи являются классическими и хорошо известными, а третья, возможно, не так популярна.

**Задача 6** (задача о бабочке). *Рассмотрим в окружности хорду  $AB$  и ее середину  $M$ . Проведем через точку  $M$  две хорды  $PQ$  и  $RS$ . Пусть прямые  $PR$  и  $QS$  пересекают хорду  $AB$  в точках  $C$  и  $D$  (см. рис. 12). Тогда  $CM = DM$ .*

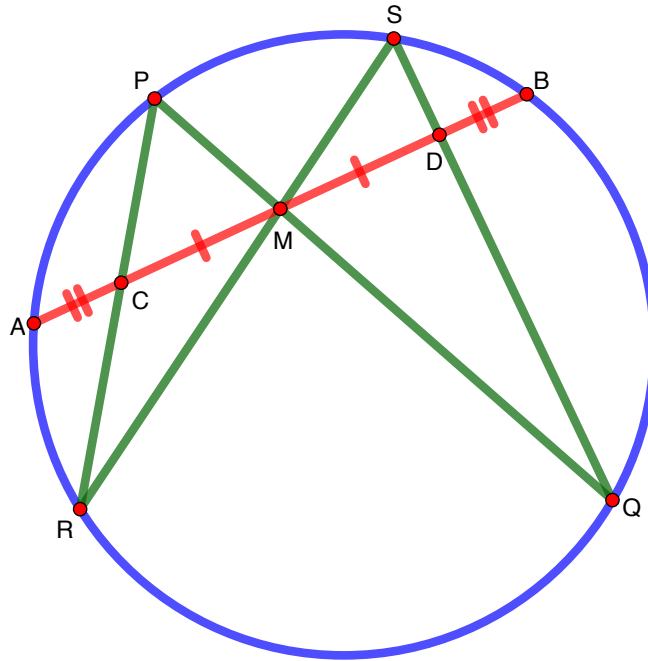


Рис. 12:

*Доказательство.* Хорошо известен проективный характер данной задачи, делающий чисто евклидовы решения, использующие подобные треугольники, равенства углов и т.д., весьма затруднительными. Оказывается, что этот проективный характер можно использовать для интерпретации данной задачи в модели Клейна геометрии Лобачевского.

Рассмотрим картинку с точки зрения модели Клейна. Применим центральную симметрию с центром в точке  $M$ . Ясно, что тогда прямая  $PR$  перейдет в прямую  $QS$ , а точка  $C$  перейдет в точку  $D$ . Получается, что *неевклидовы* длины отрезков  $CM$  и  $DM$  равны. Однако тогда эти отрезки симметричны относительно диаметра абсолюта, проходящего через  $M$ , а потому *евклидовы* длины этих отрезков также равны, что и требовалось доказать.  $\square$

Отметим идею связать пару пересекающихся хорд в окружности с центральной симметрией в модели Клейна относительно точки пересечения хорд. В следующей теореме это соображение будет использовано сразу три раза.

**Задача 7** (теорема Паскаля). *Рассмотрим шесть точек  $A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2$ , лежащие на одной окружности. Пусть  $P$  — точка пересечения прямых  $A_1B_2$  и  $A_2B_1$ ,  $Q$  — точка пересечения прямых  $B_1C_2$  и  $B_2C_1$ ,  $R$  — точка пересечения прямых  $C_1A_2$  и  $C_2A_1$ . Тогда точки  $P, Q, R$  лежат на одной прямой (см. рис. 13).*

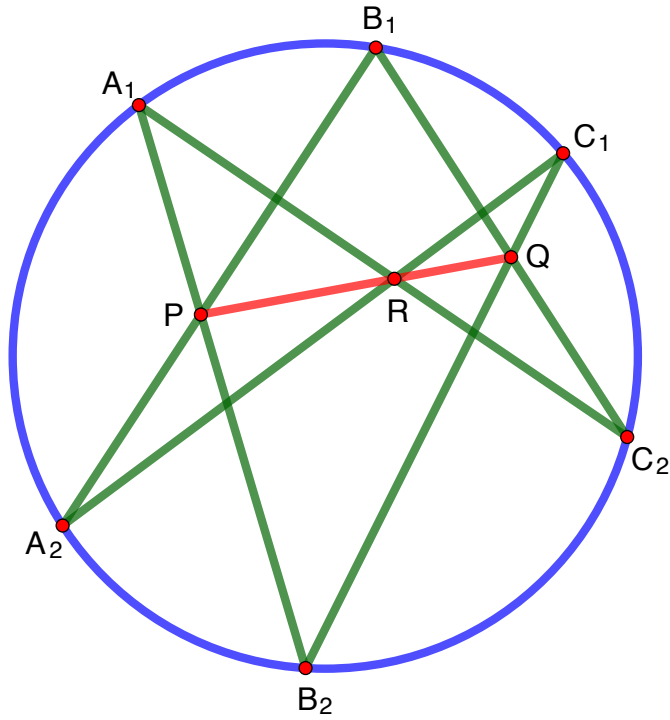


Рис. 13:

*Замечание 4.* Для удобства мы будем считать что точки  $P$ ,  $Q$  и  $R$  лежат внутри окружности, что достигается подходящим выбором положения точек  $A_i$ ,  $B_i$ ,  $C_i$  на окружности (см. рис. 13). Рассуждения можно обобщить и для произвольного положения точек, но для этого придется использовать так называемые *идеальные элементы*. Подробнее о них можно прочитать, например, в [1]. Заинтересованный читатель сможет восстановить необходимые детали доказательства для случая возникновения идеальных элементов.

*Доказательство.* Все рассуждения будем проводить в модели Клейна. Проведем прямую  $PQ$ , пересекающую прямые  $A_1A_2$ ,  $B_1B_2$  и  $C_1C_2$  в точках  $X$ ,  $Y$  и  $Z$  соответственно. Докажем, что  $\angle A_1XP = \angle C_2ZQ$ . Для этого рассмотрим композицию центральных симметрий  $Z_Q \circ Z_P$ . Ясно, что эта композиция переводит  $A_1$  в  $C_1$  и  $A_2$  в  $C_2$ . Кроме того, имеют место следующие равенства неевклидовых углов:

$$\angle A_1XP = \angle B_2YP = \angle B_1YQ = \angle C_2ZQ.$$

Теперь рассмотрим центральную симметрию  $Z_R$ , переводящую  $A_1A_2$  в  $C_1C_2$ . Поскольку  $\angle A_1XP = \angle C_2ZQ$ , несложно доказать, что точка  $R$  должна лежать на прямой  $PQ$ . В самом деле, существует единственная центральная симметрия, переводящая  $A_1A_2$  в  $C_1C_2$ , и ее центр — это с одной стороны точка  $R$ , а с другой — неевклидова середина отрезка  $PQ$ . Значит, точка  $R$  — это неевклидова середина отрезка  $PQ$ .  $\square$

Рассмотрим еще одну классическую (но, видимо, уже не широко известную) теорему.

**Теорема 1** (Фрежье). *Пусть дана коника и точка  $C$  на ней. Тогда хорды  $XU$  коники, которые видны из  $C$  под фиксированным (ориентированным) углом, огибают некоторую конику.*

*А. Акопян.* Пусть  $X$  — произвольная точка нашей коники. Тогда для нее существует единственная точка  $Y = f(X)$  на конике, такая, что ориентированный угол  $\angle XCY$  равен заданному. Легко видеть, что отображение  $f: X \mapsto Y$  является проективным.

Теперь проективным преобразованием переведем данную конику в окружность. Тогда проективное преобразование  $f$  перейдет в проективное преобразование окружности  $\tilde{f}$ . Продолжим его на плоскость и будем считать окружность абсолютной модели Клейна. В таком случае продолженное преобразование, которое мы также будем обозначать через  $\tilde{f}$ , будет собственным движением плоскости Лобачевского. Каждое из них является композицией двух осевых симметрий. В зависимости от расположения этих прямых существуют три типа собственных движений:

поворот (соответствующий пересекающимся прямым), орициклический поворот (соответствующий прямым, пересекающимся на абсолюте) и параллельный перенос (соответствующий расходящимся прямым). Несложно видеть, что поворот сохраняет концентрические окружности, орициклический поворот — орициклы, а параллельный перенос — эквидистанты. Поэтому в зависимости от типа движения  $\tilde{f}$ , все прямые  $X\tilde{f}(X)$  будут огибают окружность, орицикл или эквидистанту. Каждая из этих кривых является коникой, поэтому и ее прообраз также будет коникой, что и требовалось доказать.  $\square$

В заключение приведем решение следующей классической задачи.

**Задача 8.** Рассмотрим треугольник  $ABC$  и окружность  $\omega$ . Пусть  $A', B', C'$  — полюсы прямых  $BC, CA, AB$  относительно окружности  $\omega$ . Тогда прямые  $AA', BB', CC'$  пересекаются в одной точке (см. рис. 14).

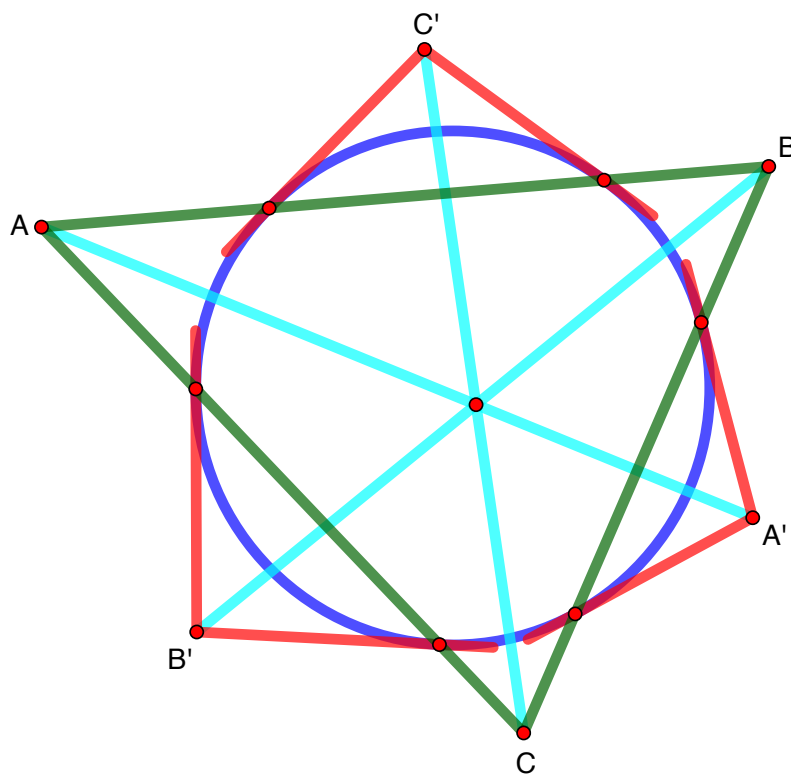


Рис. 14:

*Решение.* Снова посмотрим на нашу задачу через призму модели Клейна. Для определенности мы рассмотрим случай, когда треугольник  $ABC$  целиком лежит внутри окружности  $\omega$  (общий случай реализуется с помощью рассмотрения идеальных элементов; подробнее см. [1]). Тогда прямые  $AA', BB'$  и  $CC'$  — это высоты треугольника  $ABC$ .

**Упражнение 13.** Докажите это.

Таким образом, мы опять свели задачу к классической задаче пересечения высот неевклидова треугольника в одной точке. Легче всего это доказать, переместив треугольник таким образом, чтобы одна из его вершин совпала бы с центром абсолюта. Тогда неевклидовы высоты такого треугольника совпадут с евклидовыми, что и завершает решение задачи.

Мы завершим эту статью следующей задачей, представляющейся нам очень трудной.

**Задача 9.** Рассмотрим вписанно-описанный четырехугольник  $ABCD$ , вписанный в окружность с центром в  $O$ . Тогда центры  $I_{ab}, I_{bc}, I_{cd}$  и  $I_{da}$  вписанных окружностей треугольников  $OAB, OBC, OCD$  и  $ODA$  лежат на одной окружности (см. рис. 15).

Решение этой задачи, принадлежащее А.А. Заславскому, можно найти в [5].

## Список литературы

- [1] Арнольд В. И. Теорема о высотах треугольника в геометрии Лобачевского как тождество Якоби в алгебре Ли квадратичных форм на симплектической плоскости // Математическое просвещение. Сер. 3, вып. 9, 2005. С. 93–99.

- [2] Биби́ков П. В. *Описанные циклические линии треугольника в геометрии Лобачевского* // Математическое просвещение. Сер. 3, вып. 13, 2009. С. 142–148.
- [3] Гальперин Г. А.. *Бильярдная формула для измерения расстояний в геометрии Лобачевского* // Математическое просвещение. Сер. 3, вып. 8, 2004. С. 93–112.
- [4] Жижилкин И. Д. *Инверсия* // М.: МЦНМО, 2009.
- [5] Заславский А. А. *О вписанно-описанных четырехугольниках, моделях геометрии Лобачевского и «лемме Нилова»* // Математическое просвещение. Сер. 3, вып. 25, 2019. С. 163–166.
- [6] Прасолов В. В. *Геометрия Лобачевского* // М.: МЦНМО, 2004.
- [7] Прасолов В. В. *Задачи по планиметрии* // М.: МЦНМО, 2006.
- [8] Протасов В. Ю. *Выход в пространство – 2* // Квант, №1, 2018. С. 8–14.

Биби́ков Павел Витальевич  
учитель математики ГБОУ «Лицей «Вторая школа»;  
*e-mail*: [bibikov.pv@sch2.ru](mailto:bibikov.pv@sch2.ru)  
Фролов Иван Ильич  
студент факультета математики НИУ ВШЭ;  
*e-mail*: [frolov1999@yandex.ru](mailto:frolov1999@yandex.ru)

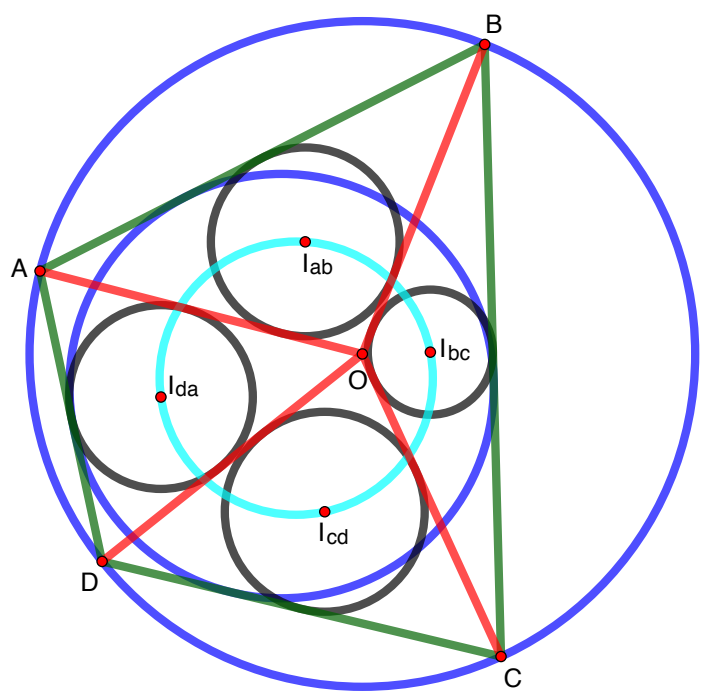


Рис. 15: