МАТЕРИАЛЫ
ЛЕТНЕЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ШКОЛЫ ЛИЦЕЯ «ВТОРАЯ ШКОЛА»

Оглавление

I 6 класс **8**

1. Первая неделя 8
2. Вторая неделя 19
3. Третья неделя 32

II 7 класс **43**

1. Первая неделя 43
2. Вторая неделя 68
3. Третья неделя 89

III 8 класс **107**

1. Первая неделя 107
2. Вторая неделя 119
3. Третья неделя 131

IV 9 класс **146**

1. Первая неделя 146
2. Вторая неделя 170
3. Третья неделя 187

V 10 класс **206**

1. Первая неделя 206
2. Вторая неделя 226
3. Третья неделя 241

Предисловие

Ежегодно в июле ученики лицея “Вторая школа” выезжают на три недели для того, чтобы заниматься математикой в Летней Математической Школе (ЛМШ). Каждый день — три пары по математике. Наши летние школы организуются при поддержке фонда Олега Дерипаски ”Вольное Дело”.

Вот уже три года Летняя Школа проводится на базе университета Иннополиса, города–наукограда и инновационного центра, расположенного недалеко от Волги и Свияжска в пригороде Казани. Школьники и преподаватели жили в комфортабельных комнатах университетского кампуса, занимались в аудиториях университета, а в свободное время посещали спорткомплекс с тренажерным залом и бассейном, играли в настольный теннис, футбол, баскетбол и волейбол на спортивных площадках, ездили на экскурсии и ходили в походы.

Цель Летней Школы — та математика, на которую не хватает времени и сил в учебном году. В рамках ЛМШ работа проводится в различных формах. Во-первых, подготовка к олимпиадам высокого уровня. Во-вторых,организация научно-исследовательской работы школьников. В-третьих, освоение тех разделов математики, которые очень важны для среднего математического образования, но не входят в программу даже профильных школ: цепные дроби и уравнение Пелля, квадратичные вычеты, нелинейные диофантовы уравнения, неевклидова и проективная геометрии, алгебраические и трансцендентные числа, разрешимость задач на построение циркулем и линейкой, элементы теории графов, наглядная топология и др.

В этом году состав участников ЛМШ сильно изменился по сравнению с прошлыми школами. Впервые в нашу Летнюю Школу приехали многие победители и призеры Всероссийских олимпиад (прежде всего по математике). Также было несколько учеников из других школ. Наконец, в числе участников летней школы было пять человек, входящих в состав кандидатов в сборную России на Международную математическую олимпиаду–2020 (которая, к слову, пройдет в городе Санкт-Петербург).

Это стало серьезным вызовом для нас как для преподавателей школы: сумеем ли мы обеспечить с одной стороны, высокий уровень материала, интересного таким сильным ученикам, а с другой — сохранить доступность этого

материала для подавляющего большинства заинтересованных школьников? Сейчас можно сказать, что с этой непростой задачей мы справились!

Для этого к работе в Летней Школе были приглашены выпускники Лицея «Вторая школа» — призеры и победители Всероссийских олимпиад (П.П. Евсеев, Е.А. Морозов, М.Ю. Дмитриева), а также тренеры сборной Москвы на Всероссийской олимпиаде (А.Б. Меньщиков, А.Ю. Кушнир, А.О. Герасименко). За каждой группой школьников были закреплены два куратора, один из которых был учителем Лицея, а другой — прилашенным олимпиадным тренером. Кураторы сформировали список тем, которые будут разобраны в Летней Школе, после чего эти темы были распределены между преподавателями. Это позволило, во-первых, соблюсти баланс между сложностью тем и их доступностью, во-вторых, дало возможность самим преподавателям пообщаться друг с другом и узнать что-то новое для себя, и в-третьих, посмотреть на опыт преподавания друг у друга, поскольку стили работы учителей в школе и тренеров на сборах сильно отличаются.

Кроме того, в Летнюю школу были приглашены крупные ученые-математики, которые прочитали школьникам лекции на интересные и красивые математические темы, а также провели семинарские занятия. В этом году приглашенными лекторами были член-корреспондент РАН А.А. Гайфуллин, федеральный профессор, д.ф.-м.н. А.Я. Канель-Белов, д.ф.-м.н., декан факультета математики ВШЭ В.А. Тиморин, д.ф.-м.н. В.А. Кириченко и к.ф.-м.н. В.А. Клепцын.

Занятия в Летней Школе проходили в формате, стандартном для олимпиадных кружков. В день у каждой группы было три пары; пары до обеда длились 2 часа, пара после обеда — 1,5 часа. Темами занятий в течение дня, как правило, были алгебра и теория чисел, геометрия и комбинаторика. На каждый листок в среднем тратилось два занятия: на первом занятии школьники в основном решали задачи, на втором занятии происходило дорешивание задач и разбор. Важно, что практически всегда у ребят оставалась воможность досдать нерешенные (и неразобранные) задачи после занятий (обычно после ужина) любому свободному преподавателю.

Для удобства фиксации сданных задач были использованы электронные таблицы, разработанные Ю.В. Тихоновым. Помимо того, что у каждого участника летней школы появилась возможность, во-первых, в любой момент посмотреть, сколько задач он сдал, во-вторых, посмотреть условия задач (листки можно прикреплять к соответствующей таблице), и в-третьих, сравнивать свои результаты с другими ребятами. Эти ведомости стали очень сильной мотивацией для ребят работать больше и не лениться на занятиях; никогда ранее участники Летних Школ не показывали такого энтузиазма в решении задач!

И это при том, что уровень задач в этой Летней Школе был существенно выше...

Отдельно необходимо отметить ребят, приехавших к Летнюю Школу с Летних Федеральных сборов (это один из этапов подготовки к Международной математической олимпиаде). Несмотря на то, что до этого они три недели также решали сложнейшие задачи, эти школьники и в Летней Школе демонстрировали очень высокие результаты. Специально для них был организован дубль Международной математической олимпиады – 2019, проходившей параллельно с Летней Школой в г. Бат (Великобритания) с 11 по 22 июля. Результаты оказались очень высокими: все ребята решили от 3 до 5 задач, и каждая задача была решена хотя бы двумя участниками.

Летняя математическая Школа – 2019 стала лучше в истории Второй школы. Мы уверены, что следующая Летняя Школа станет еще более яркой и интересной!

Состав преподавателей ЛМШ

Директор: А. И. Малахов
Заместитель директора по учебной работе: П. В. Бибиков
Заместитель директора по воспитательной работе: Е. Ю. Сошинская
Врач: Н. Д. Романова
Юрист: Е. В. Савичева

6 класс

Кураторы: В. В. Журавлева, А. Б. Меньщиков.
Преподаватели: А. А. Гайфуллин, М. Ю. Дмитриева, П. П. Евсеев, В. В. Журавлева, К. В. Козеренко, А. Б. Меньщиков.
Вожатые: П. П. Евсеев.

7 класс

Кураторы: М. Ю. Дмитриева, Э. Р. Мацонашвили, Г. К. Седов.
Преподаватели: Д. А. Байгушев, П. В. Бибиков, А. А. Гайфуллин, Н. В. Горюнова, С. А. Губанов, М. Ю. Дмитриева, А. Д. Добряков, П. П. Евсеев, К. В. Козеренко, А. Ю. Кушнир, Э. Р. Мацонашвили, Д. А. Михалин, Г. К. Седов.
Вожатые: С. А. Губанов.

8 класс

Кураторы: М. Ю. Дмитриева, Д. А. Михалин.
Преподаватели: Д. А. Байгушев, П. В. Бибиков, А. А. Гайфуллин, А. О. Герасименко, Н. В. Горюнова, С. А. Губанов, М. Ю. Дмитриева, А. Д. Добряков, П. П. Евсеев, К. В. Козеренко, Д. А. Михалин, Е. А. Морозов, Ф. В. Новиков.
Вожатые: Г. К. Седов, Э. Р. Мацонашвили.

9 класс

Кураторы: П. В. Бибиков, А. О. Герасименко, А. И. Малахов.

Преподаватели: Д. А. Байгушев, П. В. Бибиков, А. О. Герасименко, Н. В. Горюнова, С. А. Губанов, М. Ю. Дмитриева, К. В. Козеренко, А. Ю. Кушнир, А. И. Малахов, Е. А. Морозов, Ф. В. Новиков.

Вожатые: Д. А. Байгушев, Ф. В. Новиков.

10 класс

Кураторы: Д. А. Байгушев, А. Ю. Кушнир.

Преподаватели: Д. А. Байгушев, П.В. Бибиков, А. О. Герасименко, Н. В. Горюнова, М. Ю. Дмитриева, А. Д. Добряков, П. П. Евсеев, К. В. Козеренко, А. Ю. Кушнир, А. И. Малахов, А. Б. Меньщиков, Е. А. Морозов, Ф. В. Новиков, Г. К. Седов.

Вожатые: А. Д. Добряков, Н. В. Горюнова.

Глава I

6 класс

1. Первая неделя

Подсчет двумя способами

В. В. Журавлева, А. Б. Меньщиков

Задача 1. В каждой клетке прямоугольной таблицы стоит какое-то число. Сумма чисел в каждом столбце равна 200, а в каждой строке — 100. Сколько в таблице столбцов, если строк 8?

Задача 2. Можно ли расставить по кругу семь целых чисел так, чтобы сумма каких-то трёх расположенных подряд чисел была равна 1, каких-то трех расположенных подряд — 2, . . ., каких-то трех расположенных подряд — 7?

Задача 3. Клетчатый квадрат 9×9 разрезали на трёхклеточные уголки. Возле каждой из 100 вершин клеток написали, сколько уголков содержат эту вершину. Чему может быть равна сумма всех написанных чисел?

Задача 4. Слава закрасил в квадрате 6×6 несколько клеток. После этого оказалось, что во всех квадратиках 2×2 поровну закрашенных клеток, а также во всех полосках 1×3 поровну закрашенных клеток. Докажите, что старательный Слава закрасил все клетки.

Задача 5. Можно ли занумеровать ребра куба числами от 1 до 12 так, чтобы в каждой вершине сумма номеров входящих в неё рёбер была одна и та же?

Задача 6. В Банановой республике прошли выборы в парламент, в которых участвовали все жители. Все голосовавшие за партию «Мандарин» любят мандарины. Среди голосовавших за другие партии 90% не любят мандарины. Сколько процентов голосов набрала партия «Мандарин» на выборах, если ровно 46% жителей любят мандарины?

Задача 7. В конкурсе пения участвовали Петух, Ворона и Кукушка. Каждый член жюри проголосовал за одного из трёх исполнителей. Дятел подсчитал, что в жюри было 59 судей, причём за Петуха и Ворону было в сумме подано 15 голосов, за Ворону и Кукушку — 18 голосов, за Кукушку и Петуха — 20 голосов. Дятел считает плохо, но каждое из четырёх названных им чисел отличается от правильного не более чем на 13. Сколько судей проголосовали за Ворону?

Задача 8. В таблицу 10×10 записаны 100 чисел, сумма которых неотрицательна. Докажите, что можно переставить столбцы таблицы так, что сумма 10 чисел, расположенных по диагонали, идущей из левого нижнего угла в правый верхний, будет неотрицательна.

Задача 9. На каждом неграничном единичном отрезочке шахматной доски 8×8 написали число, равное количеству разбиений доски на доминошки, в которых этот отрезок лежит на границе доминошки. Какова последняя цифра суммы всех написанных чисел?

Введение переменной

В. В. Журавлева, А. Б. Меньщиков

Задача 1. Найдите восемь последовательных целых чисел, сумма первых трех из которых равняется сумме пяти последних.

Задача 2. «Во время игры в шахматы у меня осталось фигур в три раза меньше, чем у соперника, и в шесть раз меньше, чем

свободных клеток на доске, но все равно я выиграл эту партию!» — сказал Винтик Шпунтику. «А у меня в одной из партий фигур осталось в пять раз меньше, чем у соперника, и в десять раз меньше, чем свободных клеток на доске, и всё-таки я сумел победить!» — в свою очередь ответил Шпунтик. Чьему рассказу можно верить?

Задача 3. В каждой клетке квадрата 3×3 написано целое число. При этом сумма чисел в каждой строке (кроме первой) на 1 больше, чем в предыдущей, и сумма чисел в каждом столбце (кроме первого) в 4 раза больше, чем в предыдущем. Докажите, что сумма чисел во второй строке делится на 7.

Задача 4. Петя написал несколько различных натуральных чисел с суммой 100, используя всего лишь две цифры. Какое наибольшее количество чисел мог написать Петя?

Задача 5. Прямоугольник, у которого одна из сторон втрое длиннее другой, разрезали на одинаковые квадратики. Оказалось, что сумма их периметров в 6 раз больше периметра исходного прямоугольника. Сколько могло получиться квадратиков?

Задача 6. Вычислите

$$\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{3+\frac{1}{4+\frac{1}{5+\frac{1}{6+\frac{1}{100}}}}}}}+\frac{1}{2+\frac{1}{3+\frac{1}{4+\frac{1}{5+\frac{1}{6+\frac{1}{100}}}}}}.$$

Задача 7. В буфете продаётся мороженое (большое и маленькое). Сегодня три больших и одно маленькое стоят вместе столько же, сколько пять больших вчера. А два больших и одно маленькое сегодня стоят вместе столько же, сколько три больших и одно маленькое вчера. Можно ли по этим данным выяснить, что дороже: одно большое и два маленьких сегодня, или пять маленьких вчера?

Задача 8. В шахматном турнире участвовали 100 шахматистов,

причём каждый сыграл с каждым ровно по одной партии. Миша думал, что за победу даётся 1 очко, за ничью 0,5, а за поражение 0, и он набрал N очков. А на самом деле за них давалось 1, 0, -1 очко соответственно, и в реальности Миша набрал $\frac{N}{2}$ очков. Найдите N.

Разрезания

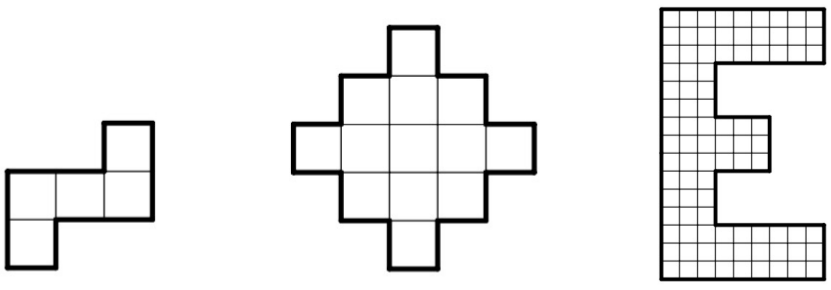
В. В. Журавлева, А. Б. Меньщиков

Задача 1. Разбейте какой-нибудь клетчатый квадрат на клетчатые квадратики так, чтобы не все квадратики были одинаковы, но квадратиков каждого размера было одно и то же количество.

Задача 2. Разрежьте по линиям сетки квадрат 5×5 с центральной вырезанной клеткой на четыре равные части. Придумайте 7 различных способов решения этой задачи.

Задача 3. Из фигурок пентамино, используя каждую по одному разу, сложите квадрат 8×8 с вырезанным посередине квадратом 2×2.

Задача 4. Разрежьте фигуру слева двумя прямолинейными разрезами на такие части, из которых можно сложить квадрат.



Задача 5. Разрежьте фигуру в центре на четыре равные части, из которых можно было бы сложить квадрат.

Задача 6. Разрежьте букву Е, изображенную выше справа, на четыре части и сложите из них квадрат. Части можно переворачивать.

Задача 7. Даны две шахматные доски: обыкновенная, в 64 клетки, и другая – в 36 клеток. Разрежьте каждую их них на две части так, чтобы из всех полученных четырёх частей можно было составить новую шахматную доску 10×10.

Задача 8. Придумайте два четырехугольника с вершинами в узлах сетки, из которых можно сложить и треугольник, и четырёхугольник, и пятиугольник.

Делимость

В. В. Журавлева, А. Б. Меньщиков

Задача 1. Использовав все цифры от 0 до 9 по одному разу, запишите 5 ненулевых чисел такие, что каждое следующее делится на предыдущее.

Задача 2. 109 яблок разложены по 20 пакетам. В некоторых пакетах лежит по n яблок, а во всех остальных — по 3 яблока. Найдите n.

Задача 3. Сумма трех различных наименьших делителей некоторого числа A равна 8. На сколько нулей может оканчиваться число A?

Задача 4. Докажите, что если $6a + 11b \vdots 31$, то и $a + 7b \vdots 31$.

Задача 5. Среди 13 последовательных натуральных чисел ровно семь четных и пять, делящихся на 3. Сколько среди них чисел, делящихся на 6?

Задача 6. Докажите, что квадрат натурального числа имеет нечетное количество натуральных делителей. Верно ли обратное: если у числа нечетное количество делителей, то обязательно ли оно является квадратом?

Задача 7. Сумма двух натуральных чисел равна 1001. Докажите, что произведение этих чисел не может делиться на 1001.

Задача 8. Числа от 1 до 37 записали в строку так, что сумма любых первых нескольких чисел делится на следующее за ними число. Какое число стоит на третьем месте, если на первом месте написано число 37, а на втором — 1?

Задача 9. По кругу записаны 77 натуральных чисел. Известно, что если у двух чисел есть общий сосед (т.е. между ними расположено ровно одно число), то одно из них делится на другое. Докажите, что среди этих чисел найдутся два, у которых нет общего соседа, но при этом одно из них делится на другое.

Задача 10. На доске написаны пять натуральных чисел. Оказалось, что сумма любых трёх из них делится на каждое из остальных. Обязательно ли среди этих чисел найдутся четыре равных?

Инвариант – 1

П. П. Евсеев

Задача 1. Вася написал на доске шесть чисел: 1, 2, 3, 4, 5 и 6. Каждую минуту он увеличивает два из них на единицу. Может ли Вася через некоторое время получить 6 равных чисел?

Задача 2. В вершинах куба расставлены числа: 7 нулей и одна единица. За один ход разрешается прибавить по единице к числам в концах любого ребра куба.

a) Можно ли добиться того, чтобы все числа стали равными?
b) А можно ли добиться того, чтобы все числа делились на 3?

Задача 3. 100 фишек выставлены в ряд. Разрешено менять местами две фишки, стоящие через одну фишку. Можно ли с помощью таких операций переставить все фишки в обратном порядке?

Задача 4. Клетки доски 10×10 покрашены в белый цвет. За один ход разрешается перекрасить все клетки квадрата 6×6

в противоположный цвет. Можно ли за конечное число ходов получить шахматную раскраску доски?

Задача 5. На острове Серобуромалин обитают 13 серых, 15 бурых и 17 малиновых хамелеонов. Если встречаются два хамелеона разного цвета, то они одновременно меняют свой цвет на третий (серый и бурый становятся оба малиновыми и т.п.). Может ли случиться так, что через некоторое время все хамелеоны будут одного цвета?

Задача 6. На доске 15×15 стоят 15 не бьющих друг друга ладей. Всех их передвинули ходом коня. Докажите, что какие-то две ладьи бьют друг друга

Задача 7. На клетке $a2$ стоит белый конь, на клетке $g8$ — черный конь. Кони ходят по очереди. На одном из ходов один из коней был съеден другим. Какой конь остался на доске?

Задача 8. Камни лежат в трёх кучках: в одной — 51 камень, в другой — 49 камней, а в третьей — 5 камней. Разрешается объединять любые кучки в одну, а также разделять кучку из чётного количества камней на две равные. Можно ли получить 105 кучек по одному камню в каждой?

Периметры и площади

В. В. Журавлева, А. Б. Меньщиков

Задача 1. Квадрат разрезали пополам и сложили из получившихся прямоугольников букву Т (без наложений). Найдите сторону квадрата, если периметр получившейся фигуры равен 120 см.

Задача 2. Большой прямоугольный зал покрыт полностью и без наложений семью квадратными коврами: одним большим красным, тремя одинаковыми синими и тремя одинаковыми зелеными. Три синих ковра лежат вплотную у одной из стен,

полностью её покрывая. Три зелёных ковра лежат вплотную у соседней стены, полностью покрывая её оставшуюся часть. Найдите площадь зала, если длина синего ковра равна 4 м.

Задача 3. Доску 8×8 разрезали по границам клеток на 10 прямоугольников. Докажите, что среди них найдется пара прямоугольников равного периметра.

Задача 4. В квадратную комнату внесли два квадратных ковра. Сторона одного из ковров в два раза больше стороны другого. Оказалось, что если положить ковры в противоположные углы комнаты, то они покроют в два слоя участок пола площадью 9 м^2. А если положить ковры в соседние углы комнаты, то в два слоя окажется покрыт участок площадью 15 м^2. Сколько метров составляет сторона комнаты?

Задача 5. Большой прямоугольник разрезали на 4 меньших прямоугольника двумя перпендикулярными разрезами. Периметры трёх из них равны 3 см, 4 см и 5 см. Чему может быть равен периметр исходного прямоугольника?

Задача 6. Петя нарисовал два пересекающихся прямоугольника в форме креста. Вася заметил, что получилось 5 прямоугольников одинаковой площади (один в центре и четыре по бокам). Докажите, что эти 5 прямоугольников имеют равные периметры.

Задача 7. Клетчатый квадрат 18×18 разрезали на 18 прямоугольников по границам клеток. Один из них отложили, а из остальных составили

a) квадрат 10×10; b) прямоугольник с периметром 234.

Найдите размеры отложенного прямоугольника.

Задача 8. Клетчатый квадрат 17×17 разрезали на несколько прямоугольников по границам клеток. Докажите, что среди них найдётся прямоугольник, периметр которого кратен 4.

Игры – 1

А. А. Гайфуллин

Задача 1. В левом нижнем углу шахматной доски стоит ферзь. Петя и Вася ходят им по очереди; начинает Петя. Запрещено ставить ферзя на поле, на котором он уже побывал. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выиграет при правильной игре?

Задача 2. Та же задача, только вместо ферзя — ладья.

Задача 3. Задача 1, только поле не 8×8, а 9×9.

Задача 4. Задача 2, только поле не 8×8, а 9×9.

Задача 5. В левом нижнем углу шахматной доски стоит ладья. Петя и Вася ходят ей по очереди; начинает Петя. Ладье разрешается ходить только вправо или вверх. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выиграет при правильной игре?

Задача 6. В левом нижнем углу шахматной доски стоит хромая ладья. Петя и Вася ходят ей по очереди; начинает Петя. Ладье разрешается ходить только вправо или вверх, причем вверх — не более, чем на 2 поля. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выиграет при правильной игре?

Задача 7. На поле c1 шахматной доски стоит ферзь. Петя и Вася ходят им по очереди; начинает Петя. Ферзю разрешается ходить только вправо, вверх и по диагонали вправо-вверх. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выиграет при правильной игре?

Задача 8. На столе лежат две кучки камней, в одной 100 камней, а в другой 50. Петя и Вася ходят по очереди; за один ход можно взять любое число камней из одной из кучек (ничего не брать нельзя!). Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выиграет при правильной игре?

Задача 9. На столе лежат две кучки камней, в одной 100 камней, а в другой 50. Петя и Вася ходят по очереди; за один ход

можно взять любое число камней из одной из кучек. Каждый игрок имеет право не более чем два раза за всю игру пропустить свой ход. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выиграет при правильной игре?

Задача 10. В крайнем левом поле горизонтальной клетчатой полоски 1×100 стоит фишка. Петя и Вася ходят ей по очереди. За один ход можно передвинуть фишку на 1, 2 или 3 клетки вправо. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выиграет при правильной игре?

Задача 11. Та же игра, но теперь выигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выиграет при правильной игре?

Задача 12. Задача 1 для слона (вместо ферзя) на доске 10×10, первоначально стоящего в углу.

Задача 13. Задача 1 для слона (вместо ферзя) на доске 9×9, первоначально стоящего в углу.

Задача 14. На столе лежат три кучки камней, в одной 100 камней, в другой 50, а в третьей — 3 камня. Петя и Вася ходят по очереди; за один ход можно взять любое число камней из одной из кучек. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выиграет при правильной игре?

Основная теорема арифметики

В. В. Журавлева, А. Б. Меньщиков

Основная теорема арифметики. Каждое натуральное число $N > 1$ может быть разложено в произведение простых чисел $N = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}$, и это разложение единственно с точностью до порядка множителей. Такое разложение называется *каноническим.*

Задача 1. Перемножили несколько натуральных чисел и получили 224, причём самое маленькое число вдвое меньше самого большого. Сколько чисел перемножили?

Задача 2. Расставьте в вершинах куба натуральные числа так, чтобы в каждых двух вершинах, соединённых ребром, стояли числа не взаимно простые, а в каждых двух вершинах, не соединённых ребром, — взаимно простые.

Задача 3. На доске записаны числа 20 и 100. Разрешается дописать на доску произведение любых двух имеющихся на ней чисел. Можно ли такими операциями получить на доске число $500\ldots0$ (2019 нулей)?

Задача 4. Числа от 1 до 10 разбили на две группы так, что произведение чисел в первой группе делится на произведение чисел во второй. Какое наименьшее значение может быть у частного от деления первого произведения на второе?

Задача 5. Виктория Владимировна записала равенство

$$\text{МА}\cdot\text{ТЕ}\cdot\text{МА}\cdot\text{ТИ}\cdot\text{КА} = 2016000$$

и предложила Андрею Борисовичу заменить одинаковые буквы одинаковыми цифрами, разные буквы — разными цифрами, чтобы равенство стало верным. Есть ли у Андрея Борисовича шанс выполнить задание?

Задача 6. Какое наибольшее количество натуральных чисел, не превосходящих 2019, можно отметить так, чтобы произведение любых двух отмеченных чисел было точным квадратом?

Инвариант – 2

П. П. Евсеев

Задача 1. На доске написаны числа 3, 4, 5. За один ход из чисел a и b разрешается сделать или числа $\frac{3a+b}{4}$ и $\frac{a+3b}{4}$, или же числа $\frac{4a+3b}{5}$ и $\frac{a+2b}{5}$. Можно ли получить числа 5, 6, 7?

Задача 2. В таблице $n \times n$ (где $n > 2$) изначально в черный цвет покрашена одна клетка, соседняя по стороне с угловой, остальные — в белый. За операцию разрешается перекрасить в

противоположный цвет все клетки любого столбца или все клетки любой строки. Можно ли такими операциями закрасить всю доску черным цветом,

a) если n — четное;
b) если n — нечетное;
c) если $n = 4$ и разрешается перекрашивать клетки любой диагонали в противоположный цвет (не обязательно главной)?

Задача 3. 18 школьников стоят по кругу и на каждом из них сидит оса. За один ход две осы перелетают на соседних школьников — одна по часовой стрелке, другая против. Могут ли все осы собраться на одном школьнике?

Задача 4. За один ход из чисел a и b можно сделать число $a + b + ab$. На доске выписаны числа 1, 2, 3, ..., 20. Какое число останется на доске после 19 таких операций?

2. Вторая неделя

Оценка + пример

В. В. Журавлева, А. Б. Меньщиков

Задача 1. В ряд выложены апельсины, бананы, яблоки и груши так, что все четыре вида фруктов представлены и представители любых двух видов где-то лежат рядом. Какое наименьшее количество фруктов могло быть выложено?

Задача 2. В какое наибольшее количество цветов можно покрасить клетки доски 8×8 так, чтобы каждая клетка граничила по стороне хотя бы с 2 клетками того же цвета?

Задача 3. На какое наибольшее количество различных прямоугольников можно разрезать по линиям сетки клетчатый прямоугольник 5×6?

Задача 4. На большой праздничной вечеринке собрались 30 людоедов, которые постепенно поедают друг друга. Людоед считается *сытым*, если он съел не менее трёх других людоедов. Какое наибольшее число людоедов могло насытиться?

Задача 5. a) Какое наибольшее количество ладей можно расставить на шахматной доске так, чтобы они не били друг друга? b) А королей? c) А слонов? d) А коней?

Задача 6. Вокруг круглого стола стоит 30 стульев, на некоторых из них сидят гномы. Оказалось, что Белоснежка не может сесть так, чтобы рядом с ней никто не сидел. Какое наименьшее число гномов может быть за столом?

Задача 7. Какое наименьшее количество доминошек надо закрасить в доске 100×100, чтобы в каждой строке и в каждом столбце была хотя бы одна закрашенная клетка?

Задача 8. Какое наибольшее количество натуральных чисел, меньших 50, можно выбрать так, чтобы любые два были взаимно просты?

Задача 9. Какое наименьшее количество выстрелов необходимо сделать в игре «Морской бой» на поле 10×10, чтобы точно ранить невидимый корабль a) 1×4; b) 1×3?

Задача 10. Том Сойер взялся покрасить очень длинный забор, соблюдая условия: любые две доски, между которыми ровно 2, ровно 3 или ровно 5 досок, должны быть окрашены в разные цвета. Какое наименьшее количество красок потребуется Тому?

Задача 11. Какое наименьшее количество клеток необходимо закрасить в клетчатом квадрате 12×12, чтобы не нашлось ни одного незакрашенного уголка из трёх клеток?

Задача 12. Какое наибольшее количество двухпалубных кораблей можно расставить на поле 10×10 для «Морского боя»? (Корабли не могут соприкасаться друг с другом даже по точке.)

Задача 13. Клетчатый квадрат 10×10 хотят покрыть квадрата-

ми 3×3 по линиям сетки. Каким наименьшим числом квадратов 3×3 можно обойтись?

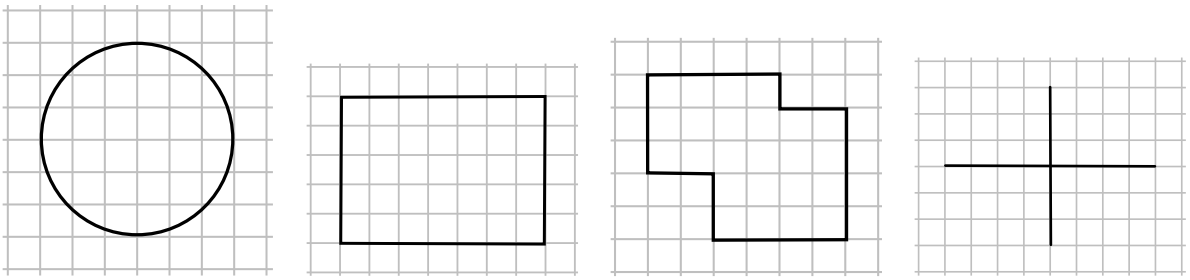
Задача 14. Какое наибольшее количество пятиклеточных крестов можно вырезать из клетчатого квадрата 8×8 по линиям сетки?

Голодная коза

В. В. Журавлева, А. Б. Меньщиков

Козы прожорливы и съедают всё, до чего могут дотянуться. Поэтому их держат на привязи.

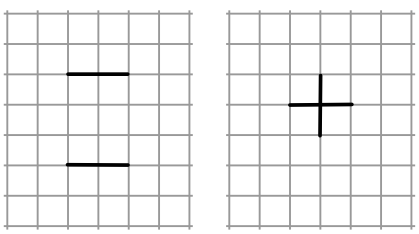
Задача 1. Математик прогуливался по лугу, держа козу на поводке длины 1. Нарисуйте участок, на котором могла побывать при этом коза, не обрывая поводка, если путь математика имел вид:



А Б В Г

Задача 2. Нарисуйте участок луга, который выест коза, привязанная двумя веревками к двум колышкам, если колышки находятся на расстоянии 3 метра друг от друга, а длины веревок 5 метров и 7 метров соответственно.

Задача 3. Нарисуйте участок луга, который выест коза, привязанная двумя веревками длиной 2 метра к двум горизонтальным палкам, вдоль которых свободно передвигается веревка, если палки расположены следующим образом:



А Б

Задача 4. Привязывать козу можно либо к колышкам, либо к горизонтальным палкам, вдоль которых свободно передвигается веревка. Как привязать с помощью веревок козу так, чтобы она съела всю траву на участке в форме a) полукруга; b) прямоугольника; c) фигуры на рисунке 1; d) фигуры на рисунке 2; e) правильного треугольника; f) правильного шестиугольника.

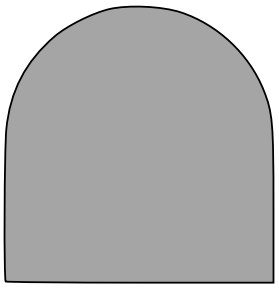


Рис. 1

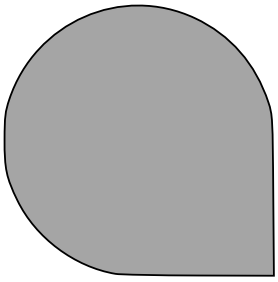


Рис. 2

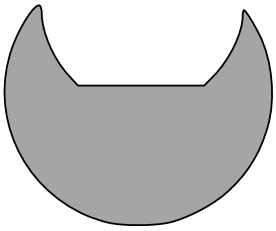


Рис. 3

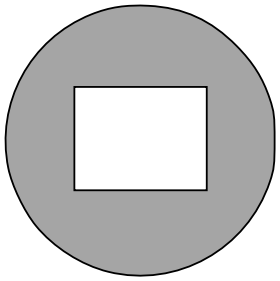


Рис. 4

Задача 5. Коза привязана к одиноко стоящему на лугу колышку. Введём дополнительно в действие собаку, которую будем привязывать к колышкам или к горизонтальным палкам, и она будет мешать козе есть. Как этой собакой удержать козу a) в кольце; b) в полукруге; c) в фигуре на рисунке 3; d) в фигуре на рисунке 4?

Количество делителей

В. В. Журавлева, А. Б. Меньщиков

Везде рассматриваются только натуральные делители.

Идея. Делители числа иногда полезно разбивать на пары.

Воспоминание. Натуральное число имеет нечетное количество делителей тогда и только тогда, когда оно является точным квадратом.

Задача 1. У числа M 100 делителей. Найдите их произведение. (Ответ выразите через M.)

Задача 2. Сколько делителей у числа a) 101; b) 24; c) 1001; d) $11^4 \cdot 3^2 \cdot 23$?

Задача 3. Докажите, что у числа $p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}$ (где p_i — различные простые числа) ровно $(\alpha_1 + 1) \cdot (\alpha_2 + 1) \cdot \ldots \cdot (\alpha_k + 1)$ делителей.

Замечание. Теперь, зная разложение числа на простые множители, легко вычислить количество его делителей.

Задача 4. У числа N^2 99 делителей. Сколько может быть делителей у N?

Задача 5. У скольких натуральных чисел, не превосходящих 300, ровно 9 делителей?

Задача 6. Каких делителей у числа 900900 больше: больших 1000 или меньших 1000?

Задача 7. Натуральное число делится на 11, но не делится на 121. Докажите, что сумма всех его делителей делится на 3.

Задача 8. Найдите все натуральные числа, делящиеся на 30, у которых ровно 30 делителей.

Задача 9. У натурального числа ровно 73 делителя. Докажите, что в нем хотя бы 22 цифры.

Игры – 2

А. А. Гайфуллин

Задача 1. Под елкой лежат 2012 шишек. Винни-Пух и ослик Иа-Иа играют в игру: по очереди берут себе шишки. Своим ходом Винни-Пух берет одну или четыре шишки, а Иа-Иа — одну или три. Первым ходит Пух. Проигравшим считается тот, у кого нет хода. Кто из игроков сможет гарантированно победить, как бы ни играл соперник?

Задача 2. Два игрока по очереди ставят фишки на клетки доски 101×101. Первый может поставить очередную фишку на любую свободную клетку, для которой количество фишек, уже стоящих в столбце и строке, содержащих эту клетку, чётно. Второй может

поставить очередную фишку на любую свободную клетку, для которой это количество нечётно. Проигрывает тот, у кого нет хода. Кто выиграет?

Задача 3. Белая ладья преследует чёрного коня на доске 3×1969 клеток (они ходят по очереди по обычным правилам). Первоначально ладья стоит в левом нижнем углу, а конь — в правом верхнем. Как должна играть ладья, чтобы взять коня? Первый ход делают белые.

Задача 4. У Пети и Васи есть куча из 2010 монет. Они делают ходы по очереди; начинает Петя. За ход каждый из них может выбрать несколько куч (возможно, одну) и разделить каждую из выбранных куч на две меньших (выбирать кучу из одной монеты нельзя). Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выиграет при правильной игре?

Задача 5. Почтальон Печкин не хотел отдавать посылку. Тогда Матроскин предложил ему сыграть в следующую игру. Печкин выписывает в строку слева направо цифры, произвольно чередуя 0 и 1, пока цифр не станет всего 1111. Каждый раз после того, как Печкин выписал очередную цифру, Матроскин меняет между собой две цифры из уже написанного ряда (когда написана только одна цифра, Матроскин пропускает ход). Если в итоге окажется, что записанное слово является палиндромом (то есть одинаково читается слева направо и справа налево), то Печкин отдает посылку. Сможет ли Матроскин играть так, чтобы обязательно получить посылку?

Задача 6. На доске написаны числа 50 и 72. За ход разрешается дописать еще одно натуральное число — разность любых двух имеющихся на доске чисел, если она еще не встречалась. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выиграет при правильной игре?

Задача 7. В ряд записано число 1, а после него в некотором порядке всевозможные правильные несократимые дроби, знаме-

натели которых не больше ста. Маша и Света ставят знаки «+» или «−» перед любой дробью, перед которой знак еще не стоит. Они делают это по очереди, но известно, что Маше придётся сделать последний ход и вычислить результат действий. Если он получится целым, то Света даст ей шоколадку. Сможет ли Маша получить шоколадку независимо от действий Светы?

Задача 8. Петя и Вася играют на доске размером 7×7. Они по очереди ставят в клетки доски цифры от 1 до 7 так, чтобы ни в одной строке и ни в одном столбце не оказалось одинаковых цифр. Первым ходит Петя. Проигрывает тот, кто не сможет сделать ход. Кто из них сможет выиграть, как бы ни играл соперник?

НОД и НОК

В. В. Журавлева, А. Б. Меньщиков

Определение. НОД(a, b) (или просто (a, b)) — это наибольший общий делитель чисел a и b. НОК(a, b) (или просто $[a, b]$) — это наименьшее общее кратное чисел a и b.

Вопрос. Как по разложению двух чисел на простые множители найти их НОД и НОК?

Свойства НОД.

1. $a \cdot (m, n) = (am, an)$.
2. Если $(m, n) = d$, то $(\frac{m}{d}, \frac{n}{d}) = 1$.
3. $(a, b) = (a \pm b, b) = (a \pm kb, b)$.
4. Если $a - r \vdots b$, то $(a, b) = (r, b)$.

Задача 1. Найдите (728, 273), (9936, 3311), (65002, 1621), $(1000!, 2017^{2019})$.

Задача 2. Среди пяти натуральных чисел любые четыре имеют общий делитель, больший 1. Обязательно ли все числа имеют общий делитель, больший 1?

Задача 3. Докажите, что для любых натуральных m и n верно $(m, n) \cdot [m, n] = m \cdot n$.

Задача 4. Степа посчитал НОК всех чисел от 1 до 1000, а Вика — всех чисел от 501 до 1000. У кого получилось больше и во сколько раз?

a) Докажите, что $(5a + 3b, 13a + 8b) = (a, b)$.
b) Какие значения может принимать $(3n + 2, 10n + 23)$?
c) На какие числа может быть сократима дробь $\frac{13n+8}{8n+3}$?

Задача 5. Найдите $(16! - 30, 15! - 30)$.

Задача 6. Найдите НОД всех шестизначных чисел, составленных из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6 без повторений.

Задача 7. Натуральные числа a и b таковы, что $[a, a + 5] = [b, b + 5]$. Докажите, что $a = b$.

Задача 8. Пусть m и n — целые взаимно простые числа. Найдите наибольшее возможное значение выражения $(m + 2019n, n + 2019m)$.

Задача 9. Взаимно простые натуральные числа a и b таковы, что $a + b$ делится на $a - b$. Докажите, что хотя бы одно из чисел $ab + 1$ и $4ab + 1$ является точным квадратом.

Считать – не считая

П. П. Евсеев

Задача 1. Назовем билет счастливым, если его сумма цифр на на первых трех равна сумме на последних трех. А счастливым по-ленинградски, если сумма на четных равна сумме на нечетных местах.

a) Каких билетов больше: счастливых или счастливых по-леннградски?

b) Каких билетов больше: с суммой цифр 24 или 30?
c) Каких билетов больше: счастливых или с суммой цифр 27?

Задача 2. Вася считает все пути хромой ладьи из левого нижнего угла в правый верхний. А Петя записывает все последовательности длины 14, где 0 и 1 одинаковое количество. Докажите, что у них получатся одинаковые числа.

Задача 3. На окружности отмечены 2019 красных и 1 синяя точка.

a) Определите, каких многоугольников больше: тех, у которых все вершины красные, или тех, у которых одна из вершин синяя?
b) Определите, каких многоугольников больше: красных треугольников или разноцветных четырехугольников?

Задача 4. Двое бросают монетку один 1000 раз, другой — 1001. Какая вероятность, что у первого орлов меньше чем у второго?

Задача 5. В городе Иннополисе проводилось два соцопроса. Вася просто посчитал количество жителей в городе. Пете же сначала посчитал, в каком количестве квартир живет хотя бы 1 человек, потом в каких хотя бы 2 и т.д. и получившиеся числа сложил. У кого из них число получилось больше?

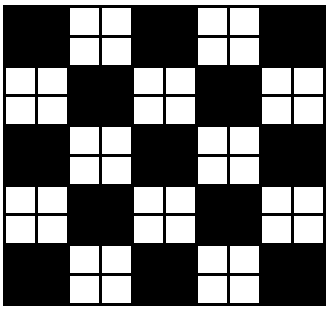
Задача 6. В городе Судиславль живут 2020 мужчин и 2019 женщин. Сколько существует способов выбрать из них тех, кому подарят подарки на день города, если мэр хочет, чтобы среди них мужчин было больше, чем женщин?

Раскраски

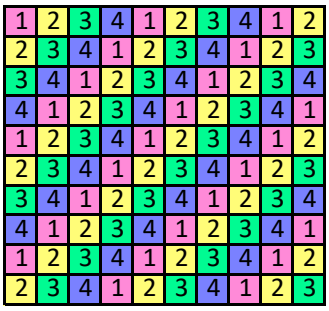
В. В. Журавлева, А. Б. Меньщиков

Задача 1. Докажите, что клетчатую доску 10×10 нельзя разрезать по линиям сетки на прямоугольники 1×4. Придумайте

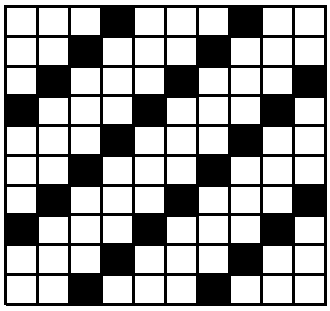
a



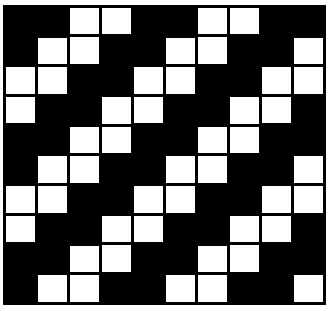
b



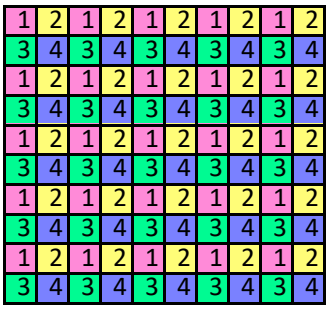
c



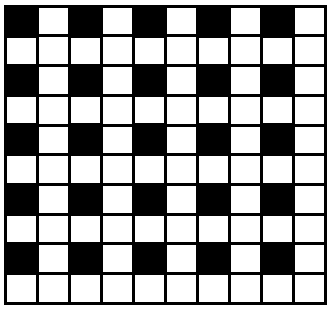
d



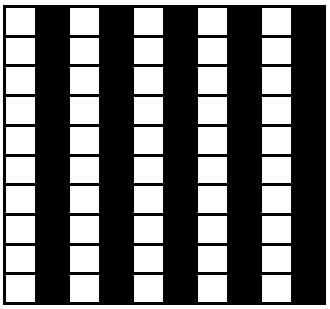
e



f

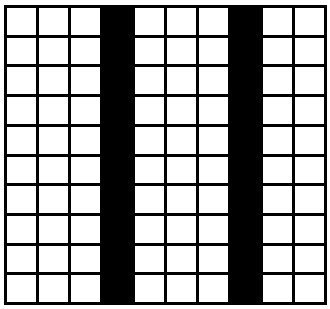


g

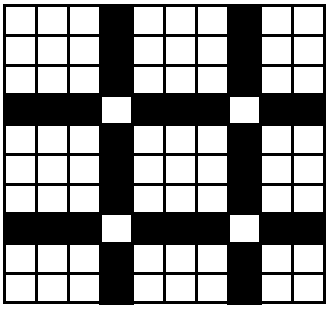


h

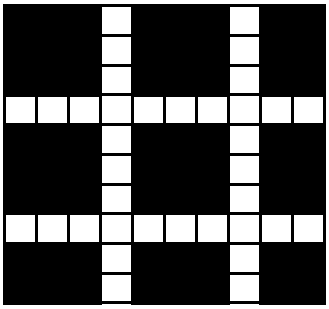
i



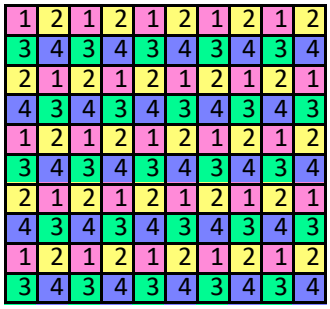
j



k



l



12 разных решений, используя раскраски на дополнительном листе. Для каждого решения можно использовать только одну раскраску (при необходимости её можно поворачивать).

Задача 2. Квадрат 7×7 покрыт 16 плитками 3×1 и 1 плиткой 1×1. Где может находиться плитка 1×1?

Задача 3. Из листа клетчатой бумаги 29×29 вырезали 99 квадратиков 2×2 по линиям сетки. Докажите, что из оставшейся части листа можно вырезать ещё такой же квадратик.

Задача 4. На каждую клетку шахматной доски 9×9 сел один жук. Затем одновременно все жуки переместились на соседнюю по диагонали клетку (несколько жуков могут попасть на одну и ту же клетку). Найдите наименьшее возможное количество пустых клеток.

Задача 5. Прямоугольный пол в комнате покрыт несколькими коврами 2×2 и 1×4 (без наложений). Кот Снежок утащил один ковер. Вместо него купили ковер другого из двух имеющихся видов. Докажите, что покрыть всеми имеющимися коврами пол в комнате без наложений не получится.

Задача 6. Можно ли уложить 250 полосок $1 \times 1 \times 4$ в коробку $10 \times 10 \times 10$?

Постепенное конструирование

П. П. Евсеев

Задача 1. Ханойская башня является одной из популярных головоломок XIX века. Даны три стержня, на один из которых нанизаны n колец, причём кольца отличаются размером и лежат меньшее на большем. Задача состоит в том, чтобы перенести пирамиду из n колец на другой стержень. За один раз разрешается переносить только одно кольцо, причём нельзя класть большее кольцо на меньшее. Решите эту головоломку для a) $n = 3$, b) $n = 5$, c) $n = 8$.

Задача 2. Найдите в последовательности 2, 6, 12, 20, 30, ...число, стоящее a) на 6-м; b) на 2019-м месте.

Задача 3.

a) Придумайте 3 различных натуральных числа, чтобы каждое делило сумму остальных.
b) То же, но все числа больше 100.
c) Как в пункте a), но 4 числа.
d) Как в пункте a), но 10 чисел.

Задача 4. Разрежьте квадрат на n меньших квадратов (не обязательно одинаковых) a) $n = 4$, b) $n = 7$, c) $n = 10$. d) Можно ли разрезать квадрат на 100 меньших?

Задача 5. Давным-давно в СССР имелись в обращении 3-копеечные и 5-копеечные монеты. Докажите, что можно было набрать любую сумму более 7 копеек только такими монетами.

Задача 6. На плоскости нарисованы 6 различных прямых. Можно ли раскрасить получившиеся части плоскости в два цвета, чтобы области одного цвета не граничили по отрезку прямой?

Задача 7. Маляр может за один ход перейти на соседнюю по стороне клетку шахматной доски, после этого он должен перекрасить ее в противоположный цвет. Маляр ставится на угловую клетку доски, где все клетки белые. Докажите, что он может покрасить доску в шахматном порядке.

Задача 8. Представьте число 1 в виде суммы десяти различных дробей с числителем 1.

Десятичная запись

В. В. Журавлева, А. Б. Меньщиков

Десятичную запись числа A будем записывать так: $\overline{x_n x_{n-1} \dots x_2 x_1 x_0}$. Цифра x_0 обозначает число единиц числа A, цифра x_1 — чис-

ло десятков, x_2 — число сотен и т.д. Выполнено равенство $A = x_0 + 10 \cdot x_1 + 10^2 \cdot x_2 + 10^3 \cdot x_3 + \ldots + 10^{n-1} \cdot x_{n-1} + 10^n \cdot x_n$. Сумму цифр числа A будем обозначать $S(A)$.

Признаки делимости. Число A имеет десятичную запись $\overline{x_n x_{n-1} \ldots x_2 x_1 x_0}$.

a) $A \vdots 2 \Leftrightarrow x_0 \vdots 2$; b) $A \vdots 5 \Leftrightarrow x_0 \vdots 5$; c) $A \vdots 3 \Leftrightarrow S(A) \vdots 3$; d) $A \vdots 9 \Leftrightarrow S(A) \vdots 9$; e) $A \vdots 4 \Leftrightarrow \overline{x_1 x_0} \vdots 4$; f) $A \vdots 25 \Leftrightarrow \overline{x_1 x_0} \vdots 25$; g) $A \vdots 8 \Leftrightarrow \overline{x_2 x_1 x_0} \vdots 8$.

Задача 1. Трехзначное число начинается с цифры 4. Если ее перенести в конец, получится число, составляющее 3/4 от исходного. Найдите исходное число.

Задача 2. У числа N зачеркнули последнюю цифру, от чего оно уменьшилось на 2019. Найдите N.

Задача 3. Найдите все натуральные числа, которые увеличиваются в 9 раз, если между цифрой единиц и цифрой десятков вставить ноль.

Задача 4. Докажите, что произведение цифр числа, большего 9, меньше него самого.

Задача 5. Перед первой цифрой числа поставим плюс, перед второй минус, перед третьей плюс, перед четвёртой минус, и т.д. — значение получившегося выражения назовём *знакопеременной суммой цифр числа*. Докажите, что число делится на 11 тогда и только тогда, когда его знакопеременная сумма цифр делится на 11.

Задача 6. Шестизначное число кратно 7. Докажите, что если его последнюю цифру переставить в начало, то полученное число тоже кратно 7.

Задача 7. Если в трехзначном числе с различными ненулевыми цифрами сложить все возможные двузначные числа, образованные из цифр этого числа, то получится число вдвое больше исходного. Что это могло быть за число?

Задача 8. Петя задумал 4 ненулевые цифры. Он составил из них

два четырехзначных числа: самое большое и самое маленькое из возможных. Сумма получившихся чисел оказалась равна 11990. Что за цифры задумал Петя?

Задача 9. Найдите все двузначные числа, квадрат которых равен кубу суммы их цифр.

Задача 10. В числе N каждая следующая цифра больше предыдущей. Какая сумма цифр может быть у числа $9 \cdot N$?

3. Третья неделя

Олимпиада

В. В. Журавлева, А. Б. Меньщиков

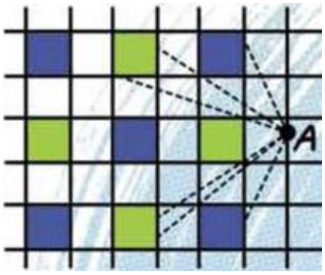
Задача 1. В комнате находится 30 человек. Девятнадцати из них не менее 19 лет, а двадцати из них менее 20 лет. Скольким людям в комнате ровно 19 лет?

Задача 2. Докажите, что числа от 1 до 16 можно записать в строчку, но нельзя записать по кругу так, чтобы сумма любых двух соседних чисел была точным квадратом.

Задача 3. Если Г·АМ·МА = 2015, а Ш·АШ·КА = 2016, найдите, чему равно К·АШ·КА. Укажите все возможные варианты и докажите, что нет других. (Одинаковым буквам соответствуют одинаковые цифры, а разным — разные.)

Задача 4. На острове рыцарей и лжецов (рыцари всегда говорят правду, лжецы всегда лгут) за круглый стол сели 2019 человек. Каждый заявил, что среди половины остальных, сидящей от него справа, лжецов столько же, сколько рыцарей среди половины остальных, сидящей от него слева. Сколько могло быть рыцарей за столом?

Задача 5. На листке клетчатой бумаги нарисованы 9 квадратиков, как на рисунке справа. Из точки A на рисунке можно «увидеть» (хотя бы частично) лишь пять из девяти квадратов — остальные четыре квадрата целиком загорожены этими пятью. А какое наибольшее число квадратов из этих девяти можно увидеть, выбирая другую точку обзора на той же плоскости листа бумаги?



Задача 6. Имеется пять монет: легкие и тяжелые (оба типа присутствуют). Как за три взвешивания на чашечных весах без гирь выяснить, каких монет больше: легких или тяжёлых? Определять точное количество монет каждого типа не нужно. Однотипные монеты весят одинаково.

Признаки делимости

В. В. Журавлева, А. Б. Меньщиков

Задача 1. На экране компьютера — число 141. Каждую секунду компьютер перемножает все цифры числа на экране, полученное произведение либо прибавляет к этому числу, либо вычитает из него, а результат появляется на экране вместо исходного числа. Появится ли ещё когда-нибудь на экране число 141?

Задача 2. Арина попросила Славу выписать все девятизначные числа, составленные из различных цифр. Слава забыл, как пишется цифра 7, поэтому записал только те девятизначные числа, в которых этой цифры нет. Затем Арина предложила ему вычеркнуть из каждого числа по шесть цифр так, чтобы оставшееся трёхзначное число было простым. Слава тут же заявил, что это возможно не для всех записанных чисел. Прав ли он?

Задача 3. Из натурального числа вычли сумму его цифр, а затем у полученной разности вычеркнули одну цифру. Сумма

оставшихся цифр разности равна 131. Какую цифру вычеркнули?

Задача 4. В клетки таблицы 100×100 записаны ненулевые цифры. Оказалось, что все 100 стозначных чисел, записанных по горизонтали, делятся на 11. Могло ли так оказаться, что ровно 99 стозначных чисел, записанных по вертикали, также делятся на 11?

Задача 5. Какую наименьшую сумму могут иметь девять последовательных натуральных чисел, если эта сумма оканчивается на 1020304?

Задача 6. Кирилл и Степа по очереди выписывают слева направо по одной цифре, пока не получится девятизначное число. При этом нельзя выписывать цифры, которые уже выписаны. Начинает (и заканчивает) Кирилл. Он побеждает, если полученное число будет делиться на 4, в противном случае побеждает Степа. Кто из игроков имеет выигрышную стратегию?

Задача 7. Найдите наибольшее натуральное число, из которого вычеркиванием цифр нельзя получить число, кратное 11.

Задача 8. Существует ли такое натуральное n, что для любых ненулевых цифр a и b число $\overline{anb}$ делится на $\overline{ab}$? (Через $\overline{x \ldots y}$ обозначено число, получаемое приписыванием друг к другу десятичных записей чисел $x, \ldots, y$.)

Дискретная непрерывность

М. Ю. Дмитриева

Задача 1. В ряд выложены 200 шаров, из них 100 черных и 100 красных, причем первый и последний шары — черные. докажите, что можно убрать с правого края несколько шаров подряд так, чтобы красных и черных шаров осталось поровну.

Задача 2. Вася выписывает натуральные числа, первое из которых равно 1. Каждое следующее число или на 1 больше предыдущего, или является собственным делителем предыдущего. Последнее равно 1000. Докажите, что в строке найдется число 123.

Задача 3. На клетчатой доске 100×100 стоит 1000 шашек. Докажите, доску можно разрезать по границам клеток на две связные части с равным количеством шашек.

Задача 4. В ряд сидят 15 мальчиков и 15 девочек.

a) Докажите, что можно выбрать 10 школьников подряд, чтобы среди них мальчиков и девочек было поровну.
b) Всегда ли из них можно выбрать 20 школьников подряд, среди которых мальчиков и девочек поровну?

Задача 5. В линейной связке сосисок — 100 говяжьих и 200 свиных вперемешку. Какое наименьшее количество разрезов достаточно сделать, чтобы можно было разложить сосиски на две кучки, в каждой из которых по 50 говяжьих и 100 свиных?

Задача 6.

a) На плоскости отмечено $2n$ точек. Докажите, что можно провести прямую так, чтобы по обе стороны от нее лежало поровну точек.
b) На плоскости есть $2n+1$ точка, никакие три не лежат на одной прямой. Докажите, что через любую из них можно провести прямую так, что с каждой стороны от нее будет находиться n точек.

Задача 7. Дракон заточил в темницу рыцаря и выдал ему 100 разных монет, половина из которых волшебные (какие именно — знает только дракон). Каждый день рыцарь раскладывает все монеты на две кучки (не обязательно равные). Если в кучках окажется поровну волшебных монет или поровну обычных,

дракон отпустит рыцаря. Сможет ли рыцарь гарантированно освободиться не позже, чем a) на 50-й день? b) на 25-й день?

Задача 8. В некоторых клетках таблицы 50×50 расставлены числа -1 и 1 таким образом, что сумма всех чисел в таблице по абсолютной величине не превосходит 100. Докажите, что в некотором квадрате 25×25 сумма чисел по абсолютной величине не превосходит 25.

Задача 9. Существуют ли сто последовательных натуральных чисел, среди которых ровно пять простых?

Принцип крайнего

В. В. Журавлева, А. Б. Меньщиков

Задача 1. По кругу выписаны несколько чисел, каждое из которых равно среднему арифметическому двух соседних с ним. Докажите, что все эти числа равны.

Задача 2. Шахматная доска разбита на доминошки. Докажите, что какие-то две из них образуют квадрат.

Задача 3. На шахматной доске стоят несколько ладей. Обязательно ли найдётся ладья, бьющая не более двух других? (Перепрыгивать через другие фигуры ладья не может.)

Задача 4. Из целых чисел от 1 до 100 удалили k чисел. Обязательно ли среди оставшихся чисел можно выбрать k различных чисел с суммой 100, если a) $k = 9$; b) $k = 8$?

Задача 5. В стране несколько городов и несколько дорог с односторонним движением. Каждая дорога соединяет два города и не проходит через остальные. При этом, какие два города ни взять, хотя бы одного из них можно проехать в другой, не нарушая правил движения. Докажите, что найдётся город, из которого можно проехать в любой другой, не нарушая правил движения.

Задача 6. На ветках деревьев сидят 55 мартышек, у каждой из них есть по банану. Все расстояния между парами мартышек различны. Каждая мартышка кинула банан ближайшей соседке. Докажите, что какая-то мартышка осталась без банана.

Задача 7. В компании из 14 ребят некоторые дружат друг с другом (дружба взаимна). Докажите, что найдутся двое ребят, у которых поровну друзей.

Задача 8. В клетках доски 8×8 расставлены числа $1, 2, \ldots, 64$. Докажите, что найдётся пара соседних по стороне клеток, числа в которых отличаются хотя бы на 5.

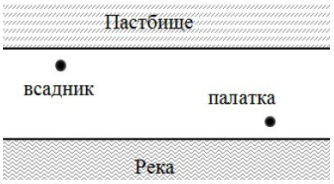
Симметрия и кратчайшие пути

В. В. Журавлева, А. Б. Меньщиков

Задача 1. В бильярде при ударе шара о стенку угол падения равен углу отражения. Поле — это прямоугольник, на нём лежит один шар. В каком направлении его надо ударить, чтобы он попал в правую верхнюю лузу и при этом

a) отразился от нижнего борта стола?
b) отразился сначала от верхнего, а затем от нижнего борта стола?
c) ударился о левый, а потом о нижний борт стола?

Задача 2. Всадник хочет добраться до палатки по кратчайшему пути. Каков этот путь, если



a) ему сначала надо напоить коня из реки?
b) ему сначала надо напоить, а потом накормить коня?
c) изменится ли длина кратчайшего пути, если всаднику сначала надо накормить, а потом напоить коня?

Задача 3. На внешней стенке открытого аквариума находится улитка. Помогите ей найти кратчайший путь, по которому она может проползти ко второй улитке, сидящей в некой точке на той же стенке аквариума, но с другой стороны. А если вторая улитка сидит на противоположной стенке с внешней стороны?

Задача 4. Две деревни (считайте их точками) расположены по разные стороны от реки с параллельными прямолинейными берегами. В каком месте на реке нужно построить мост (перпендикулярно берегам), чтобы путь из одной деревни в другую был кратчайшим?

Задача 5. Полуостров представляет собой острый угол, внутри которого находится дом лесника. Как леснику, выйдя из дома, добраться до одного берега полуострова, затем до другого, и вернуться домой, пройдя как можно меньше?

Задача 6. На одной стороне равностороннего треугольника намазан мед, на другой — сахар, на третьей — варенье. Внутри треугольника в точке А сидит улитка. Она хочет попасть в точку Б внутри этого же треугольника, при этом сначала насладиться медом, потом сахаром и, наконец, вареньем. Помогите ей найти кратчайший путь.

Алгоритмы

В. В. Журавлева, А. Б. Меньщиков

Задача 1. Вдоль прямолинейного участка границы установлено 15 столбов. Около каждого столба поймали нескольких близоруких шпионов. Каждый из них честно сказал, сколько других шпионов он видел. Каждый шпион видел только тех, кто находился около его столба и около ближайших соседних столбов. Можно ли по этим данным восстановить численность шпионов, пойманных около каждого столба?

Задача 2. Имеются красный, синий, зеленый и черный шарики, среди которых могут быть волшебные. Детектор позволяет определить, сколько из помещённых в него шариков волшебны. Как узнать, какие шарики волшебные, а какие – нет, всего за три измерения?

Задача 3. Двум мудрецам А и Б назначено испытание. Наутро их приведут в комнату, где на столе по кругу будут лежать шесть одинаковых с виду таблеток, из которых четыре безвредны, а две отравлены. Затем мудрецу А сообщат, какие таблетки отравлены, но передать информацию Б он уже не сможет. Мудрецы должны по очереди (начинает А) съедать по таблетке, пока не останется только две ядовитых. Как мудрецам заранее договориться, чтобы успешно пройти испытание?

Задача 4. Среди 10 человек, подозреваемых в преступлении, двое виновных и восемь невиновных. Экстрасенсу предъявляют подозреваемых по трое. Если среди троих есть преступник, экстрасенс указывает на него, если там два преступника — на одного из них, а если преступников нет — на любого из троих. Как за 6 таких сеансов наверняка выявить обоих преступников?

Задача 5. В доме 100 этажей. Обезьяна хочет выяснить, разобьется ли кокос, если его скинуть с какого-либо этажа, и если да, то начиная с какого. Если кокос при падении не разбивается, то его можно использовать еще раз для эксперимента. За какое наименьшее число попыток обезьяна сможет гарантированно ответить на свой вопрос, если у нее a) один кокос; b) два кокоса; c) три кокоса?

Задача 6. Некое секретное здание состоит из большого числа одинаковых с виду комнат, соединённых коридорами по кругу, в каждой есть люстра и выключатель. Шпион оказался в одной из комнат. Как ему определить количество комнат в здании, если он может ходить по зданию и включать и выключать свет? Изначально где-то свет уже горел, а где-то — нет, но где именно

— шпиону заранее неизвестно.

Задача 7. У Лисы пять нор, расположенных в ряд. Каждую ночь Лиса перемещается в соседнюю нору, влево либо вправо. Днем она сидит в этой норе. В полдень Серый Волк может проверить одну нору по своему усмотрению. Сможет ли Серый Волк за шесть дней обнаружить в норе Лису?

Взвешивания

В. В. Журавлева, А. Б. Меньщиков

Задача 1. Среди 111 монет часть — настоящие и весят одинаково, а остальные — фальшивые и тоже весят одинаково, но легче настоящих. Монеты разложили на чашечные весы, на левую чашку — 60 монет, на правую — 51 монету, и весы пришли в равновесие. Какое наименьшее и наибольшее число фальшивых монет могло быть?

Задача 2. Есть 1 золотая, 3 серебряных и 5 бронзовых монет. Известно, что одна из них фальшивая: легче настоящей. Настоящие монеты из одного металла весят одинаково (а из разных — не одинаково). Как за 2 взвешивания на чашечных весах без гирь найти фальшивую монету?

Задача 3. Есть 400 монет, из которых две фальшивые, весящие одинаково, но неизвестно, легче или тяжелее настоящих. Как за 3 взвешивания на чашечных весах без гирь определить, легче они или тяжелее настоящих?

Задача 4. Есть 5 серебряных и 4 золотые монеты. Известно, что одна из них фальшивая. Фальшивая серебряная монета весит меньше настоящей серебряной, а фальшивая золотая — больше настоящей золотой. Как за 2 взвешивания на чашечных весах без гирь гарантированно найти фальшивую монету?

Задача 5. Среди 12 монет одна фальшивая, причём неизвестно, легче она или тяжелее остальных. Как найти её за 3 взвешивания на чашечных весах без гирь?

Задача 6. Имеются 8 монет, среди которых одна фальшивая, отличающаяся по весу от настоящих (неизвестно, в какую сторону). Также имеются чашечные весы, которые показывают правильный результат, если на чашах разный вес, а если вес одинаковый, то вместо равенства показывают что попало. Можно ли гарантированно найти фальшивую монету всего за 4 взвешивания?

Задача 7. У эксперта есть 8 золотых пластин, промаркированных 10 г, 20 г, 30 г, 40 г, 50 г, 60 г, 70 г и 80 г, а также слабочувствительные двухчашечные весы без гирь. Более тяжёлая чашка этих весов перевесит, если разность весов на чашках больше 10 г, иначе весы останутся в равновесии. Эксперт знает, что вес ровно одной из пластин меньше заявленного. Как ему определить эту пластину на таких весах за 3 взвешивания?

Задача 8. На учительском столе были выставлены в ряд внешне одинаковые гирьки массой 101 г, 102 г, ..., 110 г (именно в таком порядке). На перемене Вовочка поменял местами две соседние гирьки. Учителю это известно. Как ему за 2 взвешивания на чашечных весах определить, какие именно гирьки были переставлены?

Конструктивы на любой вкус

В. В. Журавлева, А. Б. Меньщиков

Задача 1. Последовательно закрасьте в квадрате 7×7 a) 32; b) 33 клетки так, чтобы каждая следующая закрашиваемая клетка граничила по стороне только с предыдущей закрашенной клеткой среди всех ранее закрашенных клеток.

Задача 2. Как расставить на шахматной доске 8 ферзей, не бьющих друг друга?

Задача 3. Фирма проработала год, подсчитывая свою прибыль ежемесячно. Оказалось, что каждые три подряд идущих месяца прибыль была отрицательной. Может ли суммарная прибыль за весь год быть положительной? А за первые 8 месяцев?

Задача 4. Продавец утверждает, что четырьмя гирями он может взвесить любое целое число килограммов, от 1 до 40 включительно, возможно, помещая гири на разные чаши. Могут ли его слова быть правдой?

Задача 5. Можно ли расставить в клетках квадрата 4×4 числа от 1 до 16 так, чтобы число в каждой клетке было или меньше всех чисел в соседних по стороне клетках, или больше их всех?

Задача 6. Существуют ли 2019 подряд идущих составных чисел?

Задача 7. Можно ли нарисовать на листе бумаги четыре равных квадрата и две перпендикулярные прямые так, чтобы квадраты не перекрывались (даже не касались), и каждая прямая пересекала каждый квадрат по отрезку?

Задача 8. Придумайте бумажную фигурку с таким свойством: ее можно перегнуть по прямой так, что получится правильный треугольник, а можно перегнуть по прямой так, что получится прямоугольник.

Задача 9. Разрешается поставить цифры 1, 3, 4 и 6 в любом порядке и расставить между какими угодно из них знаки арифметических действий $+$, $-$, $\cdot$, $:$ и скобки (например, так: $(63+1) : 4$). Получите выражение, значение которого равно 24.

Задача 10. Можно ли все натуральные числа раскрасить в 6 цветов так, чтобы для любого натурального n все числа n, $2n$, $3n$, $4n$, $5n$, $6n$ были разноцветными?

Глава II

7 класс

1. Первая неделя

Разнобой

Г. К. Седов

Задача 1. Шноббс взял 20 последовательных натуральных чисел, записал их друг за другом в некотором порядке и получил число M. Сержант Колон взял 21 последовательное натуральное число, записал их друг за другом в некотором порядке и получил число N. Могло ли случиться, что $M = N$?

Задача 2. На дверце сейфа написано произведение степеней $a^n b^m c^k$. Чтобы дверца открылась, надо заменить каждую из шести букв натуральным числом так, чтобы в произведении получился куб натурального числа. Вустер, не подумав, уже заменил какие-то три буквы числами. Всегда ли Дживс сможет заменить три оставшиеся, чтобы дверца открылась?

Задача 3. Из целых чисел от 1 до 100 Гед удалил k чисел. Обязательно ли среди оставшихся чисел можно выбрать k различных чисел с суммой 100, если a) $k = 9$, b) $k = 8$?

Задача 4. Каждая диагональ четырехугольника разбивает его на два равнобедренных треугольника. Трисоляриане считают, что такой четырехугольник непременно ромб. Докажите инопланетянам, что вы умнее их и постройте контрпример.

Задача 5. Сэр Макс и Мелифаро рассказывают, что однажды в каждой клетке доски 8×8 написали по одному натуральному чис-

лу и оказалось, что при любом разрезании доски на доминошки суммы чисел во всех доминошках разные. При этом они говорят, что наибольшее записанное число было 32. Обязательно ли для создания такой доски применять черную или белую магию высших ступеней?

Задача 6. Йилане ищут такой набор из 13 натуральных чисел, что каждое не делится ни на одно из остальных, а квадрат каждого делится на каждое из остальных. Сумеют ли они найти такие числа? А вы?

Задача 7. Благодаря выдающемуся уму профессор Майкл Веррес-Эванс сумел придумать 10 таких различных целых чисел, что сумма любых 9 из них является полным квадратом. А вы сможете?

Задача 8. Помогите графу Рошфору понять, существует ли 1000000 таких различных натуральных чисел, что никакая сумма нескольких из этих чисел не является полным квадратом?

Задача 9. В турнире по драконьему покеру 16 участников. За один день разрешается провести однокруговой турнир для 6 участников. Какое наименьшее число дней потребуется организаторам турнира для того, чтобы каждый участник сыграл с каждым хотя бы по два раза?

Задача 10. Перед выбросом лейтенант Рико задумался, существуют ли три попарно различных ненулевых целых числа, сумма которых равна нулю, а сумма тринадцатых степеней которых является квадратом некоторого натурального числа? Лейтенанту скоро в бой, решите задачу за него, штатские!

Задача 11. Азирафаэль и Кроули поспорили, существуют ли такие три квадратных трёхчлена, что каждый из них имеет корень, а сумма любых двух из них корней не имеет? Кроули лучше Азирафаэля разбирается в математике (говорят, он ее и придумал). На что поставил Кроули?

Задача 12. Скиминок доказывает кардиналу Каллу, что суще-

ствует 1000 последовательных нечетных чисел, сумма которых является седьмой степенью натурального числа. Кардинал не верит и грозится сжечь Скиминока. Помогите бедному обладателю Меча без Имени.

Геометрический разнобой

Э. Р. Мацонашвили, С. А. Губанов

Задача 1. Высота CH, опущенная из вершины прямого угла треугольника ABC, делит биссектрису BL этого треугольника пополам. Найдите $\angle BAC$.

Задача 2. Внутри треугольника взяли произвольную точку. Докажите, что сумма расстояний от этой точки до вершин меньше периметра, но больше полупериметра треугольника.

Задача 3.

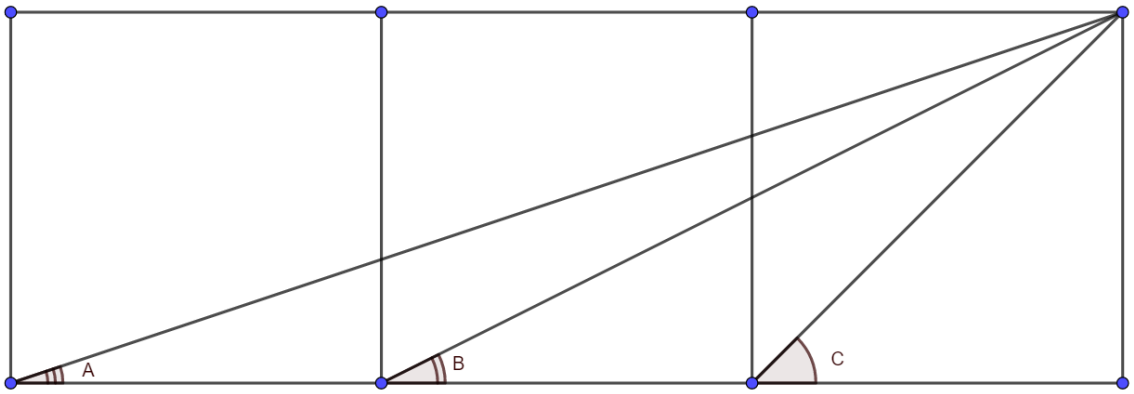
a) В неравнобедренном треугольнике ABC ($BA < BC$) на стороне BC отметили точку M так, что $BA = BM$. Докажите, что точки A, I, M, C лежат на одной окружности, где I — центр вписанной окружности треугольника ABC.

b) Докажите, что центр этой окружности лежит на описанной окружности треугольника ABC.

Задача 4. Дан параллелограмм $ABCD$. Пусть H — точка пересечения высот треугольника ABD. Докажите, что отрезок CH равен диаметру окружности, описанной вокруг треугольника ABD.

Задача 5. В равнобедренном треугольнике ABC углы при основании AC равны $80°$. На стороне BC отметили точку K так, что $BK = AC$. Найдите угол BAK.

Задача 6. Даны три одинаковых квадрата (см. рисунок). Докажите, что $\angle C = \angle A + \angle B$.



Теорема о четырех числах

С. А. Губанов

Теорема (О четырех числах)**.** Пусть a, b, c, d — натуральные числа, причем $ab = cd$. Тогда существуют такие натуральные числа p, q, r, s, что

$$a = pq, b = rs, c = pr, d = qs.$$

Задача 1. Докажите теорему о четырех числах.

Задача 2. Докажите с её помощью, что если $ab : c$ и НОД$(a, c) = 1$, то $b : c$.

Задача 3. Даны натуральные числа a, b, c, d такие, что $ab = cd$. Докажите, что:

a) $a + b + c + d$ - составное число.
b) $a^n + b^n + c^n + d^n$ - составное число для любого натурального n.

Задача 4. Петя и Вася придумали два прямоугольника с целыми длинами сторон. Оказалось, что площади этих прямоугольников равны. Всегда ли найдется прямоугольник с целыми длинами сторон (отличный от квадрата 1×1), копиями которого можно замостить оба прямоугольника мальчиков?

Задача 5. Простое число p представимо в виде суммы двух квадратов натуральных чисел. Докажите, что это представление единственно (с точностью до перестановки слагаемых).

Задача 6. Натуральные числа a, b, c, d удовлетворяют соотношению:

$$abcd\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+\frac{1}{d^2}\right)=a^2+b^2+c^2+d^2$$

Докажите, что $a+b+c+d$ - составное число.

Задача 7. Пусть a, c — любые положительные числа, а b, d — натуральные числа, причем $ab = cd$. Докажите, что найдутся положительное число p и натуральные числа q, r, s такие, что

$$a = pq, b = rs, c = pr, d = qs.$$

Задача 8. Натуральные числа a, b, c, d таковы, что

$$a < b \leqslant c < d, \quad ad = bc, \quad \sqrt{d} - \sqrt{a} \leqslant 1.$$

Докажите, что a — точный квадрат.

Средняя линия

Э. Р. Мацонашвили, С. А. Губанов

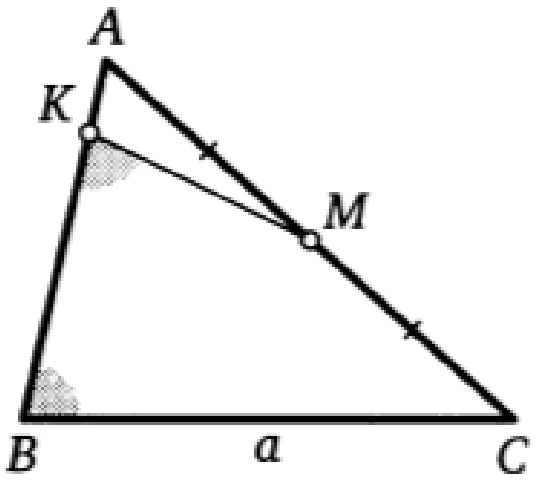
Определение. *Средняя линия треугольника* — это отрезок, соединяющий середины двух его сторон.

- Средняя линия треугольника параллельна основанию (третьей стороне) и равна его половине.
- Отрезок, соединяющий точки на двух сторонах треугольника, параллельный основанию и равный его половине, является средней линией.
- Отрезок, соединяющий середину стороны треугольника с точкой на другой стороне и параллельный основанию, является средней линией.

Определение. *Средняя линия четырехугольника* — это отрезок, соединяющий середины двух его противоположных сторон.

Теорема (Вариньон)**.** Середины сторон любого четырехугольника образуют параллелограмм.

Задача 1. Сторона BC треугольника ABC равна a. Середину M стороны AC соединили с точкой K на стороне AB так, что отмеченные на рисунке углы равны. Найдите MK.



Задача 2. Дан треугольник ABC, $BC = a, AC = b, a < b$. Через середину M стороны AB проводят прямую, параллельную AC, которая пересекает биссектрису CK в точке E. Найдите ME.

Задача 3. Вершину треугольника соединили с точкой, делящей его противоположную сторону в отношении $2 : 1$. Докажите, что получившийся отрезок разбивает данный треугольник на два треугольника, у которых есть по равной медиане.

Задача 4. Докажите, что средние линии четырехугольника и отрезок, соединяющий середины его диагоналей, пересекаются в одной точке.

Задача 5. Две противоположные стороны четырехугольника равны. Докажите, что прямая, проходящая через середины его диагоналей, образует с этими сторонами равные углы.

Задача 6. Диагонали параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке O. Точка P такова, что $DOCP$ - тоже параллелограмм

(CD - его диагональ). Обозначим через Q точку пересечения BP и AC, а через R — точку пересечения DQ и CP. Докажите, что $PC = CR$.

Задача 7. На стороне AB треугольника ABC с $\angle 100^\circ$ при вершине C взяты точки P и Q такие, что $AP = BC$ и $BQ = AC$. Пусть M, N, K - середины отрезков AB, CP, CQ соответственно. Найдите $\angle NMK$.

Задача 8.

a) В треугольнике ABC точка I — центр вписанной окружности. Точки M и N — середины сторон BC и AC соответственно. Известно, что угол AIN — прямой. Докажите, что угол BIM — также прямой.

b) Какому соотношению должны удовлетворять стороны треугольника ABC, чтобы выполнялось условие $\angle AIN = 90^\circ$ из предыдущего пункта?

Двигаемся наощупь

Г. К. Седов

Задача 1. 100 включенных и 100 выключенных фонариков случайным образом разложены по двум коробкам. У каждого фонарика есть кнопка, нажатие которой выключает горящий фонарик и зажигает выключенный. Ваши глаза завязаны, и вы не можете видеть, горит ли фонарик. Но вы можете перекладывать фонарики из коробки в коробку и нажимать на них кнопки. Придумайте способ добиться того, чтобы горящих фонариков в коробках было поровну.

Задача 2. В одной из вершин куба $ABCDEFGH$ сидит заяц, но охотникам он не виден. Три охотника стреляют залпом, при этом они могут «поразить» любые три вершины куба. Если они не попадают в зайца, то до следующего залпа заяц перебегает в одну

из трех соседних (по ребру) вершин куба. Укажите, как стрелять охотникам, чтобы обязательно попасть в зайца за четыре залпа.

Задача 3. В одном из 1000 окопов, расположенных в ряд, спрятался пехотинец. Пушка может одним выстрелом накрыть любой окоп. В каждом промежутке между выстрелами пехотинец (если уцелел) обязательно перебегает в соседний окоп (быть может, уже обстрелянный). Сможет ли пушка наверняка попасть в пехотинца?

Задача 4. Неуловимый Джо никогда не проигрывает на рулетке больше четырех раз подряд и никогда не ставит больше 10 долларов. Как ему выиграть 1000 долларов? (В случае выигрыша на рулетке возвращается удвоенная ставка; вначале Джо имеет 100 долларов.)

Задача 5. Несколько вагонов сцеплены по кругу. Вы находитесь внутри одного из них, ваша задача определить сколько всего вагонов. В каждом вагоне есть лампочка, вы можете включать и выключать свет находясь в вагоне; можете также переходить в один из соседних вагонов. Как будете действовать?

Задача 6. Вдоль дороги стоит 100 пронумерованных подряд столбов, как-то покрашенных в три цвета. Мэр столбов не видит. Он может назвать пару номеров, и если столбы разного цвета, их перекрасят в третий цвет, а если одинакового — то так и оставляют. В любом случае мэру ничего не докладывают. Всегда ли мэр может с помощью таких операций добиться, чтобы все столбы стали одинакового цвета?

Задача 7. На плоскости расположен квадрат и невидимыми чернилами нанесена точка P. Человек в специальных очках видит точку. Если провести прямую, то он отвечает на вопрос, по какую сторону от нее лежит P (если P лежит на прямой, то он говорит, что P лежит на прямой). Какое наименьшее число таких вопросов необходимо задать, чтобы узнать, лежит ли точка P внутри квадрата?

Задача 8. Иван Царевич хочет выйти из круглой комнаты с шестью дверями, пять из которых заперты на ключ. За одну попытку он может проверить

a) любые три двери
b) любые три двери, расположенные подряд, и если одна из них не заперта, то он в нее выйдет. После каждой попытки Баба-Яга запирает дверь, которая была открыта, и отпирает одну из соседних дверей. Какую именно, Иван Царевич не знает. Как ему действовать, чтобы наверняка выйти из комнаты?

Задача 9. Капитан Врунгель в своей каюте разложил перетасованную колоду из 52 карт по кругу, оставив одно место свободным. Матрос Фукс с палубы, не отходя от штурвала и не зная начальной раскладки, называет карту. Если эта карта лежит рядом со свободным местом, Врунгель её туда передвигает, не сообщая Фуксу. Иначе ничего не происходит. Потом Фукс называет еще одну карту, и так сколько угодно раз, пока он не скажет «стоп». Может ли Фукс добиться того, чтобы после слова «стоп»

a) каждая карта наверняка оказалась не там, где была вначале?
b) рядом со свободным местом наверняка не было туза пик?

Задача 10. Лабиринтом называется клетчатый квадрат 10×10, некоторые пары соседних узлов в котором соединены отрезком — «стеной» таким образом, что переходя из клетки в соседнюю по стороне клетку и не проходя через стены, можно посетить все клетки квадрата. Границу квадрата будем также считать обнесенной стеной. В некоторой клетке некоторого лабиринта стоит робот. Он понимает 4 команды - Л, П, В, Н, по которым соответственно идет влево, вправо, вверх и вниз, а если перед ним ”стена то стоит на месте. Как написать программу для робота, выполняя которую он обойдет все клетки независимо от лабиринта и от своего начального положения?

Задача 11. На бесконечном шоссе находятся полицейская машина (ездит со скоростью до 100 км/ч) и вор на угнанном мотоцикле (ездит со скоростью до 80 км/ч). Полицейские не знают, в каком месте шоссе находится вор. Как им действовать, чтобы наверняка догнать вора? (Вор не может съехать с шоссе или спрятаться).

Задача 12. В тюрьму поместили 100 узников. Надзиратель сказал им:

«Я дам вам вечер поговорить друг с другом, а потом рассажу по отдельным камерам, и общаться вы больше не сможете. Иногда я буду одного из вас отводить в комнату, в которой есть лампа (вначале она выключена). Уходя из комнаты, вы можете оставить лампу как включенной, так и выключенной. Если в какой-то момент кто-то из вас скажет мне, что вы все уже побывали в комнате, и будет прав, то я всех вас выпущу на свободу. А если неправ — скормлю всех крокодилам. И не волнуйтесь, что кого-нибудь забудут — если будете молчать, то все побываете в комнате, и ни для кого никакое посещение комнаты не станет последним.»

Придумайте стратегию, гарантирующую узникам освобождение.

Подсчет углов

Э. Р. Мацонашвили, С. А. Губанов

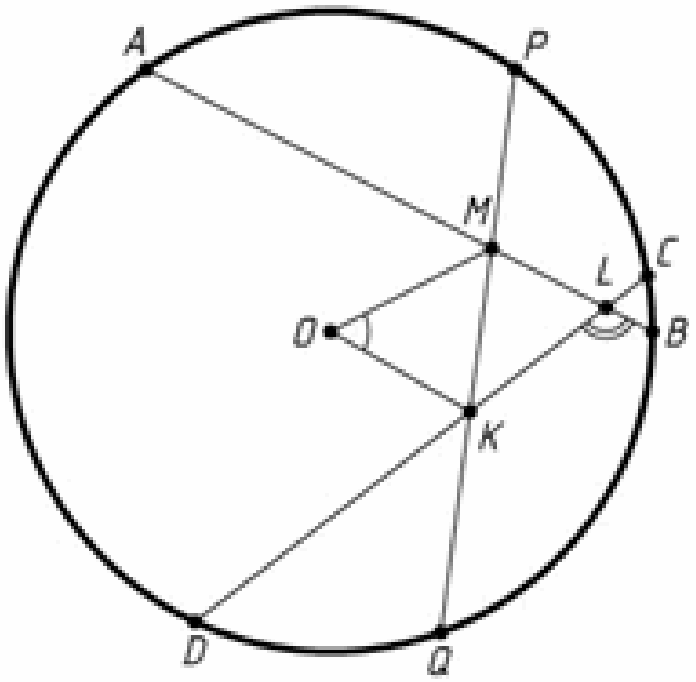
Задача 1. В треугольнике известны углы A, B, C. Найдите углы шести треугольников, на которые данный треугольник разбивается его биссектрисами.

Задача 2. В прямоугольном треугольнике ABC проведена высота CK из вершины прямого угла C, а в треугольнике ACK – биссектриса CE. Докажите, что $CB = BE$.

Задача 3. Продолжения двух противоположных сторон AB и CD четырёхугольника $ABCD$ пересекаются под углом a, про-

должения двух других противоположных сторон пересекаются под тем же углом. Докажите, что два угла в четырёхугольнике равны, и найдите разность двух других его углов.

Задача 4. В окружности с центром O проведены три равные хорды AB, CD и PQ (см. рисунок). Докажите, что угол MOK равен половине угла BLD.



Задача 5. В треугольник ABC вписана окружность с центром O. На стороне AB выбрана точка P, а на продолжении стороны AC за точку C — точка Q так, что отрезок PQ касается окружности. Докажите, что $\angle BOP = \angle COQ$.

Задача 6. Две окружности пересекаются в точках P и Q. Прямая, пересекающая отрезок PQ, последовательно пересекает эти окружности в точках A, B, C и D. Докажите, что $\angle APB = \angle CQD$.

Задача 7. В треугольнике ABC $\angle A = 40°, \angle B = 20°$, а $AB - BC = 4$. Найдите длину биссектрисы угла C.

Задача 8. В треугольнике ABC угол C — прямой. На стороне AC нашлась такая точка D, а на отрезке BD — такая точка K, что $\angle B = \angle KAD = \angle AKD$. Докажите, что $BK = 2DC$.

Копаем корни

Г. К. Седов

Теорема Безу. Многочлен $P(x)$ дает при делении на многочлен $(x-a)$ остаток, равный значению $P(a)$.

Разложите на множители с действительными коэффициентами многочлены (задачи 1 – 11):

Задача 1. x^4+4

Задача 2. $2x^3+x^2+x-1$

Задача 3. $x^{10}+x^5+1$

Задача 4. $x^3+3xy+y^3-1$

Задача 5. $x^2y^2-x^2+4xy-y^2+1$

Задача 6. $(a+b+c)^3-a^3-b^3-c^3$

Задача 7. $(x-y)^5+(y-z)^5+(z-x)^5$

Задача 8. $a^8+a^6b^2+a^4b^4+a^2b^6+b^8$

Задача 9. $(x^2+x+1)^2+3x(x^2+x+1)+2x^2$

Задача 10. $a^4+b^4+c^4-2a^2b^2-2a^2c^2-2b^2c^2$

Задача 11. $(x+1)(x+3)(x+5)(x+7)+15$

Задача 12. Какой остаток дает многочлен $x+x^3+x^9+x^{27}+x^{81}+x^{243}$ при делении на $x-1$?

Задача 13. При каких a и b многочлен $P(x)=(a+b)x^5+abx^2+1$ делится на x^2-3x+2?

Задача 14. Числа x, y, z удовлетворяют равенству

$$x+y+z-2(xy+yz+xz)+4xyz=\frac{1}{2}.$$

Докажите, что хотя бы одно из них равно $\frac{1}{2}$.

Дополнительные построения с медианой

Э. Р. Мацонашвили, С. А. Губанов

Задача 1. В треугольнике ABC проведена медиана BM. Известно, что $\angle ABM = 40°$, а $\angle CBM = 70°$. Найдите отношение $AB{:}BM$.

Задача 2. В треугольнике ABC точка M — середина стороны AC. На стороне BC взяли точку K так, что угол BMK прямой. Оказалось, что $BK = AB$. Найдите $\angle BKM$, если $\angle A + \angle C = 70°$.

Задача 3. На медиане AM треугольника ABC нашлась такая точка K, что $AK = BM$. Кроме того, $\angle AMC = 60°$. Докажите, что $AC = BK$.

Задача 4. Треугольник ABC равнобедренный ($AB = BC$). Точка M - середина стороны AB, точка P - середина отрезка CM, точка N делит сторону BC в отношении 3:1. Докажите, что $AP = MN$.

Задача 5. Точку F на катете AB прямоугольного треугольника ABC (угол B прямой) соединили с вершиной C и точкой M — серединой гипотенузы. При этом оказалось, что $\angle AFM = \angle CFB$. В каком отношении точка F делит катет AB?

Задача 6. В треугольнике ABC точка M — середина стороны AC. На стороне BC взяли точку P. Отрезок AP пересекает BM в точке O. Оказалось, что $BP = BO$. Найдите отношение $OM : PC$.

Задача 7. На стороне AC треугольника ABC выбрана точка D такая, что $BD = AC$. Медиана AM этого треугольника пересекает отрезок BD в точке K. Оказалось, что $DK = DC$. Докажите, что $AM + KM = AB$.

Неравенства – 1

Г. К. Седов

Задача 1. (**Неравенство о взаимно обратных.**)

a) Докажите, что при $x > 0$ выполняется неравенство $x + \frac{1}{x} \geqslant 2$, причем равенство достигается только при $x = 1$.

b) Докажите, что для $a > 0$ и $b > 0$ имеет место неравенство $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geqslant 2$, причем равенство достигается только при $a = b$.

Задача 2. Нарисуйте график функции $y = x + \frac{1}{x}$.

Задача 3. Докажите, что для любых a, $b > 0$

$$\frac{a}{a^2+1} + \frac{b}{b^2+1} \leqslant 1.$$

Задача 4. Докажите, что для любых a, b, $c > 0$

$$\frac{b+c}{a} + \frac{a+c}{b} + \frac{a+b}{c} \geqslant 6.$$

Задача 5. (**Неравенство Несбитта**) Докажите, что для любых a, b, $c > 0$ имеет место неравенство

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} \geqslant \frac{3}{2}.$$

Задача 6. Решите уравнение $x^{2019} + \frac{1}{x^{2019}} = 1 + x^{2020}$.

Задача 7. (**Неравенство Коши.**) Докажите, что для любых a, $b > 0$ выполняется неравенство $\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}$, причем равенство достигается только при $a = b$.

Задача 8. Для любых a, b, $c > 0$ докажите

$$(a+b)(b+c)(c+a) \geqslant 8abc$$

Задача 9. Для любых a_1, a_2, ..., $a_n > 0$, удовлетворяющих условиям $a_1 a_2 \cdot a_n = 1$, докажите, что

$$(1+a_1)(1+a_2)\ldots(1+a_n) \geqslant 2^n.$$

Задача 10. Произведение двух положительных чисел больше их суммы. Докажите, что эта сумма больше 4.

Задача 11. Для любых x, y, меньших по модулю 1, докажите, что

$$\frac{1}{1-x^2}+\frac{1}{1-y^2}\geqslant\frac{2}{1-xy}.$$

Задача 12. Для любых x, y, $z>0$ докажите, что

$$(x+y-z)(y+z-x)(z+x-y)\geqslant xyz.$$

Задача 13. (Неравенства о средних) Докажите, что для любых a, $b>0$ выполняется следующая цепочка неравенств:

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}\geqslant\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}\geqslant\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}.$$

Задача 14. Докажите неравенство Коши для четырех чисел:

$$\frac{a_1+a_2+a_3+a_4}{4}\geqslant\sqrt[4]{a_1a_2a_3a_4}.$$

Задача 15. Докажите, что для любых положительных чисел $_1$, ..., a_n справедливо неравенство

$$\left(1+\frac{a_1^2}{a_2}\right)\left(1+\frac{a_2^2}{a_3}\right)\cdots\left(1+\frac{a_n^2}{a_1}\right)\geqslant(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n).$$

Прикинь и построй

Г. К. Седов

Задача 1. Какое наибольшее значение может принимать выражение

$$\frac{1}{a+\frac{2019}{b+\frac{1}{c}}},$$

если a, b, c — попарно различные ненулевые цифры?

Задача 2. На руки выдали $2k+1$ занумерованных последовательными натуральными числами карточек. Какое наибольшее число карточек можно оставить так, чтобы ни один из оставшихся номеров не был равен сумме двух других оставшихся номеров?

Задача 3. По кругу стоят 2019 чисел, каждое из которых — 1 или –1, причём не все числа одинаковые. Возьмем сумму всех произведений по 10 подряд стоящих чисел.

a) Какая наименьшая сумма может получиться?
b) А какая наибольшая?

Задача 4. Даны поле $K \times K$ клеток и N шашек. Рассматриваются все такие расстановки шашек на поле, что никакие две шашки не стоят в соседних клетках. При каком наибольшем N в каждой из этих расстановок можно найти хотя бы одну шашку, от перемещения которой в соседнюю клетку заданное условие не нарушится? (Соседними считаются клетки, имеющие общую сторону.)

Задача 5. Саша выставляет на пустую шахматную доску ладьи: первую — куда захочет, а каждую следующую ставит так, чтобы она побила нечетное число ранее выставленных ладей. Какое наибольшее число ладей он сможет так выставить?

Задача 6. Два числа назовем похожими, если они различаются только одной цифрой в каком-то из разрядов (например, 1234 и 1235 — соседние). Какое наибольшее количество десятизначных чисел можно выбрать так, чтобы среди них не было похожих?

Задача 7. В какое наибольшее число цветов можно раскрасить все клетки доски 10×10 так, чтобы в каждой строке и в каждом столбце находились клетки не более чем пяти различных цветов?

Задача 8. Какое наибольшее количество a) ладей; b) ферзей; можно расставить на шахматной доске 8×8 так, чтобы каждая из

этих фигур была под ударом не более чем одной из остальных?

Задача 9. На участке дороги в 1 км все освещено фонарями, причем каждый фонарь освещает отрезок дороги длиной 1 м. Какое наибольшее количество фонарей может быть на дороге, если известно, что после выключения любого фонаря участок будет освещен уже не полностью?

Задача 10. В каждой клетке таблицы 8×8 сидят по два жука. В некоторый момент времени каждый жук переползает в соседнюю по стороне клетку, причём жуки, сидевшие в одной клетке, переползают в разные. Какое наибольшее количество клеток доски может после этого остаться свободным?

Задача 11. В выпуклом 2018-угольнике проведены все диагонали. Они разбивают его на многоугольники. Возьмём среди них многоугольник с самым большим числом сторон. Какое наибольшее число сторон он может иметь?

Задача 12. Доска 8×8 случайным образом разрезана на доминошки 1×2. Какое максимальное количество доминошек можно заведомо разрезать одной горизонтальной или вертикальной чертой, проходящей по границам клеток?

Игры

Э. Р. Мацонашвили, С. А. Губанов

Чаще всего выигрышная стратегия основывается либо на анализе выигрышных и проигрышных позиций, либо на каком-то свойстве исходной игры, например, на возможности действовать симметрично. Во всех задачах этого листка нужно ответить на вопрос «Кто выигрывает при правильной игре?»

Задача 1. Игра начинается с числа 0. За ход разрешается прибавить к имеющемуся числу любое натуральное число от 1 до 9. Выигрывает тот, кто получит число 100.

Задача 2. В ряд лежат 25 монет. За ход разрешается брать одну или две рядом лежащие монеты. Проигрывает тот, кому нечего брать.

Задача 3. Дана клетчатая доска 10×10. За ход разрешается покрыть любые две соседние клетки доминошкой (прямоугольником размером 1×2) так, чтобы доминошки не перекрывались. Проигрывает тот, кто не может сделать ход.

Задача 4. Король стоит на поле a1 шахматной доски. За ход разрешается сдвинуть его на одну клетку вправо, или на одну клетку вверх, или на одну клетку вправо-вверх. Выигрывает тот, кто поставит короля на клетку h8. Кто выигрывает при правильной игре?

Задача 5. Двое по очереди выписывают на доску натуральные числа от 1 до 1000. Первым ходом первый игрок выписывает на доску число 1. Затем очередным ходом на доску можно выписать либо число $2a$, либо число $a + 1$, если на доске уже написано число a. При этом запрещается выписывать числа, которые уже написаны на доске. Выигрывает тот, кто выпишет на доску число 1000. Кто выигрывает при правильной игре?

Задача 6. Имеется три кучки камней: в первой — 50, во второй — 60, в третьей — 70. Ход состоит в разбиении каждой кучки, состоящей более чем из одного камня, на две меньшие кучки. Выигрывает тот, после чьего хода во всех кучках будет по одному камню.

Задача 7. На концах клетчатой полоски размером 1×101 клеток стоят две фишки: слева — фишка первого игрока, справа — второго. За ход разрешается сдвинуть свою фишку в направлении противоположного края полоски на 1, 2, 3 или 4 клетки. При этом разрешается перепрыгивать через фишку соперника, но запрещается ставить свою фишку на одну клетку с ней. Выигрывает тот, кто первым достигнет противоположного края полоски. Кто выиграет при правильной игре: тот, кто ходит первым, или его

соперник?

Задача 8. Два игрока ходят по очереди. Перед началом игры у них есть по N горошин. Ход состоит в передаче сопернику любого числа горошин. Не разрешается передавать такое количество горошин, которое до этого уже кто-то в этой партии передавал. Ноль горошин тоже передавать нельзя. Тот, кто не может сделать очередной ход по правилам, — считается проигравшим. Кто — начинающий или его соперник — победит в этой игре, как бы ни играл его партнер?

Остатки, остатки, остатки...КТО здесь?

Г. К. Седов

В этом листочке будем использовать следующие обозначения:

- НОД$(a, b) = (a, b)$;
- $a \equiv b \pmod m \overset{def}{\Leftrightarrow} a \underset{m}{\equiv} b$.

Задача 1. Найдите наименьшее натуральное число, которое давало бы остатки 2, 4, 6, 10 при делении на 3, 5, 7, 11 соответственно.

Задача 2. Найдите наименьшее натуральное число, половина которого квадрат, треть — куб, а одна пятая — пятая степень.

Задача 3. Пусть $(m_1, m_2) = 1$. Докажите, что

a) существует a, такое что $a \underset{m_1}{\equiv} 0$ и $a \underset{m_2}{\equiv} 1$;

b) для любых r_1, r_2 существует a, такое что $a \underset{m_1}{\equiv} r_1$ и $a \underset{m_2}{\equiv} r_2$.

Задача 4. (**Китайская теорема об остатках**) Пусть числа m_1, ..., m_n попарно взаимно просты. Докажите, что для любых r_1, ..., r_n существует ровно одно число a, такое что $0 < a < m_1 \cdot \ldots \cdot m_n$

и

$$\begin{cases} a \underset{m_1}{\equiv} r_1 \\ a \underset{m_2}{\equiv} r_2 \\ \quad \dots \\ a \underset{m_n}{\equiv} r_n \end{cases}$$

Докажите также, что любые два натуральных числа, удовлетворяющие этой системе сравнений, дают равные остатки при делении на $m_1 \cdot m_2 \cdot \dots m_n$.

Задача 5. Найдите остаток при делении 36^{99} на $37 \cdot 5$.

Задача 6. При каких целых n число $n^2 + 3n + 1$ делится на 55?

Задача 7. Решить уравнение $x^2 - 25 \underset{143}{\equiv} 0$.

Задача 8. Генерал хочет построить для парада своих солдат в одинаковые квадратные каре (размера $n \times n$, $n > 1$), но он не знает сколько солдат (от 0 до 23) находится в лазарете. Докажите, что у генерала может быть такое количество солдат, что он, независимо от заполнения лазарета, сумеет выполнить свое намерение.

Задача 9. Число называется свободным от кубов, если оно не делится на куб натурального числа, большего 1. Докажите, что для любого n найдется n последовательных чисел, не свободных от кубов.

Задача 10. Дано конечное множество натуральных чисел A. Докажите, что существует такое натуральное b, что для каждого $a \in A$ число ab будет степенью натурального числа.

Задача 11. Для какого наибольшего N найдутся N последовательных натуральных чисел, таких, что сумма цифр первого делится на 1, второго на 2, третьего на 3 и т.д.

Задача 12. Докажите, что числа натурального ряда можно переставить местами так, чтобы для всех n сумма n первых чисел делилась а) на n; b) на $n + 1$-е число.

Задача 13. Про многочлен $p(x)$ с целыми коэффициентами известно, что для любого целого n число $p(n)$ делится на одно из целых чисел a_1, ..., a_m. Докажите, что из этих чисел можно выбрать одно число a_i так, что $p(n)$ будет делиться на него при любом целом n.

Задача 14. Существует ли такое натуральное N, что в любой возрастающей арифметической прогрессии из N натуральных чисел найдется число, делящееся на какое-то простое число, которое больше 10000?

Конкуррентность

Э. Р. Мацонашвили, С. А. Губанов

Задача 1. Могут ли середины всех медиан треугольника лежать на одной прямой? Тот же вопрос про биссектрисы и высоты.

Задача 2. Точки C, D лежат на окружности с диаметром AB (все точки различные). Прямые AC и BD пересекаются в точке P, а прямые AD и BC — в точке Q. Докажите, что PQ перпендикулярно AB.

Задача 3. В треугольнике ABC сторона AC наименьшая. На сторонах AB и BC взяты точки K и L соответственно, причём $KA = AC = CL$. Пусть M — точка пересечения AL и KC, а I — центр вписанной в треугольник ABC окружности. Докажите, что прямая MI перпендикулярна прямой AC.

Задача 4. Биссектриса угла B и биссектриса внешнего угла D прямоугольника $ABCD$ пересекают сторону AD и прямую AB в точках M и K соответственно. Докажите, что отрезок MK равен и перпендикулярен диагонали прямоугольника.

Задача 5. Внутри параллелограмма $ABCD$ выбрана точка E так, что $AE = DE$ и $\angle ABE = 90°$. Точка M — середина BC. Докажите, что угол DME прямой.

Задача 6. В прямоугольнике $ABCD$ точка M — середина стороны CD. Через точку C провели прямую, перпендикулярную прямой BM, а через точку M — прямую, перпендикулярную диагонали BD. Докажите, что два проведённых перпендикуляра пересекаются на прямой AD.

Задача 7. В квадрате $ABCD$ точка E — середина CD, точка F — середина AE. Прямая CF пересекает прямую AD в точке G, а прямую AB — в точке H. Докажите, что прямые CA, DH и EG пересекаются в одной точке.

Задача 8. Докажите, что остроугольный треугольник полностью покрывается тремя квадратами, построенными на его сторонах как на диагоналях.

Задача 9. Рассмотрим правильный двенадцатиугольник. Занумеруем его вершины последовательно числами от 1 до 12. Докажите, что диагонали $1-5$, $2-6$, $3-8$ и $4-11$ пересекаются в одной точке.

Малая теорема Ферма

М. Ю. Дмитриева

(Малая теорема Ферма.) Пусть p — простое число, a — натуральное. Тогда $a^p - a$ делится на p.

Случай, когда a делится на p, очевиден. Рассмотрим случай, когда a на p не делится.

Доказательство 1. Рассмотрим числа a, $2a$, $3a$, ..., $(p-1)a$.

a) Докажите, что все эти числа дают различные остатки при делении на p.

b) Докажите Малую теорему Ферма, рассмотрев произведение этих чисел.

Доказательство 2. Рассмотрим ориентированный граф, вершины которого соответствуют ненулевым остатками при делении на p, и из каждого остатка x проведено ребро в xa.

a) Докажите, что в каждую вершину входит ровно одно ребро.
b) Докажите, что граф разбился на циклы и эти циклы одинаковой длины.
c) Выведете из этого Малую теорему Ферма.

Доказательство 3. Рассмотрим диск (например, фанерный), разделенный с одной стороны на p секторов.

a) Найдите число способов покрасить этот диск в a цветов, если сектора **не** пронумерованы, и нельзя красить весь диск в один цвет.
b) Выведете из этого Малую теорему Ферма.

Доказательство 4. Будем доказывать Малую теорему Ферма по индукции по a. База $a = 1$ очевидна. Нужно проделать переход от a к $a + 1$.

a) Докажите, что C_p^k делится на p при $k \in \{1, 2, \ldots, p-1\}$.
b) Закончите доказательство Малой теоремы Ферма.

(Теорема Эйлера.) Пусть n и a — взаимно простые натуральные числа. Обозначим через $\phi(n)$ количество натуральных чисел, меньших n и взаимно простых с n. Тогда $a^{\phi(n)} - 1$ делится на n.

Задача 1.

a) Докажите теорему Эйлера аналогично первому доказательству Малой теоремы Ферма.
b) Докажите теорему Эйлера аналогично второму доказательству Малой теоремы Ферма.

Задача 2. Докажите, что если $a^{15} - 1$ делится на 29, то и $a - 1$ делится на 29.

Задача 3. Известно, что $a^{12}+b^{12}+c^{12}+d^{12}+e^{12}+f^{12}$ делится на 13. Докажите, что $abcdef$ делится на 13^6.

Задача 4. При каких простых p число $5^{p^2}+1$ делится на p?

Задача 5.

a) Конечно ли множество чисел вида вида 2^n-1, у которых более миллиона различных простых делителей?

b) Назовём простое число p *удачным*, если существует такое n, что $3^{n^2+1}-2^n$ делится на p. Конечно или бесконечно множество удачных чисел?

c) Дан многочлен $P(x)$ с целыми коэффициентами. Докажите, что существует бесконечно много таких простых чисел q, что для какого-то натурального n, $q \mid 2^n + P(n)$

Задача 6. Дано простое число p. Докажите, что $2^{2^p}-4$ делится на 2^p-1.

Задача 7. Докажите, что для всех простых $p > 4$ существует $n \in \mathbb{N}$ такое, что $2^n+3^n+6^n-1$ делится на p.

Задача 8. Пусть p и q — различные простые числа. Какой остаток дает число p^q+q^p при делении на pq?

Задача 9.

a) Докажите, что для любого n существует число с суммой цифр n, делящееся на n

b) При каких натуральных n для каждого натурального $k \geqslant n$ существует натуральное число с суммой цифр k, делящееся на n?

Задача 10. Даны натуральные $x, y \in [2; 100]$. Докажите, что при некотором натуральном n число $x^{2^n}+y^{2^n}$ — составное.

Про информацию

М. Ю. Дмитриева

Задача 1.

a) Даны 3^n монет. Известно, что среди них ровно одна фальшивая, которая легче настоящих, а все настоящие весят одинаково. За какое минимальное число вопросов можно найти фальшивую монету?
b) Решите предыдущую задачу в случае, если монет k. (Вам должна помочь индукция)
c) А если $k = 3^n$, но список вопросов нужно предоставить заранее?

Задача 2.

a) Вася загадал натуральное число от 1 до 128. Петя может задать Васе любые вопросы, на который тот может ответить только «Да» или «Нет». За какое наименьшее число вопросов он может узнать число?
b) А если Вася загадал 10 таких чисел?
c) Единственным свидетелем по делу о налете на продуктовый магазин «Одуванчик» оказалась пенсионерка Клавдия Петровна. В ходе предварительного следствия выяснилось, что в налёте участвовали ровно 5 преступников. Пенсионерка утверждает, что точно запомнила всех 5 налётчиков. На процедуру опознания привели 9 подозреваемых. Следователь может задавать любые вопросы, предполагающие ответы «да» или «нет». За какое наименьшее число вопросов следователь может определить всех преступников?

Задача 3. Есть k неотличимых с виду монет, одна из которых фальшивая (легче или тяжелее настоящей). Нужно найти фальшивую монету и узнать, легче она или тяжелее настоящей.

a) Получится ли это сделать за 3 взвешивания, если k = 14?
b) Получится ли это сделать за 3 взвешивания, если k = 13?

Задача 4. Есть m болельщиков: некоторые из них (возможно, все или никто) болеют за «Спартак», а остальные — за

«Динамо». Разрешается спросить у любых двоих, болеют ли они за разные команды, и они честно ответят «да» или «нет». Требуется посадить болельщиков в два автобуса так, чтобы в каждом были болельщики только одной команды. За какое минимальное количество вопросов это наверняка можно сделать?

Задача 5. У Пети есть 2019 камней. За 1 вопрос вы можете узнать у Пети сумму масс 2 камней. За какое наименьшее количество вопросов вы сможете гарантированно найти массы всех камней?

2. Вторая неделя

Неравенства – 2

Г. К. Седов, П. В. Бибиков

Задача 1. Докажите, что при $x_1 \leqslant x_2$, $y_1 \leqslant y_2$ выполняется неравенство

$$x_1y_2 + x_2y_1 \leqslant x_1y_1 + x_2y_2.$$

Задача 2. (**Транснеравенство**) Пусть даны две последовательности $x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots \leqslant x_n$ и $y_1 \leqslant y_2 \leqslant \ldots \leqslant y_n$. Докажите, что для любой перестановки $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ членов последовательности $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ выполняются неравенства:

$$x_1y_n+x_2y_{n-1}+\ldots+x_ny_1 \leqslant x_1u_1+x_2u_2+\ldots+x_nu_n \leqslant x_1y_1+x_2y_2+\ldots+x_ny_n.$$

Задача 3. Для любых a, b, c докажите, что

$$a^2 + b^2 + c^2 \geqslant ab + bc + ca$$

a) с помощью транснеравенства; b) без помощи транснеравенства.

Задача 4. Для любых a, b, $c > 0$ докажите, что

$$a^4 + b^4 + c^4 \geqslant a^2bc + b^2ca + c^2ab.$$

Задача 5. Для любых a, b, $c > 0$ докажите, что

$$a^5 + b^5 + c^5 \geqslant abc(ab + bc + ca).$$

Задача 6. Для любых a, b, $c > 0$, удовлетворяющих условию $a + b + c = 1$ докажите, что

$$\frac{ab}{c} + \frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} \geqslant 1.$$

Задача 7. Доказать неравенство

$$\frac{a_1}{a_n} + \frac{a_2}{a_1} + \frac{a_3}{a_2} + \cdots + \frac{a_n}{a_{n-1}} \geqslant n.$$

Задача 8. Пусть a, b, c, d ,$e > 1$. Докажите, что

$$\frac{a^2}{c-1} + \frac{b^2}{d-1} + \frac{c^2}{e-1} + \frac{d^2}{a-1} + \frac{e^2}{b-1} \geqslant 20.$$

Задача 9. В вершинах куба расставили числа 1^2, 2^2, ..., 8^2 (в каждую из вершин — по одному числу). Для каждого ребра посчитали произведение чисел в его концах. Найдите наибольшую возможную сумму всех этих произведений.

Дискретная непрерывность

М. Ю. Дмитриева

Задача 1. В ряд выложены 200 шаров, из них 100 черных и 100 красных, причем первый и последний шары — черные. докажите, что можно убрать с правого края несколько шаров подряд так, чтобы красных и черных шаров осталось поровну.

Задача 2. На доске написано натуральное число. Каждую минуту к числу прибавляется любая из его ненулевых цифр. Докажите, что в некоторый момент на доске будет написано четное число.

Задача 3. В ряд сидят 15 мальчиков и 15 девочек.

a) Докажите, что можно выбрать 10 школьников подряд, чтобы среди них мальчиков и девочек было поровну.
b) Всегда ли из них можно выбрать 20 школьников подряд, среди которых мальчиков и девочек поровну?
c) По кругу сидят 15 мальчиков и 15 девочек. Докажите, что для каждого $2n = 2, 4, \ldots, 30$ можно выбрать $2n$ школьников подряд, чтобы среди них мальчиков и девочек было поровну.

Задача 4.

a) На плоскости есть $2n+1$ точка, никакие три не лежат на одной прямой. Докажите, что через любую из них можно провести прямую так, что с каждой стороны от нее будет находиться n точек.
b) На плоскости нарисовано $2n$ красных и $2n$ синих точек общего положения. Всегда ли можно провести прямую так, чтобы с каждой стороны лежало поровну красных и синих точек?

Задача 5. Существуют ли сто последовательных натуральных чисел, среди которых ровно пять простых?

Задача 6. В линейной связке сосисок — 100 говяжьих и 200 свиных вперемешку. Какое наименьшее количество разрезов достаточно сделать, чтобы можно было разложить сосиски на две кучки, в каждой из которых по 50 говяжьих и 100 свиных?

Задача 7. Дракон заточил в темницу рыцаря и выдал ему 100 разных монет, половина из которых волшебные (какие именно — знает только дракон). Каждый день рыцарь раскладывает все монеты на две кучки (не обязательно равные). Если в кучках окажется поровну волшебных монет или поровну обычных,

дракон отпустит рыцаря. Сможет ли рыцарь гарантированно освободиться не позже, чем на 25-й день?

Задача 8. В некоторых клетках таблицы 50×50 расставлены числа -1 и 1 таким образом, что сумма всех чисел в таблице по абсолютной величине не превосходит 100. Докажите, что в некотором квадрате 25×25 сумма чисел по абсолютной величине не превосходит 25.

Задача 9. В ряд стоят n шаров, известно, что среди этих шаров могут быть шары только двух цветов: черного и белого. Если в автомат отправить запрос (a, b), то он проверит шары на местах с номерами a и b и если первый чёрный, а второй — белый, то поменяет их местами. Саша утверждает, что может, не зная исходного набора, написать такой список запросов, что потом на двух известных ему позициях будут шары одного цвета. Докажите, что Саша хвастается безосновательно.

Полуинварианты

Д. А. Михалин

Задача 1. Карлсон написал дробь $\frac{5}{8}$. Малыш может: a) прибавлять любое натуральное число к числителю и знаменателю одновременно; b) умножать числитель и знаменатель на одно и то же натуральное число. Сможет ли Малыш с помощью этих действий получить дробь, равную $\frac{3}{5}$?

Задача 2. На каждой грани куба написано число, причем не все эти числа одинаковы. Каждое из написанных чисел заменяется на среднее арифметическое чисел, написанных на четырех соседних гранях. Могут ли через несколько таких операций на всех гранях оказаться исходные числа?

Задача 3. В клетки таблицы $m \times n$ вписаны некоторые числа. Разрешается одновременно менять знак у всех чисел некоторого

столбца или строки. Докажите, что многократным повторением этой операции можно превратить данную таблицу в такую, у которой суммы чисел, стоящих в каждом столбце и каждой строке, неотрицательны.

Задача 4. В каждой из n стран правит либо партия правых, либо партия левых. Каждый год в одной из стран А меняется власть. Это происходит в том случае, если в большинстве граничащих со страной А стран правит не та партия, которая правит в стране А. Докажите, что смены правительств не могут продолжаться бесконечно.

Задача 5. Шеренга новобранцев стояла лицом к сержанту. По команде «налево» некоторые повернулись налево, некоторые — направо, а остальные — кругом. Всегда ли сержант сможет встать в строй так, чтобы с обеих сторон от него оказалось поровну новобранцев, стоящих к нему лицом?

Задача 6. На квадратном поле 10×10 девять клеток 1×1 поросли бурьяном. После этого бурьян может распространиться на клетку, у которой не менее двух соседних клеток уже поросли бурьяном. Докажите, что тем не менее бурьян не сможет распространиться на все клетки.

Задача 7. Несколько ребят стоят по кругу. У каждого есть некоторое количество конфет. Сначала у каждого чётное количество конфет. По команде каждый передает половину своих конфет стоящему справа. Если после этого у кого-нибудь оказалось нечётное количество конфет, то ему извне добавляется одна конфета. Это повторяется много раз. Докажите, что настанет время, когда у всех будет поровну конфет.

Задача 8. По кругу стоит 101 мудрец. Каждый из них либо считает, что Земля вращается вокруг Юпитера, либо считает, что Юпитер вращается вокруг Земли. Один раз в минуту все мудрецы одновременно оглашают свои мнения. Сразу после этого каждый мудрец, оба соседа которого думают иначе, чем он,

меняет своё мнение, а остальные — не меняют. Докажите, что через некоторое время мнения перестанут меняться.

Задача 9. На плоскости даны $2n$ точек. Докажите, что эти точки можно соединить n попарно не пересекающимися отрезками.

Задача 10. У менялы на базаре есть много ковров. Он согласен взамен ковра размера $a \times b$ дать либо ковёр размера $\frac{1}{a} \times \frac{1}{b}$, либо два ковра размеров $c \times b$ и $\frac{a}{c} \times b$ (при каждом таком обмене число c клиент может выбрать сам). Путешественник рассказал, что изначально у него был один ковёр, стороны которого превосходили 1, а после нескольких таких обменов у него оказался набор ковров, у каждого из которых одна сторона длиннее 1, а другая — короче 1. Не обманывает ли он? (По просьбе клиента меняла готов ковёр размера $a \times b$ считать ковром размера $b \times a$.)

Целые многочлены

Г. К. Седов

Теорема Безу для многочленов с целыми коэффициентами. Для любого многочлена $P(x)$ с целыми коэффициентами и любых различных целых чисел a и b число $P(a) - P(b)$ делится на $a - b$.

Задача 1. Вспомните и докажите ФСУ для разложения $a^n - b^n$.

Задача 2. Докажите теорему Безу для многочленов с целыми коэффициентами.

Задача 3. Все коэффициенты многочлена $P(x)$ — целые числа. Известно, что $P(1) = 1$ и что $P(n) = 0$ при некотором натуральном n. Найдите n.

Задача 4. Докажите, что не существует многочлена $P(x)$ с целыми коэффициентами, для которого $P(6) = 5$ и $P(14) = 9$.

Задача 5. Если многочлен с целыми коэффициентами при трех различных целых значениях переменной принимает значение 1,

то он не имеет ни одного целого корня. Докажите это.

Задача 6. Докажите, что если $\forall c \in \mathbb{N}$ равны значения $P(c) = Q(c)$ для двух многочленов, то и оба многочлена равны.

Задача 7. Докажите, что не существует многочлена (степени больше нуля) с целыми коэффициентами, принимающего при каждом натуральном значении аргумента значение, равное некоторому фиксированному простому числу.

Назад в будущее

Г. К. Седов

Задача 1. Натуральное число n разрешается заменить на число ab, если $a+b = n$ и числа a и b натуральные. Можно ли с помощью таких замен получить из числа 22 число 2019?

Задача 2. Натуральное число можно умножать на 2 и произвольным образом переставлять в нем цифры (запрещается лишь ставить 0 на первое место). Докажите, что превратить число 1 в число 811 с помощью таких операций невозможно.

Задача 3. Четыре кузнечика сидят в вершинах квадрата. Каждую минуту один из них прыгает в точку, симметричную ему относительно другого кузнечика. Докажите, что кузнечики не могут в некоторый момент оказаться в вершинах квадрата большего размера.

Задача 4. На Диком Западе есть несколько городов. Из каждого города ведут три дороги. Из какого-то города выехал Марти Макфлай. Странствуя по дорогам, он из каждого города, стоящего на его пути, поворачивает либо направо, либо налево по отношению к дороге, по которой приехал. Марти никогда не сворачивает в ту сторону, в которую он свернул перед этим. Доказать, что когда-нибудь он вернётся в исходный город.

Задача 5. Треугольная таблица строится по следующему правилу: в верхней её строке написано одно только натуральное число $a > 1$, а далее под каждым числом k слева пишем число k^2, а справа — число $k + 1$. (Например, при $a = 2$ вторая строка состоит из чисел 4 и 3, третья — из чисел 16, 5, 9 и 4, четвертая — из чисел 256, 17, 25, 6, 81, 10, 16 и 5.) Докажите, что в каждой строке таблицы все числа разные.

Задача 6. С натуральным числом в десятичной системе можно выполнить следующие действия

I) приписать в конец 4;
II) приписать в конец 0;
III) разделить на 2 (если число чётно).

Например, если с числом 4 выполнить действия В, А, Б и В, то получим число 120.

a) Можно ли из числа 4 получить число 2019?
b) Перечислите все числа, которые нельзя получить из числа 4.

Неравенства в геометрии

Э. Р. Мацонашвили, С. А. Губанов

Задача 1. На биссектрисе внешнего угла C треугольника ABC взяли произвольную точку M отличную от точки C. Докажите, что $MA + MB > CA + CB$.

Задача 2. В треугольнике ABC $\angle A = 60°$. Докажите, что $AB + AC > 2BC$.

Задача 3. Два противоположных угла выпуклого четырехугольника тупые. Докажите, что диагональ соединяющая вершины этих углов, меньше другой диагонали.

Задача 4. Точка C лежит внутри прямого угла AOB. Докажите, что периметр треугольника ABC больше $2OC$.

Задача 5. Диагонали выпуклого четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке E. Известно, что $AB = BC = DC = DE = 1$. Докажите, что $AD < 2$.

Задача 6. В треугольнике ABC медианы AD и BE пересекаются в точке M. Докажите, что если угол AMB a) прямой; b) острый, то $AC + BC > 3AB$.

Задача 7. Докажите, что в любом описанном около окружности многоугольнике найдутся три стороны, из которых можно составить многоугольник.

Задача 8. Существует ли такой выпуклый четырехугольник и точка внутри него, что сумма расстояний от этой точки до вершин четырехугольника больше периметра четырехугольника?

Перекладывания

Э. Р. Мацонашвили, С. А. Губанов

Задача 1. (Ключевой факт) В треугольниках ABC и $A'B'C'$ $AB = A'B'$ и $\angle BAC + \angle B'A'C' = 180°$. Докажите, что равенство сторон BC и $B'C'$ равносильно равенству углов $\angle BCA$ и $\angle B'C'A'$.

Задача 2. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$: $AD = BC$; $\angle ABD + \angle CDB = 180°$. Докажите, что $\angle BAD = \angle BCD$.

Задача 3. Пусть K — середина стороны BC треугольника ABC. На лучах AB и AC взяты точки X и Y соответственно таким образом, что $AX = AY$ и точка K лежит на отрезке XY. Докажите, что $BX = CY$.

Задача 4. В четырехугольнике $ABCD$ внешний угол при вершине A равен углу BCD, $AD = CD$. Докажите, что BD — биссектриса угла ABC.

Задача 5. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$, в котором $AB = CD$, на сторонах AB и CD выбраны точки K и M соот-

ветственно. Оказалось, что $AM = KC$, $BM = KD$. Докажите, что угол между прямыми AB и KM равен углу между прямыми KM и CD.

Задача 6. В неравнобедренном треугольнике ABC биссектрисы AA_1 и BB_1 пересекаются в точке I. Найдите $\angle C$, если $A_1I = B_1I$.

ГМТ

Э. Р. Мацонашвили, С. А. Губанов

Задача 1. Найдите геометрическое место внутренних точек данного угла, сумма расстояний от которых до сторон этого угла равна заданной величине.

Задача 2. Найдите ГМТ, равноудаленных от трех прямых.

Задача 3. Найдите ГМТ центров окружностей, касающихся данной окружности в данной точке.

Задача 4. Найдите ГМТ центров окружностей, имеющих данный радиус и проходящих через данную точку.

Задача 5. Найдите ГМТ центров окружностей, проходящих через две данные точки.

Задача 6. Даны две точки A и B. Проводятся всевозможные окружности с центром в точке B и радиусом, не превосходящим AB, а через точку A — касательные к ним. Найдите ГМТ касания.

Треугольники и точки

Э. Р. Мацонашвили, С. А. Губанов

В треугольнике ABC проведены медианы AA_1, BB_1, CC_1. Треугольник $A_1B_1C_1$ называется *серединным треугольником* треугольника ABC.

Задача 1. Пусть M, M_1 — точки пересечения медиан треугольника ABC и его серединного треугольника соответственно. Найдите длину отрезка MM_1.

Задача 2.

a) Внутри треугольника ABC взяли произвольную точку P и отметили середины отрезков AP, BP, CP (точки P_1, P_2, P_3 соответственно). Докажите, что полученный треугольник $P_1P_2P_3$ равен серединному треугольнику $A_1B_1C_1$ и что прямые A_1P_1, B_1P_2, C_1P_3 пересекаются в одной точке.

b) Докажите, что если в качестве точки P выбрать точку пересечения высот треугольника ABC, то описанные окружности треугольников $A_1B_1C_1$ и $P_1P_2P_3$ совпадают. *При таком выборе треугольник $P_1P_2P_3$ называется треугольником Эйлера.*

Задача 3. Дан треугольник ABC. Точки H_1 и O_1 — точка пересечения высот и центр описанной окружности его серединного треугольника $A_1B_1C_1$. Оказалось, что $A_1O_1 = A_1H_1$. Найдите угол A.

В треугольнике ABC проведены высоты AH_A, BH_B, CH_C. Прямые, содержащие эти высоты, пересекаются в одной точке H, которая называется *ортоцентром* треугольника ABC. Треугольник $H_AH_BH_C$ называется *ортотреугольником* треугольника ABC.

Задача 4. Докажите, что ортоцентр является центром вписанной окружности ортотреугольника.

Задача 5.

a) Найдите ортоцентры треугольников AHB, BHC, AHC.

b) Найдите центры всех трёх вневписанных окружностей (касающихся одной стороны и продолжений двух других) ортотреугольника.

Задача 6. Внутри треугольника ABC взята точка P так, что

$\angle ABP = \angle ACP$, а $\angle CBP = \angle CAP$. Докажите, что P — ортоцентр треугольника ABC.

Задача 7. На сторонах AB, BC и AC треугольника ABC отмечены точки C_1, A_1 и B_1 соответственно так, что $BC_1 = C_1A_1 = A_1B_1 = B_1C$. Докажите, что ортоцентр треугольника $C_1A_1B_1$ лежит на биссектрисе угла A.

Разнобой

Э. Р. Мацонашвили

Задача 1. Григорий выбрал несколько чисел из набора $1, 2, \ldots, 12$. Оказалось, что он не может разбить их на несколько (более одной) групп с одинаковой суммой. Какое наибольшее значение может принимать сумма выбранных Григорием чисел?

Задача 2. Ненулевые целые числа a, b и c удовлетворяют равенству:

$$\frac{a}{c+b^2} = \frac{a+c^2}{b}$$

Докажите, что $a + b + c \leqslant 0$.

Задача 3. Можно ли расставить в квадрате 2019×2019 целые числа, не все из которых нули, так, чтобы в любом квадрате 2×2 и в любом квадрате 3×3 сумма чисел была равна 0?

Задача 4. Дано $a^2 = bc + 1$ и $b^2 = ac + 1$. Найдите все тройки (целых) чисел a, b и c и докажите, что других нет.

Задача 5. Дано натуральное n. Докажите, что у любых целых чисел $a_1, a_2, \ldots, a_{2n+1}$ существует перестановка $b_1, b_2, \ldots, b_{2n+1}$ такая, что $(b_1 - b_2)(b_3 - b_4)\ldots(b_{2n-1} - b_{2n})$ кратно $2^n n!$.

Задача 6. Набор $(b_1, \ldots, b_7)$ является перестановкой набора целых чисел $(a_1, \ldots, a_7)$. Докажите, что число $(a_1-b_1)(a_2-b_2)\ldots(a_7-b_7)$ — четное.

Задача 7. Равносторонний треугольник со стороной 100 разбит параллельными сторонам прямыми трёх направлений на

много маленьких треугольников со стороной 1. Некоторые 77 вершин получившейся треугольной решетки покрасили в синий цвет. Докажите, что найдутся две синие вершины, лежащие на прямой, параллельной одной из сторон большого треугольника.

Про турниры

М. Ю. Дмитриева

Задача 1. В однокруговом турнире участвовали 15 шахматистов. Могло ли оказаться, что каждый из них ровно 5 раз сыграл вничью?

Задача 2. 20 шахматистов сыграли турнир в один круг. Корреспондент «Спортивной газеты» написал в своей заметке, что каждый участник этого турнира выиграл столько же партий, сколько и свел вничью. Докажите, что корреспондент ошибся.

Задача 3. На международный чемпионат по игре в StarCraft съехалось 100 участников. Игра идёт на выбывание, т.е. в каждом матче участвует два игрока, проигравший выбывает из участия в чемпионате, а выигравший — остаётся. Найдите наибольшее возможное количество участников, которые выиграли ровно две партии.

Задача 4. Назовём царем вершину в графе, из которой можно дойти по стрелочкам до любой другой не более чем за 2 хода. В Селестии провели однокруговой турнир по волейболу и построили по нему граф. Докажите, что игрок, у которого больше всего побед, обязательно царь.

Задача 5. В шахматном турнире каждый участник встретился с каждым один раз. В каждом туре каждый участник проводил по одной встрече. Не меньше чем в половине всех встреч оба участника были земляками (из одного города). Докажите, что в каждом туре была хотя бы одна встреча между земляками.

Задача 6. Несколько баскетбольных команд провели турнир в один круг (каждая сыграла с каждой ровно один раз). Известно, что если A выиграла у B, а B выиграла у C, то A выиграла у C. Докажите, что их можно упорядочить так, что если у A номер меньше, чем у B, то A выиграла у B при их встрече.

Указание: попробуйте провести индукцию по количеству вершин.

Задача 7. 20 футбольных команд проводят первенство. В первый день все команды сыграли по одной игре. Во второй также все команды сыграли по одной игре. Докажите, что после второго дня можно указать такие 10 команд, что никакие две из них не играли друг с другом.

Задача 8. В турнире по волейболу n команд сыграли в один круг (каждая играла с каждой по одному разу, ничьих в волейболе не бывает). Пусть P — сумма квадратов чисел, задающих количество побед каждой команды, Q — сумма квадратов чисел, задающих количество их поражений. Докажите, что $P = Q$.

Параллелограммы

Э. Р. Мацонашвили, С. А. Губанов

Задача 1. В треугольнике ABC высоты AF и CP пересекаются в точке H, лежащей внутри треугольника. Известно, что H — середина AF, а $CH : HP = 2 : 1$. Найдите величину угла B.

Задача 2. Дан треугольник ABC, AF диаметр описанной около этого треугольника окружности, точка M середина стороны BC, H ортоцентр данного треугольника. Докажите, что точка M находится на отрезке HF и делит его пополам.

Задача 3. Докажите, что биссектрисы всех четырех углов прямоугольника (не являющегося квадратом) при пересечении образуют квадрат.

Задача 4. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ $\angle A = \angle C = 100°$. На сторонах AB и BC выбраны точки X и Y соответственно так, что $AX = CY$. Оказалось, что прямая YD параллельна биссектрисе угла ABC. Найдите угол AXY.

Задача 5. В выпуклом пятиугольнике $ABCDE$ $AB \parallel DE$, $CD = DE$, CE перпендикулярно BC и AD. Докажите, что прямая, проходящая через A параллельно CD, прямая, проходящая через B параллельно CE, и прямая, проходящая через E параллельно BC, пересекаются в одной точке.

Задача 6. Трапеция $ABCD$ с основаниями AD и BC такова, что угол ABD - прямой и $BC + CD = AD$. Найдите отношение $AD : BC$.

Параллелограмм. Добавка

Э. Р. Мацонашвили, С. А. Губанов

Задача 1. Дан равносторонний треугольник ABC. Точка D выбрана на продолжении стороны AB за точку A, точка E — на продолжении BC за точку C, а точка F — на продолжении AC за точку C так, что $CF = AD$ и $AC + EF = DE$. Найдите $\angle BDE$.

Задача 2. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ углы A и C равны $100°$. На сторонах AB и BC выбраны точки X и Y соответственно так, что $AX = CY$. Оказалось, что прямая YD параллельна биссектрисе угла ABC. Найдите угол AXY.

Задача 3. Дан выпуклый пятиугольник $ABCDE$, причем прямая BE параллельна прямой CD. Внутри пятиугольника выбраны точки F и G таким образом, что $ABCF$ и $AGDE$ — параллелограммы. Докажите, что $CD = BE + FG$.

Задача 4. В трапеции $ABCD$, где $AD \parallel BC$, где $\angle B = \angle A + \angle D$. На продолжении отрезка CD за вершину D отложен отрезок $DK = BC$. Докажите, что $AK = BK$.

В бесконечность и далее

Г. К. Седов

Определение. Набор чисел $\{a_n\}$, $n \in \mathbb{N}$ называется *числовой последовательностью.*

Задача 1. Дорожно-ремонтная организация «Тише едешь – дальше будешь» занимается укладкой асфальта. Организация взяла обязательство покрыть асфальтом 100-километровый участок дороги. В первый день был заасфальтирован 1 км дороги. Далее, если уже заасфальтировано x км дороги, то в следующий день организация покрывает асфальтом еще $\frac{1}{x^{10}}$ км дороги. Наступит ли тот день, когда организация «Тише едешь – дальше будешь» выполнит свое обязательство?

Задача 2. В числовой последовательности 4, 7, 5, 8, 4, 4, 1, ...каждый член, начиная с пятого, равен последней цифре суммы предшествующих четырёх членов. Встретится ли в этой последовательности следующие подпоследовательности:

a) $1, 2, 3, 4$ b) $4, 7, 5, 8$ c) $2, 2, 4, 7$?

Определение. Последовательностью чисел Фибоначчи называется числовая последовательность $\{F_n\}$ следующего вида: $F_1 = 1, F_2 = 1, F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$, $n \geqslant 3$.

Задача 3. Чему равняется количество последовательностей длины 9 из букв «Э» и «Р», где буква «Р» не встречается дважды подряд?

Задача 4. Докажите тождество $F_1^2 + F_2^2 + \cdots + F_n^2 = F_n F_{n+1}$.

Задача 5. Докажите, что для любого n найдется прямоугольник, который можно разрезать на n квадратов так, чтобы среди них было не более двух равных.

Задача 6. Докажите тождество $F_{n+1}F_{n-1} - F_{n^2} = (-1)^n$.

Задача 7. Вычислите сумму $\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{2}{1\cdot 3} + \cdots + \frac{F_n}{F_{n-1}\cdot F_{n+1}}$.

Задача 8. Докажите, что два соседних числа Фибоначчи взаимно просты.

Задача 9. Докажите, что при $n > 1$, $m > 0$ выполняется тождество

$$F_{n+m} = F_{n-1}F_m + F_nF_{m+1}.$$

Задача 10. Докажите, что $(F_m, F_n) = F_{(m,n)}$.

Задача 11. Докажите, что $C_n^0 + C_{n-1}^1 + C_{n-2}^2 + \ldots = F_{n+1}$.

Задача 12. В последовательности чисел Фибоначчи выбрано 8 чисел, идущих подряд. Докажите, что их сумма не является числом Фибоначчи.

Увидеть граф

М. Ю. Дмитриева

Задача 1. Выписаны 1000 целых чисел. Докажите, что их можно покрасить в два цвета так, чтобы отношение чисел одинакового цвета не было простым числом.

Задача 2. Есть m болельщиков: некоторые из них (возможно, все или никто) болеют за «Спартак», а остальные — за «Динамо». Разрешается спросить у любых двоих, болеют ли они за разные команды, и они честно ответят «да» или «нет». Требуется посадить болельщиков в два автобуса так, чтобы в каждом были болельщики только одной команды. За какое минимальное количество вопросов это наверняка можно сделать?

Задача 3. Клетчатая плоскость раскрашена в 10 цветов. (Каждая клетка окрашена в один цвет.) Любые две соседние клетки окрашены в разные цвета. Назовём пару цветов *хорошей*, если есть две соседние клетки, окрашенные в эти цвета. Какое наименьшее количество хороших пар?

Задача 4. Хозяйка испекла для гостей пирог. К ней может прийти либо p, либо q человек (p и q взаимно просты). На какое наименьшее число кусков ей нужно заранее разрезать пирог так, чтобы его можно было поделить поровну как между p, так и между q гостями?

Задача 5. Пусть m — целое положительное число. Дана таблица $4m \times 4m$, состоящая из единичных клеток. Две различные клетки назовём родственными, если они находятся в одной строке или в одном столбце. Никакая клетка не является родственной для самой себя. Некоторые клетки были окрашены в синий цвет, при этом оказалось, что у каждой клетки таблицы не менее двух родственных ей синих клеток. Найдите наименьшее возможное количество синих клеток.

Задача 6. В прямоугольной таблице расставлены вещественные, но нецелые числа так, что сумма чисел в каждом столбце и в каждой строке целая. Всегда ли можно округлить каждое число (то есть заменить на одно из двух ближайших целых чисел) так, чтобы сумма чисел в каждой строчке и каждом столбце не изменилась?

Задача 7. Множество клеток на клетчатой назовём *ладейно связным*, если из каждой его клетки можно попасть в любую другую, двигаясь по клеткам этого множества ходом ладьи (ладья может перелетать через поля, не принадлежащие нашему множеству). Докажите, что ладейно связное множество из $2n$ клеток можно разбить на пары клеток, лежащих в одной строке или в одном столбце.

Задача 8. Раскрашенный в черный и белый цвета кубик поставили на одну из клеток шахматной доски $n \times n$ и прокатили по ней так, чтобы кубик побывал на каждой клетке ровно по одному разу. Мог ли кубик быть раскрашен так, что каждый раз цвета клетки и соприкоснувшейся с ней грани совпадали?

Задача 9. Петя разрезал таблицу 6×6 на доминошки. Вася пы-

тается угадать, как именно Петя это сделал. Для этого он может показывать на любые две соседние клетки и спрашивает, присутствует ли эта доминошка в разрезании. За какое наименьшее количество вопросов Вася сможет восстановить все доминошки разрезания?

Преобразования

П. П. Евсеев,

Задача 1. Вычислите произведение

$$(1-\frac{1}{2^2})(1-\frac{1}{3^2})\dots(1-\frac{1}{100^2}).$$

Задача 2. Сумма чисел x, y, z отлична от 0. Докажите, что сумма

$$x\frac{y-z}{y+z}+y\frac{z-x}{x+z}+z\frac{x-y}{y+x}$$

тогда и только тогда равна 0, когда хотя бы два из чисел x, y, z равны.

Задача 3. Докажите, что если a, b, c — целые числа, такие, что $3a+1004b+2006c=0$, то число $N=2ac-3a^2$ делится на 2008.

Задача 4. Натуральные числа a, b, c, d, e, f удовлетворяют соотношению $a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca=de+ef+fd$. Докажите, что число $a^2+b^2+c^2+d^2+e^2+f^2$ — составное.

Задача 5. Найдите наибольший простой делитель числа $99!+100!+101!$.

Задача 6. Взаимно простые в совокупности натуральные числа a, b, c удовлетворяют условию $a^2+b^2+c^2=2(ab+bc+ca)$. Докажите, что все они — квадраты натуральных чисел.

Задача 7. Пусть n — натуральное число. Для каждого его простого делителя p рассмотрим наибольшую его степень, не превосходящую n. Сумму всех таких степеней назовем степенной

суммой числа n. Докажите, что существует бесконечно много натуральных чисел, степенные суммы которых превосходят их более, чем в полтора раза.

Задача 8. Пусть a, b, c, n — натуральные числа такие, что $(a + bc)(b + ac) = 5^n$. Докажите, что n четно.

Много ли мало?..

Г. К. Седов

Задача 1. Существует ли такая последовательность, в которой каждое натуральное число встречается бесконечное число раз?

Задача 2. Верно ли, что в ряду натуральных чисел найдётся сколь угодно много последовательных составных чисел? А бесконечно много последовательных составных чисел?

Задача 3. Верно ли, что в любом множестве натуральных чисел можно выбрать наименьшее? А в множестве действительных чисел?

Задача 4. Бизнесмен заключил с чертом соглашение: каждый день бизнесмен даёт черту одну купюру, а взамен получает любое число купюр, какое захочет, но меньшего достоинства. Докажите, что рано или поздно бизнесмен разорится. (Номиналов купюр всего конечное число; другого источника купюр у бизнесмена нет; взамен самой маленькой купюры он ничего не получает.)

Задача 5. Круг радиуса 1 км раскрашен в два цвета. Докажите, что найдутся две точки разного цвета на расстоянии 1 мм.

Задача 6. Натуральные числа раскрасили в два цвета. Обязательно ли существует одноцветная бесконечная возрастающая арифметическая прогрессия (последовательность, в которой разность соседних членов всегда одна и та же)?

Задача 7. Круг разделен на 2018 секторов, в каждом написано натуральное число. В одном из секторов стоит фишка. Каждую минуту прочитывается число в секторе, где стоит фишка (пусть прочитано число k), фишка сдвигается на k секторов по часовой стрелке, и там, куда она попадает, число увеличивается на 1. Докажите, что через некоторое время все числа станут больше 10^{2019}.

Добавка к последовательностям

Г. К. Седов

Задача 1. Существует ли такая последовательность, в которой каждое натуральное число встречается бесконечное число раз?

Найдите суммы разностным методом (2-6):

Задача 2.

$$1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \cdots + n \cdot n!$$

Задача 3.

$$\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \cdots + \frac{2018}{2019!}$$

Задача 4.

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + ... + n(n+1)$$

Задача 5.

$$\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{2018 \cdot 2019 \cdot 2020}$$

Задача 6.

$$\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} + \cdots + \frac{1}{2018 \cdot 2019 \cdot 2020 \cdot 2021}$$

Задача 7. На доску последовательно выписываются натуральные числа. Первое число выписано произвольно, и каждое выписанное не может быть представлено в виде суммы чисел, выписанных ранее (даже если использовать каждое ранее выписанное несколько раз). Может ли этот процесс продолжаться бесконечно?

Задача 8. Вычислите сумму четвертых степеней первых n натуральных чисел.

3. Третья неделя

Прыжки по кругу

А. Ю. Кушнир

Задача 1. Даны натуральные числа n и k, $n > k$. На окружности отмечено n точек, в одной из которых изначально сидит кузнечик. Этот кузнечик может прыгать вдоль окружности по часовой стрелке по отмеченным точкам, каждый раз перепрыгивая через $k-1$ точку. a) При каком условии на n и k кузнечик, совершая прыжки, побывает в каждой отмеченной точке? b) В скольких отмеченных точках побывает кузнечик в общем случае?

Задача 2. По кругу расположены n луночек, в одной из которых лежит мина. Петя и кузнечик играют в следующую игру. В начале игры кузнечик запрыгивает в одну из луночек. Далее за каждый ход Петя называет натуральное число k (числа k могут отличаться на разных ходах), а кузнечик прыгает на k луночек по часовой либо против часовой стрелки на свой выбор. При каких n Петя сможет взорвать кузнечика? И Петя, и кузнечик знают расположение мины.

Задача 3. Даны натуральные n и k, $k < n$. Имеются красные и синие бусинки. Составляется круговое ожерелье из n бусинок. Ожерелье называется *счастливым*, если в нем нет двух красных бусинок, между которыми ровно $k-1$ бусинок. Какое наибольшее количество красных бусинок может быть в счастливом ожерелье?

Задача 4. В вершинах правильного n-угольника расставлены числа от 1 до n так, что все расстояния между парами чисел с разницей 1 одинаковые. Известно, что в трех подряд идущих вершинах стоят числа 179, 57, 1514. Найдите n.

Задача 5. Окружность длины n разделена точками на n равных дуг. Кузнечик начинает прыгать с некоторой точки и делает $n-1$ прыжков: на 1, на 2, ..., на $n-1$ по часовой стрелке **в некотором** порядке. При каких n кузнечик сможет посетить все отмеченные точки?

Задача 6. Окружность длины n разделена точками на n равных дуг. Кузнечик начинает прыгать с некоторой точки и делает $n-1$ прыжков: на 1, на 2, ..., на $n-1$ по часовой стрелке **в указанном** порядке. При каких n кузнечик побывает во всех отмеченных точках?

Задача 7. Даны натуральные n и k, $k < n$. В фирме работают n сотрудников, зарплата каждого из которых выражается натуральным числом рублей. Каждый месяц начальник поднимает зарплату на 1 рубль некоторым k сотрудникам. При каких n и k он сможет сделать все зарплаты равными вне зависимости от начального распределения зарплат?

Симметрия

Э. Р. Мацонашвили, С. А. Губанов

Задача 1. Дан вписанный четырёхугольник $ABCD$, в котором

$BC = CD$. Точка E — середина диагонали AC. Докажите, что $BE + DE \geqslant AC$.

Задача 2. Диагонали выпуклого четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке E, $AB = BC$, DB — биссектриса угла D, $\angle ABC = 100°$, $\angle BEA = 70°$. Найдите угол CAD.

Задача 3. Бильярд имеет форму прямоугольного треугольника, один из острых углов которого равен $30°$. Из этого угла по медиане противоположной стороны выпущен шар (материальная точка). Доказать, что после восьми отражений (угол падения равен углу отражения) он попадёт в лузу, находящуюся в вершине угла $60°$.

Задача 4. В треугольнике ABC проведены медианы AF и CE. Докажите, что если $\angle BAF = \angle BCE = 30°$, то треугольник ABC правильный.

Задача 5. Диагонали AD и BE выпуклого пятиугольника $ABCDE$ пересекаются в точке P. Известно, что $AC = CE = AE$, $\angle APB = \angle ACE$ и $AB + BC = CD + DE$. Докажите, что $AD = BE$.

Задача 6. На стороне AC треугольника ABC отмечена точка K. Оказалось, что $\angle ABK = 7°$ и $\angle ABC = 77°$. Докажите, что $2AK + AC > BC$.

Задача 7. Дан равнобедренный треугольник ABC ($AB = AC$). Пусть l — прямая, проходящая через точку A параллельно BC, D — произвольная точка на прямой l. Обозначим через E и F основания перпендикуляров, опущенных из точки A на BD и CD соответственно. Пусть P и Q — основания перпендикуляров, опущенных из точек E и F на прямую l. Докажите, что $AP + AQ \leqslant AB$.

Комбинаторно-алгебраический разнобой

М. Ю. Дмитриева

Задача 1. Дана бесконечная вправо последовательность цифр и натуральное число l. Докажите, что можно выбрать несколько цифр подряд, образующих число, делящееся на l, если l — нечетное число, не делящееся на 5.

Задача 2. На доске выписано n различных действительных чисел. Егор посчитал все их попарные суммы (не складывая числа сами с собой) и записал в тетрадь. Какое наименьшее число чисел у него могло получиться?

Задача 3. Пусть n — нечетное целое положительное число, а x_1, x_2, ..., x_n — неотрицательные действительные числа. Докажите, что $\min\limits_{i=1,\ldots,n}(x_i^2 + x_{i+1}^2) \leqslant \max\limits_{i=1,\ldots,n}(2x_j x_{j+1})$, где $x_{n+1} = x_1$.

Задача 4. Существует ли бесконечная последовательность a_1, a_2, a_3, ...натуральных чисел, удовлетворяющая равенству

a) $a_{n+2} = a_{n+1} + \sqrt{a_{n+1}}$
b) $a_{n+2} = a_{n+1} + \sqrt{a_{n+1} + a_n}$

для любого натурального значения n?

Задача 5. Даны многочлены $P(x)$ и $Q(x)$ с целыми коэффициентами. Обозначим $a_n = n! + n$. Докажите, что если $\frac{P(a_n)}{Q(a_n)}$ целое при всех натуральных n, то $\frac{P(n)}{Q(n)}$ целое при всех таких n, что $Q(n) \neq 0$.

Задача 6. Докажите, что для любого натурального m существует такое n, что 2 входит в разложение $n!$ в степени, делящейся на m.

Задача 7. На столе лежит куча из более чем n^2 камней. Петя и Вася по очереди берут камни из кучи, первым берет Петя. За один ход можно брать любое простое число камней, меньшее n, либо любое кратное n число камней, либо один камень. Докажите, что Петя может действовать так, чтобы взять последний камень независимо от действий Васи.

Задача 8. В бесконечной последовательности a_1, a_2, a_3, ...число a_1 равно 1, а каждое следующее число a_n строится из предыдущего a_{n-1} по правилу: если у числа n наибольший нечётный

делитель имеет остаток 1 от деления на 4, то $a_n = a_{n-1} + 1$, если же остаток равен 3, то $a_n = a_{n-1} - 1$. Докажите, что в этой последовательности

a) число 1
b) каждое натуральное число

встречается бесконечно много раз.

Разнобой

Э. Р. Мацонашвили

Задача 1. Равносторонний треугольник со стороной 100 разбит параллельными сторонам прямыми трёх направлений на много маленьких треугольников со стороной 1. Некоторые 77 вершин получившейся треугольной решетки покрасили в синий цвет. Докажите, что найдутся две синие вершины, лежащие на прямой, параллельной одной из сторон большого треугольника.

Задача 2. Решите в целых числах уравнение $x^2y^2 - xy = (x^2 - x) + (y^2 - y)$.

Задача 3. В ряд выложено 100 монет. Внешне все монеты одинаковы, но где-то среди них лежат подряд 50 фальшивых (а остальные — настоящие). Все настоящие монеты весят одинаково, фальшивые могут весить по-разному, но каждая фальшивая легче настоящей. Можно ли с помощью одного взвешивания на чашечных весах без гирь найти хотя бы 34 настоящие монеты?

Задача 4. На столе стоят три стопки дисков. В каждой стопке снизу лежат 11 черных дисков, потом 10 белых, потом 9 черных, 8 белых, ..., 1 черный. Петя и Вася по очереди берут диски из стопок. Каждым ходом нужно взять несколько одноцветных дисков с верха одной стопки. Начинает Петя. Проигрывает тот, кто взял последний диск. Кто выиграет при правильной игре?

Задача 5. Существует ли натуральное число n, которое можно представить как в виде $n = a^2 - b$, так и в виде $n = b^2 - c$, где a, b и c — три различных натуральных делителя числа n?

Задача 6. Несколько теннисистов играют на вылет: тот, кто проиграл, не принимает участия в дальнейших партиях. Тот, кто выбил хотя бы двоих, получает звание мегаигрока. Докажите, что в любой момент турнира обычных игроков среди вылетевших больше, чем мегаигроков.

Задача 7. В селении живут 100 человек в возрасте 1, 2, ..., 100 лет. Два человека могут образовывать счастливую пару, если возраст каждого из них хотя бы на 7 лет больше половины возраста другого. Какое наибольшее количество (непересекающихся) счастливых пар можно составить из жителей селения?

Воробьиные лапки

С. А. Губанов

Дан треугольник ABC. Обозначим через

- I, I_A, I_B, I_C — центры вписанной и вневписанных окружностей, касающихся противоположных указанным вершинам сторон,
- W_A, W_B, W_C — середины дуг BC, AC, AB соответственно, не содержащих указанные вершины,
- W'_A, W'_B, W'_C — середины соответствующих дополнительных дуг,
- A_0, B_0, C_0 — точки на сторонах BC, AC, AB соответственно.

Задача 1. (Теорема о лапке) $W_BA = W_BC = W_BI = W_BI_B$.

Задача 2. (Теорема о сломанной лапке) $W'_BI_A = W'_BI_C = W'_BA = W'_BC$.

Задача 3. (Первый воробей) A_0, B, W'_B, C_0 лежат на одной окружности $\Leftrightarrow AC_0 = CA_0$.

Задача 4. (Второй воробей) A_0, B, C_0, I лежат на одной окружности $\Leftrightarrow AC_0 + CA_0 = AC$.

Задача 5. Дан треугольник ABC. На продолжении стороны AB за точку B взяли точку C_1 такую, что $AC_1 = AC$. Докажите, что точки C_1, B, I, C лежат на одной окружности.

Задача 6. Вписанная окружность треугольника ABC касается сторон AB и AC в точках D и E соответственно, а O — центр описанной окружности треугольника BCI. Докажите, что $\angle ODB = \angle OEC$.

Задача 7. В треугольнике ABC выбрана такая точка P, что $\angle PBA + \angle PCA = \angle PBC + \angle PCB$. Докажите, что $AP \geqslant AI$, причем равенство выполняется тогда и только тогда, когда точка P совпадает с I.

Задача 8. На сторонах BA и BC треугольника ABC выбраны точки C_0 и A_0 соответственно, а точки M и M_0 — середины отрезков AC и A_0C_0. Докажите, что если $AC_0 = CA_0$, то прямая MM_0 параллельна биссектрисе $\angle ABC$.

Задача 9. Пусть на стороне AC выбрана точка D. Обозначим через I_A и I_C центры вписанных окружностей треугольников ABD и CBD, а через B_0 — точку касания вписанной окружности треугольника ABC со стороной AC. Докажите, что угол $I_AB_0I_C$ прямой.

Задача 10. Точки E и F - середины большой дуги и малой дуги AC окружности, описанной около остроугольного неравнобедренного треугольника ABC ($AB < BC$). Опустим перпендикуляр EG на BC. Докажите, что описанная окружность треугольника ABG проходит через середину отрезка BF.

Подобие

Э. Р. Мацонашвили, С. А. Губанов

Задача 1. Даны три отрезка a, b и c, постройте отрезок $x = bc/a$.

Задача 2. В треугольнике ABC все углы различны. Прямая, проходящая через вершину B, разбивает треугольник ABC на два подобных треугольника. Найдите величину угла B.

Задача 3. Отрезки AH и BP — высоты треугольника . Докажите, что треугольники PCH и ABC подобны.

Задача 4. Докажите, что биссектриса треугольника делит противоположную сторону на отрезки, пропорциональные двум другим сторонам.

Задача 5. Докажите, что в прямоугольном треугольнике справедливы следующие соотношения:

a) $h^2 = a_1 b_1$;
b) $b^2 = b_1 c$;
c) $a^2 = a_1 c$,

где b_1 и a_1 — проекции катетов b и a на гипотенузу, a и b — катеты, c — гипотенуза, h — высота, проведенная из вершины прямого угла.

Задача 6. Докажите, что в прямоугольном треугольнике квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов: $c^2 = a^2 + b^2$.

Задача 7. Докажите, что треугольник с вершинами в серединах сторон данного треугольника подобен ему.

Задача 8. Докажите, что точки H, M и O (ортоцентр, точка пересечения медиан и центр описанной окружности) произвольного треугольника лежат на прямой, причем точка M делит отрезок в отношении 2:1.

Целые числа

П. П. Евсеев

Задача 1. Решите в натуральных числах уравнение $3^n + 7 = 2^m$.

Задача 2. Решите в натуральных числах уравнение $5^k - 3^n = 16$.

Задача 3. Решите в натуральных числах уравнение $3^x + 4^y = 5^z$.

Задача 4. Решите в целых числах уравнение $x^2 + y^2 - 5xy + 4 = 0$.

Задача 5. Решите уравнение для целых x, y и простого p: $x^3 + 3xy(x+y) + 2y^3 = p$.

Задача 6. Решите в целых числах уравнение $c^2 = n^2 + 5n + 23$.

Задача 7. Найдите все такие натуральные m, n и простые p, что число $\frac{7^m + 2^n p}{7^m - 2^n p}$ — натуральное.

Планарные графы

Э. Р. Мацонашвили

Договоримся, что будем рассматривать графы без петель и кратных ребер. *Плоский граф* — граф, изображенный на плоскости без пересечений ребер. *Планарный граф* — граф, который можно представить в виде плоского графа.

Задача 1.

a) (Формула Эйлера) Пусть связный плоский граф с V вершинами и E ребрами делит плоскость на F частей. Докажите, что $V - E + F = 2$.

b) Придумайте обобщение формулы Эйлера на случай несвязного графа.

Задача 2.

a) Докажите, что в плоском графе $2E \geqslant 3F$.

b) Докажите, что если в двудольном плоском графе $E \geqslant 2$, то $E \geqslant 2F$.

c) Пусть любой цикл в планарном графе, в котором $V \geqslant 3$, имеет длину не менее k. Докажите, что $E \leqslant \frac{k}{k-2}(V-2)$.

d) Докажите, что в любом планарном графе найдётся вершина степени не более, чем 5.

Задача 3. Докажите, что вершины любого планарного графа можно *правильно* раскрасить в 5 цветов. При *правильной* раскраске любые две вершины, соединенные ребром, должны быть разных цветов.

Задача 4.

a) Докажите, что полный граф с пятью вершинами (обозначается K_5) непланарен.

b) (Домики и колодцы) Докажите, что нельзя построить три дома, вырыть три колодца и соединить тропинками каждый дом с каждым колодцем так, чтобы тропинки не пересекались. *Иначе говоря, двудольный граф $K_{3,3}$ непланарен.*

Задача 5. n-угольник. В его вершины можно ставить сторожей. Скажем, что сторож в вершине A видит внутреннюю точку многоугольника M, если отрезок AM полностью лежит внутри n-угольника. Докажите, что для охраны всего n-угольника будет достаточно $\left[\frac{n}{3}\right]$ сторожей.

Задача 6. (Теорема Фари) Докажите, что всякий планарный граф можно изобразить на плоскости так, чтобы все его ребра были отрезками.

Радикальная ось

Н. В. Горюнова

Задача 1. Докажите, что:

a) если хорды AB и CD окружности пересекаются в точке S, то $AS \cdot BS = CS \cdot DS$.

b) если из точки P к окружности проведены две секущие, пересекающие окружность в точках A, B и C, D соответственно,

то $AP \cdot BP = CP \cdot DP$. (Пропорциональность отрезков хорд и секущих окружности)

Задача 2. Если через точку M проведены касательная MK (K — точка касания) и секущая, пересекающая окружность в точках A и B, то $MK^2 = MA \cdot MB$. (Теорема о квадрате касательной)

Задача 3. На плоскости даны окружность w и точка P. Прямая, проведенная через точку P, пересекает окружность в точках A и B.

a) Докажите, что произведение $PA \cdot PB$ не зависит от выбора прямой.

Эта величина, взятая со знаком плюс для точки P вне окружности и со знаком минус для точки P внутри окружности, называется степенью точки P относительно окружности w.

b) Докажите, что для точки P, лежащей вне окружности w, ее степень относительно w равна квадрату длины касательной, проведенной из этой точки.

c) Докажите, что степень точки P относительно окружности w равна $|d^2 - R^2|$, где R — радиус w, d — расстояние от точки P до центра w.

d) Докажите, что на прямой существует единственная точка , такая, что $AM^2 - BM^2 = k^2$, где k — данное число.

e) (Теорема) Докажите, что геометрическим местом точек, чьи степени относительно двух неконцентрических окружностей равны, есть прямая, перпендикулярная к линии центров этих окружностей. (Эта прямая называется *радикальной осью двух окружностей.*)

Задача 4. Докажите, что:

a) общая касательная двух окружностей делится их радикальной осью пополам;

b) радикальная ось двух пересекающихся окружностей проходит через точки их пересечения;

c) радикальная ось двух касающихся окружностей есть их общая касательная, проведённая в точке касания;
d) радикальная ось двух непересекающихся окружностей не пересекает ни одну из них.

Задача 5. *(Радикальный центр трех окружностей)* На плоскости даны три окружности, центры которых не лежат на одной прямой. Проведем радикальные оси для каждой пары этих окружностей. Докажите, что все три радикальные оси пересекаются в одной точке.

Задача 6. Докажите, что середины четырех общих касательных к двум непересекающимся кругам лежат на одной прямой.

Задача 7. Через две из точек касания общих внешних касательных с двумя окружностями проведена прямая. Докажите, что окружности высекают на этой прямой равные хорды.

Задача 8. На сторонах BC и AC треугольника ABC взяты точки A_1 и B_1; l — прямая, проходящая через общие точки окружностей с диаметрами AA_1 и BB_1. Докажите, что:

a) прямая l проходит через точку H пересечения высот треугольника ABC;
b) прямая l тогда и только тогда проходит через точку C, когда $AB_1 : AC = BA_1 : BC$.

НОД и чуть-чуть НОК

П. П. Евсеев

Задача 1. Докажите, что НОК$(a, b)\cdot$НОД(a, b)=ab.

Задача 2. Петя посчитал НОК всех чисел от 1 до 1000, а Вася — НОК всех чисел от 501 от 1000. У кого результат получился больше и во сколько раз?

Задача 3. Найдите наибольшее трехзначное число n, для которого НОД$(n, 1080) = 36$.

Задача 4. Даны шесть натуральных чисел. Для каждой пары чисел посчитали их НОД. Могут ли среди этих НОДов встречаться все натуральные числа от 1 до 15?

Задача 5. Учитель записал Пете в тетрадь четыре различных натуральных числа. Для каждой пары этих чисел Петя нашел их наибольший общий делитель. У него получились шесть чисел: 1, 2, 3, 4, 5 и N, где $N > 5$. Какое наименьшее значение может иметь число N?

Раскраски

Д. А. Байгушев

Задача 1.

a) Можно ли разбить квадрат 8×8 с отрезанным уголком на прямоугольники 1×3?
b) Можно ли разрезать квадрат 10×10 на прямоугольники 1×4?

Задача 2. На каждой из клеток доски размером 9×9 находится фишка. Петя хочет передвинуть каждую фишку на соседнюю по стороне клетку так, чтобы снова в каждой из клеток оказалось по одной фишке. Сможет ли Петя это сделать?

Задача 3. Можно ли разрезать квадрат 8×8 на 17 вертикальных и 15 горизонтальных доминошек?

Задача 4. Отметьте на доске 8×8 несколько клеток так, чтобы любая (в том числе и любая отмеченная) клетка граничила по стороне ровно с одной отмеченной клеткой.

Задача 5. Кусок сыра имеет форму кубика $3 \times 3 \times 3$, из которого вырезан центральный кубик. Мышь начинает грызть этот кусок сыра. Сначала она съедает некоторый кубик $1 \times 1 \times 1$. После того, как мышь съедает очередной кубик $1 \times 1 \times 1$, она приступает к съедению одного из соседних (по грани) кубиков с только что съеденным. Сможет ли мышь съесть весь кусок сыра?

Задача 6. В квадрате 7×7 клеток размещено 16 плиток размером 1×3 и одна плитка 1×1. Докажите, что плитка 1×1 либо лежит в центре, либо примыкает к границам квадрата.

Индукция

Э. Р. Мацонашвили

Задача 1. Докажите, что $1^2 + 3^2 + \ldots + (2k-1)^2 = \frac{k(4k^2-1)}{3}$.

Задача 2. Определим число $n?$ («эн вопросиал») следующим образом: $1? = 1$, $n? = \frac{n}{(n-1)?}$ для всех $n > 1$. Докажите, что $n? \times n!$ — квадрат натурального числа.

Задача 3. Для каких натуральных n выполнено неравенство $2^n > n^3$?

Задача 4. Обозначим за $P(n)$ произведение всех простых чисел, меньших n. Докажите, что если $n > 3$, то $P(n) > n$.

Задача 5. Вася написал на $n!$ бумажках все возможные последовательности, содержащие числа от 1 до n по одному разу. Докажите, что можно выложить бумажки по кругу так, чтобы последовательности, написанные на соседних бумажках, отличались лишь перестановкой двух соседних чисел.

Задача 6. В военную часть приехало n незнакомых друг с другом новобранцев. Прапорщик сообщил каждому новобранцу натуральное число так, что сумма всех n чисел равна $2n - 2$. Докажите, что можно познакомить некоторых из них друг с другом так, чтобы каждый новобранец имел количество знакомых, равное числу, которое ему сообщил прапорщик.

Задача 7. На ежегодный слет-проверку съехались 100 бригад СЭС и поселились в 100 корпусах. Каждая бригада хочет проверить три корпуса (заранее сообщая номера начальнику лагеря) и тут же уехать из лагеря. Докажите, что начальник может составить расписание проверок так, чтобы никакую бригаду не

проверяли более трех раз (проверять пустые корпуса можно сколько угодно раз).

Задача 8. В стране n городов. Каждые два города соединены дорогой. По указу Парламента Министерству транспорта необходимо вести учет всех циклических туристических маршрутов. Докажите, что министерство транспорта может так ввести одностороннее движение на дорогах, чтобы из любого города можно было доехать до любого другого и для каждого $k \leqslant n$ циклических маршрутов длины k было ровно $n - k + 2$ (то есть чтобы учета нужно было вести как можно меньше).

Многочлены

П. П. Евсеев

Задача 1. Найдите коэффициент многочлена $(x^8 + x^5 + 1)^{20}$ при a) x^7; b) x^{18}.

Задача 2. Разделите с остатком a) $x^2 - x + 1$ на $x - 2$; b) $x^6 + 1$ на $x^2 + x$; c) $x^n - 1$ на $x - 1$; d) $x^n + 1$ на $x + 1$.

Задача 3. Найдите все натуральные n, при которых число $2n^3 + 3n^2 + 4n + 3$ делится на число $n^2 + 1$.

Задача 4. Докажите, что при любых целых неотрицательных l, m, n многочлен $x^{3l+2} + x^{3m+1} + x^{3n}$ делится на $x^2 + x + 1$.

Задача 5. Многочлен f дает остаток 2 при делении на $x - 2$ и остаток 5 при делении на $x - 3$. Какой остаток многочлен f будет давать при делении на $(x - 2)(x - 3)$?

Задача 6. Докажите, что значение многочлена в точке c совпадает с остатком от деления его на многочлен $x - c$.

Задача 7. Докажите, что многочлен делится на $x - c$ тогда и только тогда, когда c является его корнем.

Задача 8. Пусть c_1, ..., c_k — различные вещественные числа. Докажите, что многочлен f делится на произведение $(x -$

$c_1)\dots(x-c_k)$ тогда и только тогда, когда все c_i являются корнями f.

Задача 9. Докажите, что если значения многочленов f и g совпадают во всех точках, то есть $f(c) = g(c)$ для любого c, то многочлены f и g совпадают.

Задача 10. Докажите, что для любых натуральных чисел n и k (где $n > k$) существует натуральное число, которое при делении на числа 1, 2, ..., n дает ровно k различных остатков.

Задача 11. Пусть $P(x)$ — произвольный многочлен с целыми коэффициентами, причем известно, что многочлены $P(x)$ и $P(P(P(x)))$ имеют общий вещественный корень. Докажите, что эти многочлены имеют общий целый корень.

Задача 12. Докажите, что для любого многочлена $P(x)$ с целыми коэффициентами и любых различных целых чисел a и b число $P(a) - P(b)$ делится на $a - b$.

Задача 13. Найдите все натуральные n, для которых существует многочлен $p(x)$ с целыми коэффициентами такой, что $p(d) = n/d$ для всех натуральных делителей d числа n.

Алгоритмы

П. В. Бибиков

Задача 1. По кругу стоят 200 студентов из 10 групп, в каждой из которых 20 студентов. Докажите, что можно в каждой группе выбрать старосту так, чтобы никаких два старосты не стояли рядом.

Задача 2. Есть набор грузов общей массой 9 тонн, причем каждый груз весит не более 1 тонны. Эти грузы нужно перевезти на машинах, каждая из которых может перевозить суммарный вес не более 3 тонн. Какого наименьшего количества машин заведомо будет достаточно?

Задача 3. Пусть n — натуральное число. Найти наименьшее целое k, для которого выполнено следующее условие: любой набор вещественных чисел a_1, ..., $a_d \in [0; 1]$, таких, что $a_1 + \ldots + a_d = n$ можно разбить на k групп, сумма чисел в каждой из которых не превосходит 1.

Задача 4. Можно ли выбрать 2019 различных натуральных чисел, не превосходящих 100000, никакие три из которых не образуют арифметическую прогрессию?

Шары и перегородки

Э. Р. Мацонашвили

Задача 1. В очереди за мороженым стояли 32 семиклассника. Одиннадцать преподавателей ЛМШ пришли и встали в эту очередь так, что между любыми двумя соседними семиклассниками оказалось не более одного преподавателя. В начало и конец очереди никто не вставал. Сколько различных очередей могло получиться?

Задача 2. В ряд стоят пять ящиков. Сколькими способами можно разложить по этим ящикам десять одинаковых шаров так, чтобы ни один ящик не оказался пустым?

Задача 3. В ряд стоят пять ящиков. Сколькими способами можно разложить по этим ящикам десять одинаковых шаров, если разрешается, чтобы ящики оставались пустыми?

Задача 4. Докажите, что:

a) Уравнение $x_1 + x_2 + \ldots + x_k = n$ имеет C_{n-1}^{k-1} решений в натуральных числах.

b) Уравнение $x_1 + x_2 + \ldots + x_k = n$ имеет C_{n+k-1}^{k-1} решений в неотрицательных целых числах.

Задача 5. Сколькими способами можно представить число 1 000 000 000 в виде произведения трех сомножителей, если про-

изведения, отличающиеся порядком множителей, считаются различными?

Задача 6. На полке стоит 12 книг. Сколькими способами можно выбрать из них пять книг так, чтобы никакие две не стояли рядом?

Задача 7. Сколько существует пятизначных чисел, в которых цифры идут в порядке a) возрастания; b) неубывания?

Глава III

8 класс

1. Первая неделя

1.1. Турниры

А. Д. Добряков

Задача 1. Рыцарский турнир длится ровно 7 дней. К концу четвёртого дня сэр Ланселот не успел сразиться лишь с одной четвертью от общего числа участников турнира. А сэр Тристан к этому времени сразился ровно с одной седьмой из тех рыцарей, с кем успел сразиться сэр Ланселот. Какое минимальное количество рыцарей могло участвовать в турнире?

Задача 2. На международный чемпионат по игре в StarCraft съехалось 100 участников. Игра идёт на выбывание, т.е. в каждом матче участвует два игрока, проигравший выбывает из участия в чемпионате, а выигравший — остается. Найдите наибольшее возможное количество участников, которые выиграли ровно две партии.

Задача 3. В круговом шахматном турнире участвует 9 мальчиков и 3 девочки (каждый играет с каждым один раз, победа — 1 очко; ничья — 0,5; поражение — а) x^7; b) x^{18}.

Задача 4. Разделите с остатком а) $x^2 - x + 1$ на $x - 2$; b) $x^6 + 1$ на $x^2 + x$; c) $x^n - 1$ на $x - 1$; d) $x^n + 1$ на $x + 1$.

Задача 5. Найдите все натуральные n, при которых число $2n^3 + 3n^2 + 4n + 3$ делится на число $n^2 + 1$.

Задача 6. Докажите, что при любых целых неотрицательных l, m, n многочлен $x^{3l+2} + x^{3m+1} + x^{3n}$ делится на $x^2 + x + 1$.

Задача 7. Многочлен f дает остаток 2 при делении на $x - 2$ и остаток 5 при делении на $x - 3$. Какой остаток многочлен f будет давать при делении на $(x - 2)(x - 3)$?

Задача 8. Докажите, что значение многочлена в точке c совпадает с остатком от деления его на многочлен $x - c$.

Задача 9. Докажите, что многочлен делится на $x - c$ тогда и только тогда, когда c является его корнем.

Задача 10. Пусть c_1, ..., c_k — различные вещественные числа. Докажите, что многочлен f делится на произведение $(x - c_1) \dots (x - c_k)$ тогда и только тогда, когда все c_i являются корнями f.

Задача 11. Докажите, что если значения многочленов f и g совпадают во всех точках, то есть $f(c) = g(c)$ для любого c, то многочлены f и g совпадают.

Задача 12. Докажите, что для любых натуральных чисел n и k (где $n > k$) существует натуральное число, которое при делении на числа 1, 2, ..., n дает ровно k различных остатков.

Задача 13. Пусть $P(x)$ — произвольный многочлен с целыми коэффициентами, причем известно, что многочлены $P(x)$ и $P(P(P(x)))$ имеют общий вещественный корень. Докажите, что эти многочлены имеют общий целый корень.

Задача 14. Докажите, что для любого многочлена $P(x)$ с целыми коэффициентами и любых различных целых чисел a и b число $P(a) - P(b)$ делится на $a - b$.

Задача 15. Найдите все натуральные n, для которых существует многочлен $p(x)$ с целыми коэффициентами такой, что $p(d) = n/d$ для всех натуральных делителей d числа n.

1.2. Слепые алгоритмы

А. Д. Добряков

Задача 1. 100 включенных и 100 выключенных фонариков случайным образом разложены по двум коробкам. У каждого фонарика есть кнопка, нажатие которой выключает горящий фонарик и зажигает выключенный. Ваши глаза завязаны, и вы не можете видеть, горит ли фонарик. Но вы можете перекладывать фонарики из коробки в коробку и нажимать на них кнопки. Придумайте способ добиться того, чтобы горящих фонариков в коробках было поровну.

Задача 2. В одной из вершин куба ABCDEFGH сидит заяц, но охотникам он не виден. Три охотника стреляют залпом, при этом они могут «поразить» любые три вершины куба. Если они не попадают в зайца, то до следующего залпа заяц перебегает в одну из трех соседних (по ребру) вершин куба. Укажите, как стрелять охотникам, чтобы обязательно попасть в зайца за четыре залпа.

Задача 3. В одном из 1000 окопов, расположенных в ряд, спрятался пехотинец. Пушка может одним выстрелом накрыть любой окоп. В каждом промежутке между выстрелами пехотинец (если уцелел) обязательно перебегает в соседний окоп (быть может, уже обстрелянный). Сможет ли пушка наверняка попасть в пехотинца?

Задача 4. Неуловимый Джо никогда не проигрывает на рулетке больше четырех раз подряд и никогда не ставит больше 10 долларов. Как ему выиграть 1000 долларов? (В случае выигрыша на рулетке возвращается удвоенная ставка; вначале Джо имеет 100 долларов.)

Задача 5. Иван Царевич хочет выйти из круглой комнаты с шестью дверями, пять из которых заперты на ключ. За одну попытку он может проверить

а) любые три двери

b) любые три двери, расположенные подряд, и если одна из них не заперта, то он в неё выйдет. После каждой попытки Баба-Яга запирает дверь, которая была открыта, и отпирает одну из соседних дверей. Какую именно, Иван Царевич не знает. Как ему действовать, чтобы наверняка выйти из комнаты?

Задача 6. Лабиринтом называется клетчатый квадрат 10×10, некоторые пары соседних узлов в котором соединены отрезком — «стеной» таким образом, что переходя из клетки в соседнюю по стороне клетку и не проходя через стены, можно посетить все клетки квадрата. Границу квадрата будем также считать обнесенной стеной. В некоторой клетке некоторого лабиринта стоит робот. Он понимает 4 команды — Л, П, В, Н, по которым соответственно идет влево, вправо, вверх и вниз, а если перед ним «стена», то стоит на месте. Как написать программу для робота, выполняя которую он обойдет все клетки независимо от лабиринта и от своего начального положения?

Задача 7. На бесконечном шоссе находятся полицейская машина (ездит со скоростью до 100 км/ч) и вор на угнанном мотоцикле (ездит со скоростью до 80 км/ч). Полицейские не знают, в каком месте шоссе находится вор. Как им действовать, чтобы наверняка догнать вора? (Вор не может съехать с шоссе или спрятаться).

Задача 8. В тюрьму поместили 100 узников. Надзиратель сказал им: «Я дам вам вечер поговорить друг с другом, а потом рассажу по отдельным камерам, и общаться вы больше не сможете. Иногда я буду одного из вас отводить в комнату, в которой есть лампа (вначале она выключена). Уходя из комнаты, вы можете оставить лампу как включенной, так и выключенной. Если в какой-то момент кто-то из вас скажет мне, что вы все уже побывали в комнате, и будет прав, то я всех вас выпущу на свободу. А если неправ — скормлю всех крокодилам. И не волнуйтесь, что кого-нибудь забудут — если будете молчать, то все

побываете в комнате, и ни для кого никакое посещение комнаты не станет последним.» Придумайте стратегию, гарантирующую узникам освобождение.

Задача 9. По ребрам правильного тетраэдра бегает кошка. Три подслеповатые бабушки двигаются по ребрам этого тетраэдра чуть быстрее кошки и пытаются ее поймать. Бабушка ловит кошку, если в какой-то момент времени ей удалось оказаться с ней в одной точке. Помогите бабушкам, придумайте для них стратегию поимки кошки.

1.3. Степень точки

Д. А. Байгушев

Задача 1. Пусть прямая, проходящая через точку P пересекает окружность в точках A, B. Докажите, что степень точки равняется:

a) Квадрату касательной из точки P (если P вне окружности, $A = B$);
b) $PA \cdot PB$, если P вне окружности;
c) $-PA \cdot PB$, если P внутри окружности.

Задача 2. В угол вписаны две окружности. Первая окружность касается одной из сторон угла в точке K, вторая касается другой стороны угла в точке L. Докажите, что прямая KL высекает на окружностях равные хорды.

Задача 3. С помощью циркуля и линейки постройте окружность, касающуюся данной прямой и проходящую через две данные точки, лежащие по одну сторону от прямой.

Задача 4. Диагонали трапеции $ABCD$ (AD параллельно BC) пересекаются в точке P, причем угол APB острый. Докажите, что длины отрезков касательных, проведенных из точки P к

окружностям, построенным на отрезках AB и CD как на диаметрах, равны.

Задача 5. На окружности ω выбраны точки A, B, C так, что $AB = BC$. Касательные к ω в точках A и B пересекаются в точке D; E – точка пересечения DC и ω. Докажите, что прямая AE делит пополам отрезок BD.

Задача 6. В остроугольном треугольнике ABC прямые a и b содержат высоты, проведенные из вершин A и B соответственно. Окружности ω_A и ω_B построены на отрезках BC и AC соответственно как на диаметрах. Прямая a пересекает ω_A в точках P и Q, прямая b пересекает ω_B в точках R и S. Докажите, что точки P, Q, R, S лежат на одной окружности.

Задача 7. В треугольнике ABC отмечены середины M и N отрезков BC и CM соответственно. Описанная окружность треугольника ABN вторично пересекает отрезок AC в точке S. Докажите, что $\angle BAM = \angle MSN$.

1.4. Вокруг ТЧ

П. П. Евсеев

Задача 1. Пусть x и y — натуральные числа, такие, что $x + y$ — простое число и $x^2 + y^2$ делится на $x + y$. Найдите все такие числа x и y.

Задача 2. Найдите все натуральные n такие, что для всех делителей n, таких, что $1 = d_1 < d_2 < \ldots < d_k < d_{k+1} = n$, число n делится на $d_1 + d_2$ и $d_1 + d_2 + \ldots + d_k$.

Задача 3. Докажите, что для любого натурального $m > 1$ и любого неотрицательного $r < m$ существует натуральное n такое, что показатель степени, в которой 2 входит в разложение на простые множители числа $n!$, дает остаток r при делении на m.

Задача 4. Докажите, что существует бесконечно много простых чисел, каждое из которых делит число $3^{n^2+1} - 2^n$ при некотором натуральном n.

Задача 5. Найдите все такие натуральные m, n и простые p, что число $\frac{7^m+2^n p}{7^m-2^n p}$ — натуральное.

Задача 6. Все натуральные делители натурального числа d занумеровали в порядке возрастания: $d_1 < d_2 < d_3 < \ldots$ Оказалось, что $d_4 + d_6 + d_7 = d$. Найдите число d.

Задача 7. Докажите, что p и $p+2$ являются простыми числами-близнецами тогда и только тогда, когда $4((p-1)! + 1) + p \vdots p^2 + p$.

1.5. Комбинаторные покрытия

П. В. Бибиков

Задача 1. Докажите, что в любом множестве, состоящем из 10 различных двузначных натуральных чисел, можно выбрать два непересекающихся набора чисел с одинаковой суммой.

Задача 2. Из клетчатого бумажного квадрата 100×100 вырезали по границам клеток 1950 двуклеточных прямоугольников. Докажите, что из оставшейся части можно вырезать по границам клеток четырехклеточную фигурку «Т–тетрамино» (возможно, повернутую). (Если такая фигурка уже есть среди оставшихся частей, считается, что ее получилось вырезать.)

Задача 3. Каждая клетка доски 100×100 окрашена либо в черный, либо в белый цвет, причем все клетки, примыкающие к границе доски — черные. Оказалось, что нигде на доске нет одноцветного клетчатого квадрата 2×2. Докажите, что на доске найдется клетчатый квадрат 2×2, клетки которого окрашены в шахматном порядке.

Задача 4. По каждому из 100 видов работ в фирме имеется ровно 8 специалистов. Каждому сотруднику нужно дать выходной в субботу или в воскресенье. Докажите, что это можно сделать так, чтобы и в субботу, и в воскресенье для каждого вида работ присутствовал специалист по нему. (Сотрудник может быть специалистом по нескольким видам работ; распределение специалистов по видам работ известно тому, кто назначает выходные.)

Задача 5. В Москве в общем положении стоят 7 Сталинских Высоток. Приезжий математик хочет найти точку, из которой они все видны в заданном порядке (считая от МГУ по часовой стрелке). Для любого ли заданного порядка это возможно?

Задача 6. Из каждого угла квадрата 300×300 вырезали по квадрату 100×100, а оставшиеся 50000 клеток раскрасили в черный и белый цвета так, чтобы никакой квадрат 2×2 не был раскрашен в шахматном порядке. Найдите максимально возможное количество пар соседних клеток, окрашенных в разные цвета.

Задача 7. 21 мальчик и 21 девочка участвуют в математической олимпиаде. Оказалось, что

- каждый участник решил не более 6 задач;
- для каждой пары, состоящей из мальчика и девочки, найдется задача, которую они оба решили.

Докажите, что некоторую задачу решило не менее трех мальчиков и не менее трех девочек.

1.6. Неравенства – 1

А. А. Гайфуллин

Задача 1. Докажите неравенство **Коши-Буняковского**:

$$(x_1y_1 + \ldots + x_ny_n)^2 \leqslant (x_1^2 + \ldots + x_n^2)(y_1^2 + \ldots + y_n^2).$$

Задача 2. Докажите, что для любых положительных чисел a_1, ..., a_n и любых вещественных чисел b_1, ..., b_n имеет место неравенство

$$\frac{(b_1 + \ldots + b_n)^2}{a_1 + \ldots + a_n} \leqslant \frac{b_1^2}{a_1} + \ldots + \frac{b_n^2}{a_n}.$$

Задача 3. Известно, что a, b, c, $d > 0$. Докажите, что

$$(a + b + c + d)\Big(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d}\Big) \geqslant 16.$$

Задача 4. Пусть $P(x)$ — квадратный трехчлен с неотрицательными коэффициентами. Докажите, что $P^2(xy) \leqslant P(x^2)P(y^2)$.

Задача 5. Докажите, что

$$\sqrt{1} + \sqrt{2} + \ldots + \sqrt{99} + \sqrt{100} \leqslant 711.$$

Задача 6. Докажите, что

$$\frac{1}{\sqrt{1} + \sqrt{2} + \sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{4} + \sqrt{5}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{97} + \sqrt{98} + \sqrt{99}} \geqslant \frac{3}{2}.$$

Задача 7. Известно, что уравнение

$$x^4 + ax^3 + 2x^2 + bx + 1 = 0$$

имеет действительный корень. Докажите, что $a^2 + b^2 \geqslant 8$.

Задача 8. Известно, что a_1, ..., $a_n > 0$. Докажите, что

$$\Big(1 + \frac{a_1^2}{a_2}\Big)\Big(1 + \frac{a_2^2}{a_3}\Big) \ldots \Big(1 + \frac{a_n^2}{a_1}\Big) \geqslant (1 + a_1)(1 + a_2) \ldots (1 + a_n).$$

Задача 9. Докажите, что для положительных чисел a, b, c, d имеет место неравенство

$$\frac{a}{b + c} + \frac{b}{c + d} + \frac{c}{d + a} + \frac{d}{a + b} \geqslant 2.$$

1.7. Комбинаторная геометрия

А. А. Гайфуллин

Задача 1. Внутри квадрата расположен выпуклый четырехугольник, а внутри этого четырехугольника — точка A. Оказалось, что из 9 отмеченных точек: 4 вершин квадрата, 4 вершин четырехугольника и точки A — никакие три не лежат на одной прямой. Докажите, что из этих 9 точек можно выбрать пять, являющихся вершинами выпуклого пятиугольника.

Задача 2. В треугольник ABC вписан квадрат так, что две его вершины лежат на стороне AC и по одной вершине — на сторонах AB и BC. Докажите, что сторона этого квадрата a) меньше $2r$, b) больше $\sqrt{2}r$, где r — радиус вписанной окружности треугольника ABC.

Задача 3. На плоскости дана замкнутая ломаная длины 1. Докажите, что ее можно покрыть кругом радиуса $1/4$.

Задача 4. На плоскости отметили конечное число точек. Известно, что любые три из отмеченных точек можно покрыть кругом радиуса 1. Докажите, что все отмеченные точки одновременно можно покрыть кругом радиуса 1.

Задача 5. На плоскости отметили конечное число точек. Известно, что любые три из отмеченных точек можно покрыть бесконечной бумажной полоской ширины 1. Докажите, что все отмеченные точки одновременно можно покрыть бесконечной бумажной полоской ширины 2.

Задача 6.

a) Существует ли 13-угольник, который можно разрезать на параллелограммы?

b) Существует ли выпуклый 13-угольник, который можно разрезать на параллелограммы?

Задача 7. Выпуклый многоугольник разрезан на параллелограммы. Вершина многоугольника называется хорошей, если она принадлежит только одному параллелограмму разбиения. Докажите, что есть хотя бы три хорошие вершины.

Задача 8. На плоскости расположено конечное число кругов, площадь объединения которых равна 1. Докажите, что из этих кругов можно выбрать несколько попарно не перекрывающихся по внутренним точкам так, чтобы суммарная площадь выбранных кругов была не меньше $1/9$.

Задача 9. Цирковая арена имеет вид круга радиусом 10 м. Лев пробежал по арене 30 км, двигаясь по ломаной. Докажите, что сумма углов, на которые поворачивал лев, больше 160000°.

1.8. Показатели – 1

П. П. Евсеев

Определение. *Показателем целого a по натуральному модулю n* (при условии, что a и n взаимно просты) называется такое наименьшее натуральное t, что $a^t \equiv 1 \pmod{n}$.

Задача 1. Покажите, что показатель по данному модулю у взаимно простого с ним числа существует.

Задача 2. Найдите показатели: a) 2 по модулю 7; b) 5 по модулю 9; c) 2 по модулю $2k+1$.

Задача 3.

a) Докажите, что $a^d \equiv 1 \pmod{n}$ тогда и только тогда, когда d делится на t.

b) Докажите, что $a^d \equiv a^s \pmod{n}$ тогда и только тогда, когда $d-s$ делится на t.

c) Докажите, что $\phi(n)$ делится на t.

Задача 4. Найдите наименьшее натуральное число, записанное одинаковыми цифрами и кратное 561.

Задача 5. Пусть N — произведение первых ста простых чисел. Сравнимо ли $2N$ с единицей по модулю 17?

Задача 6.

a) Докажите, что если p и q простые и $2^q - 1$ делится на p, то q — показатель двойки по модулю p.

b) Докажите, что в разложении на простые множители $2^q - 1$ (q простое) любое число будет давать остаток 1 по модулю q.

c) Получите отсюда еще одно доказательство бесконечности множества простых чисел.

Задача 7. Докажите, что если m — степень двойки, то любой простой делитель $2^m + 1$ сравним с 1 по модулю $2m$.

1.9. Субботний разнобой

С. А. Губанов, А. Д. Добряков

Задача 1. Докажите, что в разложении на множители 10 подряд идущих трехзначных чисел не может встретиться больше 23 различных простых чисел.

Задача 2. В лесу есть поляны, от каждой из которых идут три тропинки (к другим полянам или к выходу из леса). Известно, что для любой поляны одна из этих тропинок зеленая, одна красная и одна синяя. Из леса выходят три тропинки. Докажите, что они все имеют разные цвета.

Задача 3. Сколько существует способов представить число 105 в виде суммы нескольких (двух или больше) последовательных нечетных натуральных чисел?

Задача 4. В ряд стоят 100 человек, среди которых 45 лжецов, а остальные рыцари. У всех, начиная со второго, спросили про каждого из предыдущих, являются ли они лжецами. Например, пятому задали 4 вопроса про первого, второго, третьего и чет-

вертого. Докажите, что ответов «Да» было столько же, сколько ответов «Нет».

Задача 5. Рассмотрим набор из первых 20 натуральных чисел. Назовем четверку различных чисел из этого набора красивой, если сумма каких-то двух чисел из этой четверки равна 12, а также сумма каких-то двух чисел из этой четверки равна 28 (так, четверка 1, 11, 17, 20 — красивая, потому что $1 + 11 = 12$ и $11 + 17 = 28$). Сколько всего красивых четверок?

Задача 6. Дано натуральное число n. Сергей выписывает на доску все n^3 троек чисел от 1 до n включительно. После этого он находит в каждой тройке наибольшее число (числа) и стирает остальные. Например, в тройке (1, 3, 4) он сотрет 1 и 3, а в тройке (1, 2, 2) он сотрет только число 1. Сколько осталось чисел на доске?

Задача 7. Из квадрата 25×25 вырезали угловой квадратик 5×5. Можно ли оставшуюся часть разрезать на 100 прямоугольников 1×6 и 2×3?

Задача 8. Есть a людей и $b < a$ одинаковых тортов. Мы режем торты так, чтобы всем досталось поровну. Докажите, что нам потребуется минимум $a-\text{НОД}(a, b)$ разрезов.

2. Вторая неделя

Зацикливание – 1

П. П. Евсеев

Задача 1. На доске написано число 76. Каждую минуту число стирают с доски и на его место записывают произведение его цифр, увеличенное на 12. Какое число окажется на доске через час (то есть чему равно 61-е число)?

Задача 2. Один преподаватель оставил на дверях всех комнат записки следующего содержания: «Я в комнате номер ...» и исчез в неизвестном направлении (записки на разных дверях могут сообщать разную информацию). Настойчивый школьник начал поиски преподавателя, руководствуясь этими указаниями. Докажите, что с некоторого момента он начнет двигаться по циклу.

Задача 3. Каждое следующее число в последовательности целых чисел получается из предыдущего так: число возводится в квадрат, и из него вычеркиваются все цифры, кроме последних четырех. Докажите, что последовательность периодическая, и длина периода не больше 10000.

Задача 4. Найдите сотую цифру после запятой числа $\frac{4}{135}$.

Задача 5. Последовательность натуральных чисел строится так: первые два члена произвольны, а каждое следующее число равно последней цифре суммы квадратов двух предыдущих членов. Докажите, что эта последовательность всегда зацикливается.

Задача 6. Жители страны Пуп Мира очень гордятся тем, что у них президентская форма правления: каждые 4 года президентом избирается либо республиканец, либо демократ. ПупМировские политологи обнаружили строгий закон, по которому определяется партийность очередного президента. Хотя этот закон засекречен «Актом о демократии», в печать просочились сведения, что партийность очередного президента полностью определяется партийностью предыдущих десяти. Докажите, что последовательность партийностей президентов зациклится, и оцените как-нибудь длину периода.

Задача 7. Вот уже миллиард лет погода в Иннополисе в данный день полностью определяется предыдущей декадой. Как известно, существует восемь типов погоды. Во все дни последней недели погода была разная. Докажите, что еще когда-нибудь

встретится неделя с точно такой же погодой.

Задача 8. Вася написал программу для своего компьютера, которая должна печатать на принтере цифры десятичной записи числа $\sqrt{2}$. Докажите, что у Васи ничего не получилось: его программа рано или поздно напечатает неправильную цифру.

Прыжки Виета

Д. А. Михалин

Задача 1. Пусть A и B — натуральные числа. Докажите, что если $AB+1 \mid A^2+B^2$, то $\dfrac{A^2+B^2}{AB+1}$ — точный квадрат.

Задача 2. Пусть A и B — натуральные числа. Докажите, что если $AB \mid A^2+B^2+1$, то $\dfrac{A^2+B^2+1}{AB}=3$.

Задача 3. Пусть A и B — такие натуральные числа, что $AB \neq 1$ и $AB-1 \mid A^2+B^2$. Докажите, что $\dfrac{A^2+B^2}{AB-1}=5$.

Задача 4. Пусть A, B, C — такие натуральные числа, что $0 < A^2+B^2-ABC \leqslant C$. Докажите, что A^2+B^2-ABC — точный квадрат.

Задача 5. Докажите, что существуют натуральные числа a, b, c и d, большие 10^{2019}, такие, что $a^2+b^2+c^2+d^2 = abc+abd+acd+bcd$.

Задача 6. Найдите все такие натуральные числа A и B, что $AB \mid A^2+B^2+1$.

Задача 7. Найдите все такие пары натуральных чисел $(A;B)$, что $A \mid B^2+1$ и $B \mid A^2+1$.

Задача 8. Пусть A и B — такие натуральные числа, что $4AB-1 \mid (4A^2-1)^2$. Докажите, что $A=B$.

Рассмотрим поворот...

Е. А. Морозов

Задача 1. На отрезке AE по одну сторону от него построены равносторонние треугольники ABC и CDE; точки M и P — середины отрезков AD и BE. Докажите, что треугольник CPM равносторонний.

Задача 2.

a) Квадраты $ABCD$ и $DEFG$ ориентированы одинаково. Докажите, что $AE=CG$.

b) Пусть в условиях п. a) точка M — середина CE, а точки P и Q — центры квадратов $ABCD$ и $DEFG$. Докажите, что треугольник PMQ — прямоугольный равнобедренный.

c) На сторонах произвольного четырехугольника $ABCD$ построены квадраты. Докажите, что отрезки, соединяющие центры квадратов, построенных на противоположных сторонах четырехугольника, равны и перпендикулярны.

d) Внутри четырехугольника $ABCD$ нашлась точка K такая, что $AK=BK$, $CK=DK$ и $\angle AKB=\angle CKD=90^\circ$. Докажите, что внутри него найдется такая точка N, что $BN=CN$, $AN=DN$ и $\angle BNC=\angle AND=90^\circ$.

Задача 3. В правильном шестиугольнике $ABCDEF$ точки K и L — середины отрезков CD и DE соответственно. Найдите угол между отрезками AK и BL.

Задача 4. В правильном шестиугольнике $ABCDEF$ точки P и Q — середины отрезков BC и DF. Докажите, что треугольник APQ равносторонний.

Задача 5. Внутри квадрата $ABCD$ взята точка P. Из вершины A опущен перпендикуляр на BP, из B — на CP, из C — на DP, из D — на AP. Докажите, что все четыре перпендикуляра пересекаются в одной точке.

Задача 6. На гипотенузе AC прямоугольного равнобедренного треугольника ABC отмечены точки P и Q такие, что P лежит на отрезке AQ и $\angle PBQ = 45^\circ$. Найдите PQ, если $AP = p$, $CQ = q$.

Задача 7. Даны точка O на плоскости и три положительных числа a, b, c. Постройте какой-нибудь квадрат $ABCD$ такой, что $OA = a$, $OB = b$, $OC = c$.

Задача 8. На квадратном столе лежит квадратная скатерть так, что ни один угол стола не закрыт, но с каждой стороны стола свисает треугольный кусок скатерти. Известно, что какие-то два соседних куска равны. Докажите, что и два других куска тоже равны. (Скатерть нигде не накладывается сама на себя, её размеры могут отличаться от размеров стола.)

Задача 9. На сторонах треугольника ABC построены во внешнюю сторону равносторонние треугольники AC_1B, BA_1C, CB_1A. Точки A_2 и C_2 — середины отрезков B_1C_1 и A_1B_1 соответственно. Докажите, что треугольник A_2BC_2 равносторонний.

Задача 10. На сторонах выпуклого шестиугольника $ABCDEF$ во внешнюю сторону построены равносторонние треугольники ABC_1, BCD_1, CDE_1, DEF_1, EFA_1 и FAB_1. Оказалось, что треугольник $B_1D_1F_1$ равносторонний. Докажите, что треугольник $A_1C_1E_1$ также равносторонний.

Прыжки Виета - 2: Уравнение Маркова

Д. А. Михалин

В этом листке рассматривается следующее уравнение в целых числах для некоторого натурального k:

$$x^2 + y^2 + z^2 = kxyz. \tag{3.1}$$

Это уравнение имеет тривиальное решение $(0; 0; 0)$ (единственное, у которого хотя бы одна координата равна нулю). Кроме того, из любого положительного решения легко получаются еще три решения с двумя отрицательными координатами. Поэтому мы будем решать уравнение (1) только в натуральных числах.

Задача 1. Докажите, что при $k = 2$ уравнение (1) не имеет решений.

Задача 2. Докажите, что при $k \geqslant 4$ уравнение (1) не имеет решений.

Задача 3. Докажите, что при $k = 1$ и $k = 3$ уравнение (1) имеет бесконечно много решений. Уравнение (1) при $k = 3$ называется **уравнением Маркова**.

Задача 4. Докажите, что тройка $(1; F_{2n-1}; F_{2n+1})$, где F_i — i-е число Фибоначчи, является решением уравнения Маркова.

Задача 5. Пусть a, b, c — такие натуральные числа, что $abc + 1 \mid a^2 + b^2 + c^2$. Докажите, что $\dfrac{a^2 + b^2 + c^2}{abc + 1}$ представляется в виде суммы двух квадратов натуральных чисел.

Лемма Саваямы

П. В. Бибиков

Зафиксируем основные обозначения и определения. Пусть Ω — описанная окружность треугольника ABC, точка P — произвольная точка на его основании BC. Окружность ω, касающаяся чевианы AP, прямой BC и окружности Ω, называется *окружностью Тебо* (или *обобщенной полувписанной окружностью*). Точки касания с основанием BC и чевианой AP обозначим через K и L.

Теорема (лемма Саваямы)**.** *Центр I вписанной окружности треугольника ABC лежит на прямой KL.*

Идея: обозначим через T точку касания окружностей Ω и ω. Проведем прямую TK. Эта прямая пересекает окружность Ω в точке W.

Задача 1. Докажите, что W — это середина дуги $\overset{\frown}{BC}$, не содержащей точку A.

Теперь проведем прямую AW. Она является биссектрисой угла $\angle BAC$, поэтому точка I лежит на ней. Рассмотрим точку I' пересечения прямых KL и AW и докажем, что $I = I'$.

Задача 2. Обозначим через Q точку пересечения прямых AW и BC. Докажите, что точки A, Q, K и T лежат на одной окружности.

Задача 3. Докажите, что точки A, I', L и T лежат на одной окружности.

Задача 4. Выведите из двух предыдущих задач, что треугольники $WI'K$ и WTI' подобны.

Задача 5.

a) Докажите, что $WI' = WC$.
b) Докажите, что $I = I'$

Задача 6. (теорема Верьерра) Пусть окружность ω касается сторон AB и BC треугольника ABC в точках L и K соответственно, а также его описанной окружности.

a) Докажите, что центр I вписанной окружности треугольника ABC совпадает с серединой отрезка KL.
b) Выразите радиус окружности ω через радиус r вписанной окружности и угол $\angle ABC = \beta$.

Задача 7. (обратная лемма Саваямы) Рассмотрим произвольный треугольник ABC, его описанную окружность Ω и чевиану AP. Предположим, что окружность ω касается прямых BC и

AP в точках K и L, причем центр I вписанной окружности треугольника ABC лежит на прямой KL. Докажите, что ω касается Ω.

Лемма Саваямы и теорема Фейербаха

П. В. Бибиков

Зафиксируем основные обозначения и определения. Пусть Ω — описанная окружность треугольника ABC, точка P — произвольная точка на его основании BC. Окружность ω, касающаяся чевианы AP, прямой BC и окружности Ω, называется *окружностью Тебо* (или *обобщенной полувписанной окружностью*). Точки касания с основанием BC и чевианой AP обозначим через K и L. В прошлый раз мы доказали следующую сложную теорему.

Теорема (лемма Саваямы)**.** *Центр I вписанной окружности треугольника ABC лежит на прямой KL.*

Теперь наша цель еще более грандиозна.

Теорема (Фейербах)**.** *Окружность девяти точек треугольника ABC касается вписанной окружности и трех вневписанных окружностей.*

Идея: использовать обратную лемму Саваямы.

В качестве окружности Ω у нас будет выступать окружность девяти точек, а в качестве будущей окружности Тебо ω — вписанная окружность. Если мы найдем треугольник, вписанный в Ω, удовлетворяющий условиям обратной леммы Саваямы, то теоремы Фейербаха будет доказана. Оказывается, такой треугольник действительно существует! Это треугольник $M_AH_AH_C$, где M_A — середина стороны BC, а H_A и H_C — основания высот, опущенных из вершин A и C соответственно.

Для этого треугольника окружность девяти точек Ω является описанной, а вписанная окружность ω — это кандидат на роль окружности Тебо для него: эта окружность касается прямой M_AH_A в точке K и чевианы H_CB в точке L (обратите внимание, точка B лежит на продолжении стороны M_AH_A!). Остается доказать, что прямая KL содержит центр вписанной окружности треугольника $M_AH_AH_C$. Этим мы и займемся.

Задача 1. (задача Шарыгина)

a) Пусть J — точка пересечения биссектрисы угла $\angle BAC$ и средней линии M_AM_B. Докажите, что $\angle ASC$ прямой.

b) Докажите, что точка J лежит на прямой KL.

Задача 2. Докажите, что точка J является центром вписанной окружности треугольника $H_AM_AH_C$.

Задача 3. Докажите, что окружность девяти точек касается вписанной окружности.

Задача 4. Докажите теорему Фейербаха, т.е. докажите, что окружность девяти точек касается еще и трех вневписанных окружностей треугольника.

Взвешивания

Д. А. Михалин

Задача 1. Каким минимальным количеством гирек можно обойтись, чтобы отмерить на двухчашечных весах любой целый вес от 1 г до 100 г?

Задача 2. Из 25 одинаковых по виду монет одна фальшивая, и известно, что она легче настоящих. Как ее найти за 3 взвешивания на чашечных весах без гирь, если план взвешиваний нужно представить заранее?

Задача 3. Из 12 одинаковых по виду монет одна фальшивая. Как ее найти и определить, легче она или тяжелее настоящих,

за 3 взвешивания на чашечных весах без гирь, если план взвешиваний нужно представить заранее?

Задача 4. Геологи взяли в экспедицию 80 банок консервов, веса которых все известны и различны (имеется список). Через некоторое время надписи на консервах стали нечитаемыми, и только завхоз знает, где что. Он может это всем доказать, не вскрывая консервов и пользуясь только сохранившимся списком и двухчашечными весами со стрелкой, показывающей разницу весов. Докажите, что для этой цели ему

a) недостаточно трёх взвешиваний;
b) достаточно четырёх взвешиваний.

Задача 5.

a) Известно, что в наборе из 32 одинаковых по виду монет есть две фальшивые, которые отличаются по весу от остальных (настоящие монеты весят одинаково, фальшивые монеты тоже весят одинаково). Как разделить все монеты на две равные по весу кучки, сделав не более 4 взвешиваний на чашечных весах без гирь?
b) Та же задача для 22 монет.

Задача 6. У царя Гиерона есть 11 металлических слитков, неразличимых на вид; царь знает, что их веса (в некотором порядке) равны 1, 2, ..., 11 кг. Ещё у него есть мешок, который порвётся, если в него положить больше 11 кг. Архимед узнал веса всех слитков и хочет доказать Гиерону, что первый слиток имеет вес 1 кг. За один шаг он может загрузить несколько слитков в мешок и продемонстрировать Гиерону, что мешок не порвался (рвать мешок нельзя!). За какое наименьшее число загрузок мешка Архимед может добиться требуемого?

Задача 7. Глава Монетного двора хочет выпустить монеты 12 номиналов (каждый — в натуральное число рублей) так, чтобы любую сумму от 1 до 6543 рублей можно было заплатить без

сдачи, используя не более 8 монет. Сможет ли он это сделать? (При уплате суммы можно использовать несколько монет одного номинала.)

Задача 8. В республике математиков выбрали число $\alpha > 2$ и выпустили монеты достоинствами в 1 рубль, а также в α^k рублей при каждом натуральном k. При этом α было выбрано так, что достоинства всех монет, кроме самой мелкой, иррациональны. Могло ли оказаться, что любую сумму в натуральное число рублей можно набрать этими монетами, используя монеты каждого достоинства не более 6 раз?

Теорема Шпернера

Д. А. Михалин[(1)]

Задача 1. Детектив Ниро Вульф расследует преступление. Он знает, что в круге подозреваемых помимо преступника имеется свидетель (но кто это — неизвестно). В каждый из дней детектив может пригласить к себе одного или нескольких подозреваемых, и если среди приглашенных есть свидетель, но нет преступника, то свидетель сообщит, кто преступник. При каком наибольшем количестве подозреваемых детектив гарантированно раскроет дело за три дня? За четыре дня?

В задачах этого листка, как и в задачах на взвешивания, нам понадобится понятие информации. Мы будем кодировать ее двоичными кодами — конечными последовательностями нулей и единиц. Для двух кодов $a = \alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n$ и $b = \beta_1\beta_2\ldots\beta_n$ введем упорядочение

$$a \preccurlyeq b \quad \Leftrightarrow \quad \alpha_1 \leqslant \beta_1,\ \alpha_2 \leqslant \beta_2,\ \ldots,\ \alpha_n \leqslant \beta_n.$$

[(1)] Данный листок составлен с использованием материалов И. В. Яковлева, см. `http://mathus.ru/math/`

Это отношение называют *отношением частичного порядка*, потому что не все коды сравнимы: например, коды 001 и 100 *несравнимы*.

Назовем *цепью* такой набор сравнимых кодов $a_0 \preccurlyeq a_1 \preccurlyeq a_2 \preccurlyeq \ldots \preccurlyeq a_n$, что в коде a_k ровно k единиц. *Антицепью* назовем любой набор несравнимых кодов.

Задача 2. Докажите, что всего существует $n!$ цепей из кодов длины n.

Задача 3. Докажите, что произвольно выбранный код a_k длины n, в котором ровно k единиц, содержится ровно в $k!(n-k)!$ цепях.

Задача 4. Докажите, что величина $k!(n-k)!$ достигает минимума при $k = \left[\frac{n}{2}\right]$.

Задача 5. Докажите, что любая антицепь содержит не более $C_n^{[n/2]}$ кодов.

Задача 6. Приведите пример антицепи длины $C_n^{[n/2]}$.

Пусть X — некоторое множество. Тогда семейство его подмножеств A называется *антицепью*, если ни для каких $M, N \in A$ не выполнено $M \subset N$.

Задача 7. Теорема Шпернера. Максимальная антицепь подмножеств множества мощности n содержит $C_n^{[n/2]}$ элементов.

Задача 8. При каком наибольшем количестве подозреваемых Ниро Вульф (см. задачу 1) сможет заведомо раскрыть дело за 12 дней?

Задача 9. Среди 250 сотрудников международной фирмы в любой паре сотрудников каждый знает язык, который не знает другой сотрудник из этой пары. Какое наименьшее возможное число языков знают (в совокупности) сотрудники фирмы?

Задача 10. 30 учеников одного класса решили побывать друг у друга в гостях. Известно, что ученик за вечер может сделать

несколько посещений, и что в тот вечер, когда к нему кто-нибудь должен прийти, он сам никуда не уходит. Какое наименьшее количество вечеров потребуется, чтобы все побывали в гостях у всех?

3. Третья неделя

Показатели – 2

П. П. Евсеев

Задача 1. Докажите, что $2^n - 1$ не делится на n для $n > 1$.

Задача 2. Пусть p и q — простые, $q > 5$. Известно, что $2^p + 3^p$ делится на q. Докажите, что $q > 2p$.

Задача 3. Докажите, что $\phi(a^n - 1)$ делится на n для натуральных a и n.

Задача 4. Пусть $a > 1$, а $p > 2$ — простое.

a) Докажите, что простые нечетные делители $a^p - 1$ или сравнимы с 1 по модулю $2p$ или делят $a - 1$.

b) Докажите, что число $\frac{a^p-1}{a-1}$ имеет хотя бы один простой делитель, не делящий $a - 1$.

c) Докажите частный случай теоремы Дирихле: существует бесконечно много простых чисел, сравнимых с 1 по модулю $2p$.

Задача 5. Хан сказал Чаку натуральные числа n и d. Чак выписал все натуральные числа $2^{2^l}+1$, а после этого подчеркнул все числа, дающие такой же остаток при делении на d, как и число $2^{2^n}+1$. Нашлось такое натуральное число $m \neq n$, что число $2^{2^m}+1$ подчеркнуто. Докажите, что найдется такое натуральное число k, отличное от m и n, что число подчеркнуто $2^{2^k}+1$.

Задача 6. Найдите все пары простых чисел (p, q) такие, что $5^p + 5^q \vdots pq$.

Задача 7. Найдите все натуральные n, для которых числа n и $2^n + 1$ имеют один и тот же набор простых делителей.

Задача 8. Найдите все натуральные n и простые p такие, что $3^p - np = n + p$.

Зацикливание – 2

П. П. Евсеев

Задача 1. Кубик Рубика выведен из первоначального состояния некоторой комбинацией поворотов. Докажите, что всегда можно вернуть его в первоначальное состояние, выполнив эту комбинацию еще несколько раз.

Задача 2. В тридесятом королевстве у каждого замка и каждой развилки сходятся три дороги. Рыцарь, Любящий Разнообразие, выехал из своего замка и по очереди поворачивает то направо, то налево. Докажите, что рано или поздно он снова вернется в свой замок.

Задача 3. В последовательности 20147...каждая цифра, начиная с пятой, равна последней цифре суммы четырех предшествующих цифр. Докажите, что в этой последовательности снова встретится четверка 2014.

Задача 4. Докажите, что в ряду Фибоначчи найдется число, делящееся на 2014.

Задача 5. Из замка короля выехали 100 рыцарей, у каждого свой бзик (то есть каждый поворачивает налево или направо по своей собственной зацикленной программе, например, 1:налево, 2:налево, 3:направо, 4:налево, 5:go to 1). Докажите, что рано или поздно все рыцари снова соберутся в замке короля.

Задача 6. По кругу стоит несколько коробочек. В каждой из них может быть пусто, один или несколько шариков. На первом ходу из какой-то коробочки берутся все шарики и раскладываются по одному по часовой стрелке, начиная со следующей коробочки. На следующем ходу раскладывают шарики из той коробочки, в которую попал последний шарик на предыдущем ходу, и т. д. Докажите, что в какой-то момент повторится начальное расположение шариков.

Теорема о четырех числах

С. А. Губанов

Теорема (О четырех числах)**.** Пусть a, b, c, d — натуральные числа, причем $ab = cd$. Тогда существуют такие натуральные числа p, q, r, s, что

$$a = pq, b = rs, c = pr, d = qs.$$

Задача 1. Докажите теорему о четырех числах.

Задача 2. Докажите с её помощью, что если $ab \vdots c$ и НОД$(a, c) = 1$, то $b \vdots c$.

Задача 3. Даны натуральные числа a, b, c, d такие, что $ab = cd$. Докажите, что:

a) $a + b + c + d$ — составное число.

b) $a^n + b^n + c^n + d^n$ — составное число для любого натурального n.

Задача 4. Петя и Вася придумали два прямоугольника с целыми длинами сторон. Оказалось, что площади этих прямоугольников равны. Всегда ли найдется прямоугольник с целыми длинами сторон (отличный от квадрата 1×1), копиями которого можно замостить оба прямоугольника мальчиков?

Задача 5. Простое число p представимо в виде суммы двух квадратов натуральных чисел. Докажите, что это представление единственно (с точностью до перестановки слагаемых).

Задача 6. Натуральные числа a, b, c, d удовлетворяют соотношению:

$$abcd\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+\frac{1}{d^2}\right)=a^2+b^2+c^2+d^2$$

Докажите, что $a+b+c+d$ — составное число.

Задача 7. Пусть a, c — любые положительные числа, а b, d — натуральные числа, причем $ab=cd$. Докажите, что найдутся положительное число p и натуральные числа q, r, s такие, что

$$a=pq,\quad b=rs,\quad c=pr,\quad d=qs.$$

Задача 8. Натуральные числа a, b, c, d таковы, что

$$a<b\leqslant c<d,\quad ad=bc,\quad \sqrt{d}-\sqrt{a}\leqslant 1.$$

Докажите, что a — точный квадрат.

Неравенство Мюрхева

А. О. Герасименко

Задача 1. Для положительных a,b,c докажите неравенство:

$$(a+b+c)^2\geqslant 3(ab+ac+bc).$$

Задача 2. Для положительных a,b,c докажите неравенство:

$$a^5+b^5+c^5\geqslant\frac{1}{2}\cdot(a^3b^2+b^3c^2+c^3a^2+a^2b^3+b^2c^3+c^2a^3).$$

Задача 3. Для любых положительных чисел a, b, c выполнено

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geqslant\frac{3}{2}.$$

Задача 4. Положительные числа a, b, c таковы, что $a^2+b^2+c^2=3$. Докажите, что

$$a+b+c\geqslant ab+bc+ca.$$

Задача 5. Для положительных a, b, c, d докажите неравенство:

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2+d^2}{4}}\geqslant\sqrt[3]{\frac{abc+bcd+cda+dab}{4}}.$$

Задача 6. Числа a, b, c положительны. Докажите, что

$$\frac{a}{2a+b+c}+\frac{b}{2b+c+a}+\frac{c}{2c+a+b}\leq\frac{3}{4}.$$

Задача 7. Для положительных a, b, c докажите неравенство

$$\frac{a^b+b^2}{c^2+ab}+\frac{b^2+c^2}{a^2+bc}+\frac{c^2+a^2}{b^2+ac}\geqslant 3.$$

Задача 8. Для положительных a, b, c верно, что $a+b+c=ab+bc+ca$. Докажите, что

$$a+b+c+1\geqslant 4abc.$$

Принцип крайнего

П. П. Евсеев

Задача 1. В порядке возрастания длин лежат несколько палочек. Можно взять любые три и проверить, складывается ли из них треугольник. За какое наименьшее число проверок можно доказать или опровергнуть утверждение о том, что из любой тройки палочек складывается треугольник?

Задача 2. На доске были написаны 5 действительных чисел. Сложив их попарно, получили следующие 10 чисел: 0, 2, 4, 4, 6, 8, 9, 11, 13, 15. Какие числа были написаны?

Задача 3. С начала учебного года Андрей записывал свои оценки по математике. Получая очередную оценку (2, 3, 4 или 5), он называл ее неожиданной, если до этого момента она встречалась реже каждой из всех остальных возможных оценок. (Например, если бы он получил с начала года подряд оценки 3, 4, 2, 5, 5, 5, 2, 3, 4, 3, то неожиданными были бы первая пятерка и вторая четверка.) За весь учебный год Андрей получил 40 оценок — по 10 пятерок, четверок, троек и двоек (неизвестно, в каком порядке). Можно ли точно сказать, сколько оценок были для него неожиданными?

Задача 4. На листке написаны несколько натуральных чисел. Известно, что для любых двух найдется на листке число, которое на каждое из них делится. Докажите, что на листке наи?дется число, которое делится на все числа.

Задача 5. Существуют ли такие 2019 различных натуральных чисел, что сумма каждых 2015 из них не меньше квадрата оставшегося.

Задача 6. На доске выписано 100 целых чисел. Известно, что для любых пяти из этих чисел найдутся такие шесть из этих чисел, что равны средние арифметические этой пятерки и этой шестерки. Докажите, что все числа равны.

Задача 7. На столе лежат несколько круглых монет, касаясь, но не перекрывая друг друга. Докажите, что какая-то монета касается не более пяти других. (Размеры монет могут быть

любыми).

Задача 8. Можно ли разрезать кубик $3 \times 3 \times 3$ на кубики $1 \times 1 \times 1$, используя менее 6 разрезов?

Задача 255

С. А. Губанов

Задача 1. Пусть окружность, вписанная в треугольник ABC, касается сторон AB и BC в точках K и L соответственно, а биссектриса угла BAC пересекает отрезок KL в точке P. Докажите, что $\angle APC = 90^\circ$.

Задача 2. На биссектрисе угла A треугольника ABC выбрана точка D, такая, что $AD \perp BD$. Докажите, что D лежит на средней линии треугольника ABC.

Задача 3.

a) В треугольнике ABC провели биссектрисы углов A и C. Точки P и Q — основания перпендикуляров, опущенных из вершины B на эти биссектрисы. Докажите, что отрезок PQ параллелен стороне AC.

b) Пусть M, N — основания перпендикуляров, опущенных из вершины B на внешние биссектрисы этих же углов. Докажите, что точки M, N, P, Q лежат на одной прямой, и отрезок MN равен полупериметру треугольника ABC.

Задача 4. Вписанная окружность треугольника ABC ($AB > BC$) касается сторон AB и AC в точках P и Q соответственно, RS — средняя линия, параллельная AB, T — точка пересечения прямых PQ и RS. Докажите, что T лежит на биссектрисе угла B треугольника ABC.

Задача 5. Дан треугольник ABC. Из вершин B и C опущены перпендикуляры BM и CN на биссектрисы углов C и B соот-

ветственно. Докажите, что прямая MN пересекает стороны AC и AB в точках их касания со вписанной окружностью.

Задача 6. Окружность, вписанная в прямоугольный треугольник ABC с гипотенузой AB, касается сторон BC, CA, AB в точках A_1, B_1, C_1 соответственно. Пусть B_1H — высота треугольника $A_1B_1C_1$. Докажите, что точка H лежит на биссектрисе угла CAB.

Задача 7. В треугольнике ABC выполняется равенство $3AC = AB + BC$. Вписанная в треугольник окружность касается сторон AB и BC в точках K и L соответственно; DK и EL — ее диаметры. Докажите, что точки пересечения прямых AE и CD с прямой KL равноудалены от середины отрезка AC.

Задача 8. В неравнобедренном треугольнике ABC проведены биссектрисы AA_1 и CC_1 и отмечены точки K и L — середины сторон AB и BC соответственно. AP и CQ — перпендикуляры, опущенные на CC_1 и AA_1 соответственно. Докажите, что прямые PK и QL пересекаются на стороне AC.

Квадратичные вычеты

П. П. Евсеев

Определение. Пусть $m > 1$ — натуральное число и a — целое число, взаимно простое с m. Число a называется *квадратичным вычетом* по модулю m, если существует $x \in \mathbb{Z}$ такое, что $a \equiv x^2 \pmod{m}$. В противном случае число a называется *квадратичным невычетом* по модулю m.

Задача 1. Докажите, что если p — нечетное простое число, то по модулю p существует ровно $\frac{p-1}{2}$ квадратичных вычетов и столько же невычетов.

Задача 2. Докажите, что для данного модуля $p \in \mathbb{P}$

а) произведение двух квадратичных вычетов — вычет;

b) произведение вычета на невычет — невычет;
c) произведение двух невычетов — вычет.

Задача 3. Пусть p — нечетное простое число.

a) Докажите, что если a — квадратичный вычет по модулю p, то $a^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \pmod{p}$.
b) Докажите, что если a — квадратичный невычет по модулю p, то $a^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1 \pmod{p}$.

Определение. Пусть $p \in \mathbb{P}$. *Символом Лежандра* называется выражение, обозначаемое $\left(\frac{a}{p}\right)$, равное 1, если a — квадратичный вычет по модулю p; -1, если a — невычет по модулю p и 0, если a кратно p.

Из задачи 3 следует, что если p нечетно, то $\left(\frac{a}{p}\right) \equiv a^{\frac{p-1}{2}} \pmod{p}$.

Задача 4. Докажите, что -1 является квадратичным вычетом по модулю простого числа $p > 2$ тогда и только тогда, когда $p \equiv 1 \pmod{4}$.

Задача 5. Пусть p — нечетное простое число, a, b, c — вычеты по модулю p, причем a не кратно p, а $D = b^2 - 4ac$. Докажите, что если D — квадратичный вычет по модулю p, то сравнение $ax^2+bx+c \equiv 0 \pmod{p}$ имеет два корня, если D —квадратичный невычет по модулю p, то сравнение $ax^2 + bx + c \equiv 0 \pmod{p}$ не имеет корней, а если $D \vdots p$, то это сравнение имеет один корень.

Задача 6. Докажите, что простых чисел вида $4k+1$ бесконечно много.

Задача 7. Докажите, что уравнение $4xy - x - y = z^2$

a) не имеет решений в натуральных числах;
b) имеет бесконечно много решений в целых числах.

Задача 8. Решите в целых числах уравнение $x^3 + 7 = y^2$.

Задача 9. Простое число $p \equiv 3 \pmod{4}$, а целые числа x и y таковы, что $x^2 + y^2 \vdots p$. Докажите, что $x, y \vdots p$.

Про графы

М. Ю. Дмитриева

Задача 1. Шах разбил свой квадратный одноэтажный дворец на 64 одинаковые квадратные комнаты, разделил комнаты на семь квартир (проделав двери в некоторых перегородках между комнатами, каждая комната в какой-то квартире) и в каждой квартире поселил по жене. Жены могут ходить по всем комнатам своей квартиры, не заходя к другим. Какое наименьшее число дверей пришлось проделать во внутренних стенах?

Задача 2. На турнир в Иннополис приехали 100 шахматистов и сыграли турнир в один круг. Оказалось, что к концу турнира каждый из них ровно один матч выиграл и ровно один проиграл. Какое наибольшее число шахматистов можно гарантированно выбрать так, чтобы среди них любые два сыграли вничью?

Задача 3. Клетки связной клетчатой фигуры покрашены в шахматном порядке в черный и белый цвета. Известно, что черных клеток в фигуре ровно k. Какое наибольшее количество белых клеток может быть?

Задача 4. Есть m болельщиков: некоторые из них (возможно, все или никто) болеют за «Спартак», а остальные — за «Динамо». Разрешается спросить у любых двоих, болеют ли они за разные команды, и они честно ответят «да» или «нет». Требуется посадить болельщиков в два автобуса так, чтобы в каждом были болельщики только одной команды. За какое минимальное количество вопросов это наверняка можно сделать?

Задача 5. Дан клетчатый квадрат 20×20. M его клеток окрашены в черный цвет, остальные в белый. Если в какой-то момент 3 из 4-х клеток, центры которых являются вершинами прямоугольника со сторонами, параллельными сторонам квадрата, окрашены в черный цвет, то через минуту и четвертая клетка тоже перекрашивается в чёрный. При каком наименьшем M может

так оказаться, что через некоторое время весь квадрат станет черным?

Задача 6. Муравей ползает по поверхности куба $11 \times 11 \times 11$ вдоль диагоналей квадратиков 1×1. Может ли оказаться так, что он побывал в каждом квадратике ровно один раз?

Задача 7. Петя разрезал таблицу 6×6 на доминошки. Вася пытается угадать, как именно Петя это сделал. Для этого он может показывать на любые две соседние клетки и спрашивает, присутствует ли эта доминошка в разрезании. За какое наименьшее количество вопросов Вася сможет восстановить все доминошки разрезания?

Отрезки касательных

А. О. Герасименко

Задача 1. Пусть M — середина стороны BC треугольника ABC.

a) Докажите, что M равноудалена от точек касания вписанной и вневписанной окружностей с отрезком BC.
b) Докажите, что M равноудалена от точек касания вневписанных окружностей с продолжениями стороны BC.

Задача 2. Дан выпуклый четырехугольник $ABCD$. Пусть ω_D и ω_B — окружности, вписанные в треугольники ABC и ADC.

a) Докажите, что если ω_D и ω_B касаются, то в $ABCD$ можно вписать окружность.
b) Докажите, что если $ABCD$ — описанный четырёхугольник, то ω_D и ω_B касаются.

Задача 3. Дан параллелограмм $ABCD$. Вневписанная окружность треугольника ABD касается продолжений сторон AB и AD

в точках M и N. Вписанная окружность треугольника CBD касается его сторон CB и CD в точках P и Q. Докажите, что точки M, N, P, Q лежат на одной прямой.

Задача 4. Через вершину A треугольника ABC проведена произвольная прямая ℓ, лежащая вне треугольника. Окружность ω_B касается отрезка AB, продолжения стороны BC за точку B и прямой ℓ в точке P. Окружность ω_C касается отрезка AC, продолжения стороны BC за точку C и прямой ℓ в точке Q. Докажите, что длина отрезка PQ не зависит от выбора прямой ℓ.

Задача 5. На сторонах AB, AD описанного четырёхугольника $ABCD$ отмечены точки X и Y соответственно. Отрезки BY и DX пересекаются в точке Z.

a) Докажите, что если $AXZY$ — описанный, то $BCDZ$ — тоже описанный.

b) Докажите, что если $BCDZ$ — описанный, то $AXZY$ — тоже описанный.

Задача 6. К двум непересекающимся окружностям ω_I и ω_J с центрами I и J проведены два отрезка общих внешних касательных. На одном отрезке отмечена точка A, на другом — точки B и C так, что AB касается ω_I и AC касается ω_J. Вневписанная окружность треугольника ABC касается отрезка BC в точке D. Докажите, что середина отрезка IJ равноудалена от точек A и D.

Задача 7. На стороне BC треугольника ABC отмечена произвольная точка X. Общая внешняя касательная к вписанным окружностям треугольников ABX и ACX, отличная от BC, пересекает отрезок AX в точке Y. Докажите, что длина отрезка AY не зависит от выбора точки X.

Формула Пика

С. А. Губанов

Формула Пика. Пусть вершины многоугольника находятся в узлах решетки, причем на его границе находятся G узлов, а строго внутри многоугольника расположены V узлов. Тогда его площадь может быть найдена по формуле:

$$S = V + \frac{G}{2} - 1.$$

Задача 1. Докажите формулу Пика для:

a) прямоугольника со сторонами, идущими по линиям сетки;
b) прямоугольного треугольника с катетами на линиях сетки;
c) многоугольника, составленного из двух многоугольников, для каждого из которых формула Пика уже проверена

Задача 2. Пусть многоугольник, для которого формула Пика проверена, составлен из двух многоугольников. Докажите, что если она верна для одной из частей, то она верна и для другой.

Задача 3. Докажите формулу Пика для произвольного треугольника с вершинами в узлах решетки. Для этого получите его из прямоугольника, отрезая прямоугольники и прямоугольные треугольники.

Задача 4. Покажите, что любой выпуклый многоугольник можно разбить на треугольники, и докажите формулу Пика для произвольного (не обязательно выпуклого) многоугольника.

Задача 5. Дан треугольник с вершинами в узлах сетки. На сторонах треугольника узлов, отличных от вершин, нет. Внутри треугольника есть ровно один узел. Докажите, что он является точкой пересечения медиан этого треугольника.

Задача 6. Внутри некоторого треугольника с вершинами в узлах лежит ровно два узла (возможно, какие-то еще узлы лежат на его сторонах). Докажите, что прямая, проходящая через эти два узла, либо проходит через одну из вершин треугольника, либо параллельна одной из его сторон.

Задача 7. Можно ли квадрат 50×50 разбить на 15 одинаковых многоугольников с вершинами в узлах квадрата?

Задача 8. Докажите, что если вершины выпуклого n-угольника лежат в узлах сетки, а внутри и на его сторонах других узлов нет, то $n < 5$.

Задача 9. Докажите, что квадрат со стороной n не может накрыть более $(n+1)^2$ точек целочисленной решётки.

Оценка + пример

М. Ю. Дмитриева

Задача 1. По кругу написано 100 ненулевых чисел. Между каждыми двумя соседними числами написали их произведение, а прежние числа стерли. Количество положительных чисел не изменилось. Какое минимальное количество положительных чисел могло быть написано изначально?

Задача 2. Клетчатая плоскость раскрашена в 10 цветов. (Каждая клетка окрашена в один цвет.) Любые две соседние клетки окрашены в разные цвета. Назовём пару цветов *хорошей*, если есть две соседние клетки, окрашенные в эти цвета. Какое наименьшее количество хороших пар?

Задача 3. В магазине в ряд висят 21 белая и 21 фиолетовая рубашка. Найдите такое минимальное k, что при любом изначальном порядке рубашек можно снять k белых и k фиолетовых рубашек так, чтобы оставшиеся белые рубашки висели подряд и оставшиеся фиолетовые рубашки тоже висели подряд.

Задача 4. По кругу стоят 10 детей разного роста. Время от времени один из них перебегает на другое место (между какими-то двумя детьми). Дети хотят как можно скорее встать по росту в порядке возрастания по часовой стрелке (от самого низкого к самому высокому). Какого наименьшего количества таких перебежек им заведомо хватит, как бы они ни стояли изначально?

Задача 5. Саша выставляет на пустую шахматную доску ладьи: первую — куда захочет, а каждую следующую ставит так, чтобы она побила нечётное число ранее выставленных ладей. Какое наибольшее число ладей он сможет так выставить?

Задача 6. Два числа назовем похожими, если они различаются только одной цифрой в каком-то из разрядов (например, 1234 и 1239 — похожие). Какое наибольшее количество десятизначных чисел можно выбрать так, чтобы среди них не было похожих?

Глава IV

9 класс

1. Первая неделя

Приветственный разнобой

П. В. Бибиков

Задача 1. Последовательность $\{a_i\}$ задана рекуррентно: $a_1 = \frac{1}{2}$,

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n = n^2 a_n.$$

Найдите формулу общего члена.

Задача 2. Найдите все натуральные n такие, что число $n(n+2)(n+4)$ имеет не более 15 делителей.

Задача 3. Найдите все пары натуральных чисел (m, n) такие, что $m! + n! = m^n$.

Задача 4. Найдите все натуральные n, представимые в виде $a \cdot [a] \cdot \{a\}$, где [] обозначает целую часть числа, а {} — дробную.

Задача 5. Решить в целых числах уравнение $x^3 + y^3 + 6xy = 8$

Задача 6. Найдите все натуральные числа (x, y), такие, что $y^2 - 5 \mid x^2 + 1$.

Задача 7. Пусть a, b, c — взаимно простые в совокупности натуральные числа и

$$D_n = (a + b + c, a^2 + b^2 + c^2, a^n + b^n + c^n).$$

а) Докажите, что для любого n, не кратного 3, число D_n может быть сколь угодно велико.

b) Для каждого n, кратного 3, найдите все возможные значения D_n.

Задача 8.

a) Существует ли целочисленная функция P, зависящая от четырех переменных и принимающая на разных наборах переменных разные значения (т.е. инъективная функция из $\mathbb{Z}^4$ в $\mathbb{Z}$)?

b) А существует ли многочлен, удовлетворяющий условию из п. a)?

Аффинная геометрия

Е. А. Морозов

Теория

Определение. *Аффинным преобразованием* называется непрерывное взаимно-однозначное преобразование плоскости, переводящее прямые в прямые.

Пример. Всякое преобразование подобия (в частности, всякое движение) является аффинным преобразованием. Сжатие к прямой $(x, y) \mapsto (x, ky), k > 0$ является аффинным преобразованием.

Задача 1. Докажите, что композиция аффинных преобразований и преобразование, обратное к аффинному — тоже аффинные преобразования.

Задача 2. Докажите, что аффинное преобразование параллельные прямые переводит в параллельные.

Задача 3.

a) Пусть некоторое аффинное преобразование переводит точки A, B, C, D в точки A', B', C', D' соответственно. Докажите, что если $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, то $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{C'D'}$.

b) Докажите, что если отношение длин двух отрезков на прямой — натуральное число, то это отношение сохраняется при аффинном преобразовании.

c) То же, если отношение длин отрезков — рациональное число. Из п. (c) и непрерывности аффинного преобразования следует, что *всякое аффинное преобразование сохраняет отношения длин отрезков на прямой* (если вам знакомо строгое определение непрерывности, то рекомендуется доказать это строго).

Задача 4. Докажите, что аффинное преобразование однозначно задается образами 3-х неколлинеарных точек.

Задача 5. (основная теорема аффинной геометрии) Докажите, что всякое аффинное преобразование является композицией сжатий к прямым и движений.

Задача 6. Докажите, что аффинное преобразование сохраняет отношение площадей треугольников.

Задачи

Задача 1. Докажите, что точка пересечения диагоналей трапеции, точка пересечения продолжений ее боковых сторон, а также середины оснований лежат на одной прямой.

Задача 2. Рассмотрим произвольный треугольник. Соединим каждую его вершину с точками, делящими противоположную сторону на 3 равные части. Полученные 6 отрезков высекают внутри треугольника выпуклый шестиугольник. Докажите, что главные диагонали этого шестиугольника пересекаются в одной точке.

Задача 3. Через точку P, лежащую внутри треугольника ABC, проведены три прямые, параллельные сторонам AB, BC и CA и пересекающие стороны BC, AC и AB соответственно в точках

A', B' и C'. Докажите, что

$$\frac{PA'}{AB} + \frac{PB'}{BC} + \frac{PC'}{CA} = 1.$$

Задача 4. Каждая диагональ пятиугольника отсекает от него треугольник единичной площади. Найдите площадь пятиугольника.

Задача 5. Дан треугольник ABC. Точки A_1, A_2 на отрезке BC и точки C_1, C_2 на отрезке AB таковы, что $CA_1 = BA_2$ и $AC_1 = BC_2$. Точки B_1 и B_2 таковы, что четырехугольники $BA_1B_1C_1$ и $BA_2B_2C_2$ — параллелограммы, а B_3 — точка пересечения отрезков A_1C_2 и A_2C_1. Докажите, что точки B_1, B_2, B_3 лежат на одной прямой.

Ацтекский бриллиант и функции высоты

П. В. Бибиков

Пусть G — граф, вершинами которого являются узлы квадратной решетки на плоскости, а ребрами — отрезки, соединяющие соседние узлы. Рассмотрим раскраску вершин графа G в шахматном порядке в черный и белый цвета. Расставим на единичных отрезках между соседними узлами стрелки следующим образом: если отрезок горизонтален, направим стрелку от черного узла к белому; если же он вертикален, то от белого к черному.

Пусть нам дано некоторое замощение плоскости доминошками, которое мы обозначим через T. Представим себе, что доминошки выложены поверх графа G. Тогда каждая из них закрывает одно ребро графа. Удалим из графа ребра, закрытые доминошками; тот граф, который останется, будем обозначать G_T. Сопоставим замощению его функцию высоты — это будет функция на вершинах графа G, которую мы будем обозначать $H_{T,v_0}(v)$. Определим

ее следующим образом. Выберем произвольную вершину v_0 и положим ее высоту равной нулю; далее, каждую вершину v соединим с v_0 путем в графе G_T. Этот путь состоит из стрелок, каждая из которых проходится либо в попутном направлении (т. е. сонаправлена с путем), либо в противоположном. Положим высоту $H_{T,v_0}(v)$ равной разности числа попутных и противоположно направленных стрелок.

Задача 1. Докажите, что так определенное значение функции высоты $H_{T,v_0}(v)$ не зависит от выбора пути, соединяющего v_0 с v.

Задача 2. Докажите, что в результате другого выбора начальной вершины функция высоты изменяется во всех точках на одну и ту же константу.

В дальнейшем при необходимости мы будем считать, что две функции высоты совпадают в некоторой точке, чтобы не думать об этой константе.

Задача 3. Докажите, что для любых двух замощений T и T' выполнено сравнение $H_{T,v_0}(v) \equiv H_{T',v_0}(v) \pmod 4$.

Задача 4. Пусть $H(v)$ — функция на вершинах графа G, удовлетворяющая следующему свойству: для любых соседних вершин u и v, ребро между которыми направлено от u к v, либо $H(v) = H(u) + 1$, либо $H(v) = H(u) - 3$. Докажите, что $H(v)$ является функцией высоты единственного замощения T.

Задача 5. Прямоугольник на клетчатой бумаге со стороной клетки 1 разбит на фигурки доминошки. Докажите, что все вершины клеток на границе и внутри прямоугольника можно раскрасить в три цвета так, чтобы для каждых двух вершин, находящихся на расстоянии 1, выполнялось следующее условие: эти вершины разного цвета, если соединяющий их отрезок лежит на границе одной из фигурок домино, и одинакового цвета в противном случае.

Задача 6. Назовем *минимальным разбиением* разбиение $T_{\min}$, в котором все доминошки горизонтальны. Докажите, что для

любого разбиения T ацтекского бриллианта, вершины контура которого покрашены в черный цвет, выполнено неравенство $H_T(v) \geqslant H_{T_{\min}}(v)$.

Назовем *приведенной высотой разбиения* T величину

$$h_T(v) = \frac{H_T(v) - H_{T_{\min}}(v)}{4}.$$

Совет 1: попробуйте посчитать приведенную функцию высоты для минимального замощения и какого-то произвольного. Попробуйте понять, как они связаны.

Совет 2: у функций полезно исследовать точки максимума и минимума.

Задача 7. Операция флипа — это поворот двух доминошек с общей стороной длины 2.

a) Докажите, что любые два разрезания прямоугольной доски на доминошки флип-эквивалентны.

b) Докажите аналогичное утверждение для замощения ацтекского бриллианта.

c) Докажите это для любой фигуры, обладающей минимальным разбиением.

d) Назовем *рангом замощения* T число $r(T) = \sum_v h_T(v)$. Докажите, что любое замощение T ацтекского бриллианта, вершины контура которого покрашены в черный цвет, можно получить из минимального замощения за $r(T)$ флипов, причем за меньшее количество флипов это сделать невозможно.

e) Докажите, что максимальный ранг замощения ацтекского бриллианта порядка n равна $n(n+1)(2n+1)/6$.

Задача 8. Плоскость разбита на равные правильные треугольники. Рассмотрим ромбики, составленные из двух треугольников с общей стороной. Будем замащивать правильный шестиугольник со стороной n.

a) Докажите, что количества ромбов каждого из трех возможных направлений равны.

b) Докажите, что любое рассматриваемое разбиение можно перевести в любое другое с помощью нескольких операций флипа.

Разные лица ортоцентра

Е. А. Морозов

Во всех задачах (кроме 4) дан треугольник ABC, H — его ортоцентр, H_A, H_B, H_C — основания его высот, M — его точка пересечения медиан, M_A, M_B, M_C — середины его сторон, Ω — его описанная окружность, O — её центр.

Задача 1.

a) Докажите, что $\angle H_C H_B H = \angle H_A H_B H$.

b) * (вопрос в сторону) Пусть K — произвольная точка на высоте BH_B, A' — точка пересечения AK и BC, C' — точка пересечения CK и AB. Докажите, что $\angle A' H_B K = \angle C' H_B K$.

Задача 2.

a) Пусть A_1 — точка, симметричная H относительно BC. Докажите, что A_1 лежит на Ω.

b) Пусть A_2 — точка, симметричная H относительно M_A. Докажите, что A_2 лежит на Ω.

c) Докажите, что точка A_2 из п. b) диаметрально противоположна точке A на Ω.

d) Выведите отсюда, что $AH = 2OM_A$.

e) Докажите, что точки O, M, H лежат на одной прямой, причем $MH = 2OM$ (**прямая Эйлера**).

Задача 3.

a) Докажите, что точки M_A, M_B, M_C, H_A лежат на одной окружности.
b) Выведите *только из п. a)*, что точки M_A, M_B, M_C, H_A, H_B, H_C, а также середины отрезков AH, BH, CH лежат на одной окружности (окружность Эйлера, известная также как окружность девяти точек).
c) Найдите, где лежит центр окружности Эйлера и каков её радиус.

Задача 4. (Бывает ли у четырехугольника ортоцентр?) Пусть четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность Ω с центром O. Точки H_A, H_B, H_C, H_D — ортоцентры треугольников BCD, ACD, ABD, ABC соответственно, M_{AB}, M_{BC}, M_{CD}, M_{DA} — середины AB, BC, CD, DA соответственно, M — точка пересечения $M_{AB}M_{CD}$ и $M_{BC}M_{AD}$. Докажите, что

a) $BH_C = CH_B$.
b) прямые AH_A, BH_B, CH_C, DH_D пересекаются в одной точке H.
c) точки O, M, H лежат на одной прямой, причем $OM = MH$ (**прямая Эйлера четырехугольника**).

Задача 5. Пусть P — точка на Ω такая, что $\angle HPB = 90°$. Докажите, что

a) P лежит на прямой HM_B.
b) четверки точек P, H_C, M_B, C и P, H_A, M_B, A лежат на одной окружности.
c) PM_B — биссектриса углов $\angle APH_A$ и $\angle CPH_C$.

Задача 6. Пусть L — проекция H на медиану BM_B. Докажите, что

a) точки A, H, L, C лежат на одной окружности.
b) окружности, описанные около треугольников ABL и CBL касаются AC.

c) прямые H_AH_C, AC, LH, PB пересекаются в одной точке.

Задача 7. *(непростые задачи о разном)

a) Докажите, что прямые Эйлера треугольников AHB, BHC, AHC, ABC пересекаются в одной точке.
b) Пусть l — прямая, проходящая через H перпендикулярно HM_B. Пусть l пересекает AB и BC в точках C' и A' соответственно. Докажите, что H — середина $A'C'$.
c) * Пусть биссектриса угла B треугольника ABC пересекает HM_B в точке N. Точки A' и C' — проекции N на CB и AB. Докажите, что H лежит на $A'C'$.
d) Докажите, что прямая Симсона делит пополам отрезок между точкой на описанной окружности треугольника и его ортоцентром.

Точка со многими свойствами

П. В. Бибиков

Пусть ABC — неравнобедренный треугольник. Окружность ω с центром в P проходит через вершины B и C и пересекает стороны AB и AC в точках D и E соответственно. Прямые CD и BE пересекаются в точке S и пересекают описанную окружность Ω треугольника ABC в точках G и H соответственно. Пусть прямая DE пересекает прямую BC в точке K, а касательные к окружности Ω в вершинах B и C — в точках M и L соответственно.

Задача 1. Докажите, что

- окружность Ω
- описанная окружность γ треугольника ADE
- прямая AK
- перпендикуляр к AK, проходящий через P

- прямая PS
- прямая MG
- прямая LH

пересекаются в одной точке N.

Задача 2. Пусть D и E — произвольные точки на сторонах AB и AC соответственно. Пусть G и H — вторые точки пересечения прямых CD и BE с Ω. Прямая DE пересекает касательную в точке B к Ω в точке M, а касательную в точке C к Ω — в точке L.

a) Докажите, что прямые MG и LH пересекаются в точке N, лежащей на Ω.
b) Докажите, что точки A, N и точка пересечения BC и DE коллинеарны.

Задача 3. Точку S отразили относительно сторон AB и AC. Докажите, что получившиеся точки, точка A и точка N лежат на одной окружности.

Про последовательности

М. Ю. Дмитриева

Задача 1. Существует ли бесконечная последовательность a_1, a_2, a_3, ...натуральных чисел, удовлетворяющая равенству

$$a_{n+2} = a_{n+1} + \sqrt{a_{n+1} + a_n}$$

для любого натурального значения n?

Задача 2. Дана последовательность натуральных чисел $\{a_i\}_{i\geqslant 1}^{\infty}$ и натуральное число n. Докажите, что существует бесконечно много таких k, для которых нельзя подобрать пару (m, t), $\quad m > n$ так, чтобы выполнялось равенство $kn + a_n = tm(m+1) + a_m$.

Задача 3. В бесконечной последовательности a_1, a_2, a_3, ...число a_1 равно 1, а каждое следующее число a_n строится из предыдущего a_{n-1} по правилу: если у числа n наибольший нечетный делитель имеет остаток 1 от деления на 4, то $a_n = a_{n-1}+1$, если же остаток равен 3, то $a_n = a_{n-1} - 1$. Докажите, что в этой последовательности каждое натуральное число встречается бесконечно много раз.

Задача 4. Найдите все бесконечные последовательности натуральных чисел a_0, a_1, a_2, ...такие, что $a_0 = 1$, $a_1 > 1$ и $a_n = \varphi(a_{n+1})$ при всех $n > 0$. (Через $\varphi(k)$, как обычно, обозначено количество натуральных чисел, не превосходящих k и взаимно простых с k.)

Задача 5. Найдите все возрастающие последовательности a_1, a_2, a_3, ...из натуральных чисел такие, что для любых i, $j \in \mathbb{N}$ количество делителей у $i + j$ и $a_i + a_j$ совпадают.

Задача 6. Дана последовательность натуральных чисел a_1, a_2, ...Известно, что для любых n, k число a_{n+k} делится на НОД чисел a_n и a_k. Докажите, что $a_{n+1} \cdot \ldots \cdot a_{n+k}$ делится на $a_1 \cdot \ldots \cdot a_k$ при любых натуральных n и k.

Задача 7. Дано натуральное число k. Докажите, что существует такая бесконечная возрастающая последовательность натуральных чисел $\{a_i\}$, что для любого n число $a_n^2 + k$ делится на a_{n-1}, а число $a_{n-1}^2 + k$ делится на a_n.

Подобие

Е. А. Морозов

Параллельность

Задача 1. Дана трапеция $ABCD$ с основаниями AD и BC. Через точку пересечения её диагоналей O проведена прямая, па-

раллельная основаниям. Докажите, что O делит пополам отрезок этой прямой, заключенный внутри трапеции.

Задача 2. В выпуклый четырехугольник вписан ромб, стороны которого параллельны диагоналям четырехугольника. Найдите сторону ромба, если диагонали четырехугольника равны a и b.

Задача 3. Дан выпуклый четырехугольник $ABCD$. Оказалось, что на сторонах AB и CD существуют такие точки M и K соответственно, что $AK \parallel CM$ и $BK \parallel DM$. Докажите, что исходный четырехугольник — трапеция.

Задача 4. Дан произвольный треугольник ABC с медианами AM и CK. На отрезке AC отмечена произвольная точка N. Точки P и Q на отрезках AB и BC соответственно таковы, что $PN \parallel CK$, $QN \parallel AM$. Докажите, что отрезок PQ делится медианами AM и CK на три равные части.

Задача 5. (задача Л. Кэрролла) Дан произвольный треугольник ABC. Точки A_1, B_1, C_1 на отрезках BC, AC и AB соответственно таковы, что отрезки AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в одной точке. Пусть l — прямая, проходящая через B параллельно AC. Прямые B_1A_1 и B_1C_1 пересекают l в точках P и Q соответственно. Докажите, что $PB = BQ$.

С поворотом

Задача 1. В треугольнике ABC проведена высота BH и отмечен центр описанной окружности O.

a) Докажите, что $\angle ABH = \angle OBC$.

b) Пусть R — радиус описанной окружности треугольника.

Докажите, что $AB \cdot BC = 2BH \cdot R$.

Задача 2. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность ω. Пусть M — произвольная точка на ω, а h_1, h_2, h_3, h_4 — дли-

ны перпендикуляров из точки M на прямые AB, BC, CD, DA соответственно. Докажите, что $h_1h_3 = h_2h_4$.

Задача 3.

a) По двум прямым, пересекающимся в точке O, равномерно движутся точки A и B. Докажите, что всевозможные описанные окружности треугольников AOB пересекаются в одной точке.

b) Даны два отрезка AB и CD. Постройте точку O такую, что треугольники AOB и COD подобны с соответствующими углами при вершине O. Сколько есть таких точек?

c) По двум окружностям, пересекающимся в точках P и Q, с равными угловыми скоростями по часовой стрелке двигаются точки A и B, стартуя из P. Докажите, что прямая AB всегда проходит через Q.

Задача 4. (теорема Птолемея)* Докажите, что для вписанного в окружность четырехугольника сумма произведений противоположных сторон равна произведению диагоналей.

Алгебраическая добавка

М. Ю. Дмитриева

Задача 1. Даны многочлены $P(x)$ и $Q(x)$ с целыми коэффициентами. Обозначим $a_n = n! + n$. Докажите, что если $\frac{P(a_n)}{Q(a_n)}$ целое при всех натуральных n, то $\frac{P(n)}{Q(n)}$ целое при всех таких n, что $Q(n) \neq 0$.

Задача 2. Дано простое число p и натуральные числа a_1, a_2, ..., a_n такие, что при всех целых неотрицательных k $a_1^k + a_2^k + \ldots + a_n^k$ делится на p. Докажите, что тогда каждый из остатков при делении на p встречается среди чисел a_1, a_2, ..., a_n кратное p количество раз.

Задача 3. Многочлен $P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^n + \ldots + a_1x + a_0$ имеет n различных ненулевых действительных корней. Докажите, что

многочлен $Q(x) = C_{2n}^{n} a_n x^n + C_{2n-1}^{n-1} a_{n-1} x^n + \ldots + C_{n+1}^{1} a_1 x + C_n^0 a_0$ также имеет n различных действительных корней.

Задача 4. Пусть a_n — количество цифр, больших четырех в десятичной записи числа 2^n. Найдите сумму

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2^n}.$$

Разнобой...

Е. А. Морозов

Задача 1. Точка I — центр вписанной окружности треугольника ABC, касающейся сторон AB, BC, AC в точках C_1, A_1, B_1 соответственно. Пусть O — центр описанной окружности треугольника ABC, а H_1 — ортоцентр треугольника $A_1B_1C_1$. Докажите, что точки I, O, H_1 лежат на одной прямой.

Задача 2. Внутри треугольника ABC отмечена точка P такая, что $\angle APB - \angle ACB = \angle APC - \angle ABC$. Докажите, что биссектрисы углов ABP и ACP пересекаются на отрезке AP.

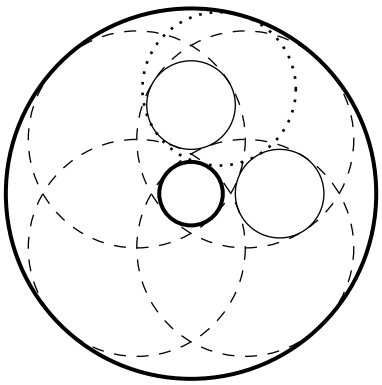
Задача 3. Внутри вписанного шестиугольника $ABCDEF$ выбрана точка P. Пусть O_1, O_2, O_3, O_4, O_5 и O_6 — центры окружностей, описанных около треугольников PAB, PBC, PCD, PDE, PEF и PFA соответственно. Докажите, что прямые O_1O_4, O_2O_5 и O_3O_6 пересекаются в одной точке или попарно параллельны.

Задача 4. Даны правильный треугольник ABC с центром O и точка P, не лежащая на его оси симметрии. Прямые AP, BP и CP пересекают соответственно прямые BC, CA и AB в точках A_1, B_1 и C_1. Докажите, что окружности, описанные около треугольников AOA_1, BOB_1 и COC_1, имеют две общих точки.

Задача 5. В угол вписаны окружности ω_1 и ω_2 радиусов r_1 и r_2, а в вертикальный угол вписаны окружности ω_3 и ω_4 радиусов

r_3 и r_4, причем $r_1 < r_2$ и $r_3 < r_4$. Оказалось, что существует окружность, касающаяся ω_1, ω_2, ω_3, ω_4 внешним образом, а также что существует окружность, касающаяся ω_1 и ω_3 внутренним, а ω_2 и ω_4 — внешним образом. Докажите, что $r_1 = r_3$ и $r_2 = r_4$.

Задача 6. На картинке жирные окружности концентрические, а центры пунктирных окружностей расположены в вершинах квадрата. Оказалось, что существует точечная окружность, касающаяся двух жирных и двух сплошных как на рисунке. Найдите отношение радиусов жирных окружностей.



Задача 7. Продолжения сторон AB и CD выпуклого четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке E, продолжения сторон AD и BC — в точке F, причем точка A лежит между точками B и E, а также между точками D и F. Диагонали AC и BD пересекаются в точке P. Окружность ω_1 проходит через точку D и касается прямой AC в точке P. Окружность ω_2 проходит через точку C и касается прямой BD в точке P. Пусть X — точка пересечения окружности ω_1 и прямой AD, а Y — точка пересечения окружности ω_2 и прямой BC. Пусть Q — вторая точка пересечения окружностей ω_1 и ω_2. Докажите, что перпендикуляр из точки P к прямой EF проходит через центр описанной окружности треугольника XQY.

Множители Лагранжа – 1

П. В. Бибиков

Совет: нужно отдельно разбирать случай границы, а затем использовать метод множителей Лагранжа.

Задача 1. Найти минимум функции $f(x, y) = 5x^2 + 2xy + 3y^2$ при условии $g(x, y) = 7x^2 + 2xy + 4y^2 - 3 = 0$.

Задача 2. Для неотрицательных a, b, c верно, что $a + b + c = 1$. Докажите неравенство $1 + 12abc \geqslant 4(ab + bc + ca)$.

Задача 3. Докажите, что для всех неотрицательных x, y, z, таких, что $x + y + z = 1$, имеет место неравенство

$$xy + yz + zx - 2xyz \leqslant \frac{7}{27}.$$

Задача 4. Для неотрицательных вещественных чисел a, b, c, удовлетворяющих соотношению $a + b + c = 1$, докажите неравенство $a^2b + b^2c + c^2a \leqslant \frac{4}{27}$.

Задача 5. Известно, что a, b, c, $d \geqslant 0$ и $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1$. Докажите, что

$$a^3 + b^3 + c^3 + d^3 + abc + bcd + cda + dab \leqslant 1.$$

Задача 6. Пусть a, b, c, d — неотрицательные вещественные числа, такие, что $a + b + c + d = 4$. Докажите, что $3(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) + 4abcd \geqslant 16$.

Задача 7. Даны положительные числа a, b, c. Найти все положительные числа x, y, z, такие, что

$$\begin{cases} x + y + z = a + b + c \\ 4xyz - (a^2x + b^2y + c^2z) = abc. \end{cases}$$

Гомотетия – 1

Д. А. Байгушев

Задача 1. На плоскости даны точки A и B и прямая l. По какой траектории движется точка пересечения медиан треугольников ABC, если точка C движется по прямой l?

Задача 2. Внутри угла расположены две окружности с центрами A, B, которые касаются друг друга и сторон угла. Докажите, что окружность с диаметром AB касается сторон угла. Р
Задача 3. Четырёхугольник разрезан диагоналями на четыре треугольника. Докажите, что точки пересечения медиан этих треугольников образуют параллелограмм.

Задача 4. На стороне BC треугольника ABC выбрана такая точка D, что радиусы вписанных окружностей треугольников ABD и ADC равны. Докажите, что и радиусы вневписанных окружностей этих треугольников, соответствующих вершине A, тоже равны.

Задача 5. Пусть в окружности ω проведена хорда AB, и ещё одна окружность касается ω в точке C и отрезка AB в точке D. Тогда прямая CD проходит через середину дуги AB, не содержащей точки C.

Задача 6. Пусть M и P — точки касания вписанной и вневписанной окружностей треугольника ABC со стороной BC, MN — диаметр вписанной окружности. Докажите, что точки A, N и P лежат на одной прямой.

Задача 7. Впишите в треугольник две равные окружности, каждая из которых касается двух сторон треугольника и другой окружности.

Задача 8. Через середину M стороны BC неравнобедренного треугольника ABC проведена касательная к его вписанной окружности, отличная от BC, точка касания обозначена через Y. Докажите, что прямая AY проходит через точку касания вневписанной окружности с отрезком BC.

Комбинаторная геометрия. Многоугольники

Е. А. Морозов

Самые частые приемы при решении задач о выпуклых многоугольниках — индукция и принцип крайнего.

Задача 1. (лемма об «ушах») Выпуклый n-угольник ($n > 3$) триангулирован. Докажите, что найдутся хотя бы два треугольника у которых две стороны совпадают со сторонами многоугольника.

Задача 2. Выпуклый многоугольник триангулирован. Назовем *перестройкой* следующую операцию: в четырехугольнике, все стороны которого являются сторонами многоугольника или диагоналями триангуляции, одна диагональ меняется на другую. Докажите, что перестройками из любой триангуляции можно получить любую другую.

Задача 3. Докажите, что для всякой триангуляции выпуклго многоугольника можно покрасит вершины этого многоугольника в 3 цвета так, чтобы вершины, соединенные стороной многоугольника или диагональю были покрашены в разные цвета.

Задача 4. (о диагоналях) a) Сколькими способами можно в выпуклом n-угольнике провести пару диагоналей, имеющих общую внутреннюю точку? b) Докажите, что в выпуклом n-угольнике нельзя провести больше $n - 3$ диагоналей, не имеющих общих внутренних точек. c) * В выпуклом n-угольнике проведено несколько диагоналей. Проведённая диагональ называется хорошей, если она пересекается (по внутренним точкам) ровно с одной из других проведённых диагоналей. Найдите наибольшее возможное количество хороших диагоналей.

Задача 5. Площадь выпуклого многоугольника равна 1. Докажите, что внутри него есть треугольник площади хотя бы $\frac{1}{4}$.

Задача 6. (о высотах) a) Из точки внутри выпуклого многоугольника опущены перпендикуляры на его стороны. Докажите, что хотя бы у одного из перпендикуляров основание попадёт на сторону (а не на её продолжение). b) В выпуклом многоугольнике из каждой вершины опущены перпендикуляры на все не смежные с ней стороны. Может ли оказаться так, что основание каждого перпендикуляра попало на продолжения стороны, а не на саму сторону? c) В окружность вписан 101-угольник. Из каждой его вершины опустили перпендикуляр на прямую, содержащую противоположную сторону. Докажите, что хотя бы у одного из перпендикуляров основание попадёт на сторону (а не на её продолжение).

Задача 7. * Дан выпуклый n-угольник без параллельных сторон. Для каждой стороны взяли самую далёкую вершину и посчитали угол, под которым она видна из той вершины. Чему равна сумма этих углов?

О разбиениях на доминошки

П. В. Бибиков

Задача 1.

a) (**лемма о диагонали**) Пусть дана фигура, которая содержит фрагмент, состоящий из трех диагональных рядов клеток, причем ровно две клетки, соседние с угловыми, принадлежат фигуре. Тогда количество разбиений такой фигуры на доминошки четно.

b) (**лемма о полудиагонали**) Пусть теперь у одной из угловых клеток есть ровно три соседние клетки из нашей фигуры. Если удалить из нее доминошку, состоящую из такой угловой клетки и клетки, не принадлежащей диагоналям, то четность количества разбиения на доминошки у новой фигуры будет такой же, как и у исходной.

Задача 2. Рассмотрим последовательность фигур H_n, где фигура H_1 является горизонтальной доминошкой 1×2, а фигура H_n получается из H_{n-1} добавлением слева вертикального прямоугольника $2 \times (2n-1)$. Тогда все фигуры H_n разбиваются на доминошки нечетным числом способов.

Задача 3. Докажите, что количество разбиений на доминошки прямоугольника $m \times n$ нечетно тогда и только тогда, когда $(m+1, n+1) = 1$.

Задача 4. Пусть дана клетчатая фигура, симметричная относительно диагональной прямой, идущей из левой нижней части фигуры в правую верхнюю часть. Тогда, если на оси симметрии лежит $2n$ клеток фигуры, то число разбиений такой фигуры на доминошки делится на 2^n.

Задача 5. В предположениях предыдущей задачи отметим через одну n клеток диагонали и поместим в них произвольным образом числа 0 и 1. Рассмотрим такие разбиения фигуры на домино, которые согласованы со сделанной разметкой в следующем смысле: для каждой доминошки, накрывающей клетку с цифрой 0, вторая клетка расположена правее или ниже, а для каждой доминошки, накрывающей клетку с цифрой 1, вторая клетка расположена левее или выше. Тогда количество согласованных разбиений не зависит от расстановки цифр.

Задача 6.

a) Докажите, что количество разбиений квадрата $2n \times 2n$ на доминошки делится на 4.

b) Докажите, что это количество равно $2^n(2k+1)^2$ для некоторого целого k.

Гомотетия – 2

Д. А. Байгушев

Задача 1. Внутри угла расположены две окружности с центрами A, B, которые касаются друг друга и сторон угла. Докажите, что окружность с диаметром AB касается сторон угла.

Задача 2. Четырёхугольник разрезан диагоналями на четыре треугольника. Докажите, что точки пересечения медиан этих треугольников образуют параллелограмм.

Задача 3. На стороне BC треугольника ABC выбрана такая точка D, что радиусы вписанных окружностей треугольников ABD и ADC равны. Докажите, что и радиусы вневписанных окружностей этих треугольников, соответствующих вершине A, тоже равны.

Задача 4. Пусть M и P — точки касания вписанной и вневписанной окружностей треугольника ABC со стороной BC, MN — диаметр вписанной окружности. Докажите, что точки A, N и P лежат на одной прямой.

Задача 5. Впишите в треугольник две равные окружности, каждая из которых касается двух сторон треугольника и другой окружности.

Задача 6. Через середину M стороны BC неравнобедренного треугольника ABC проведена касательная к его вписанной окружности, отличная от BC, точка касания обозначена через Y. Докажите, что прямая AY проходит через точку касания вневписанной окружности с отрезком BC.

Задача 7. Пусть I — центр вписанной окружности треугольника ABC, I_b — точка касания ее со стороной AC, M_b — середина стороны AC. Докажите, что прямая M_bI делит отрезок BI_b пополам.

Задача 8. В каждый угол треугольника ABC вписана окружность, касающаяся описанной окружности. Пусть A_1, B_1 и C_1 — точки касания этих окружностей с описанной окружностью. Докажите, что прямые AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке.

Алгоритмы

П. В. Бибиков

Задача 1. Есть набор грузов общей массой 9 тонн, причем каждый груз весит не более 1 тонны. Эти грузы нужно перевезти на машинах, каждая из которых может перевозить суммарный вес не более 3 тонн. Какого наименьшего количества машин заведомо будет достаточно?

Задача 2. Пусть n — натуральное число. Найти наименьшее целое k, для которого выполнено следующее условие: любой набор вещественных чисел a_1, ..., $a_d \in [0;1]$, таких, что $a_1 + \ldots + a_d = n$ можно разбить на k групп, сумма чисел в каждой из которых не превосходит 1.

Задача 3. По кругу стоят 200 студентов из 10 групп, в каждой из которых 20 студентов. Докажите, что можно в каждой группе выбрать старосту так, чтобы никаких два старосты не стояли рядом.

Задача 4. Можно ли выбрать 2019 различных натуральных чисел, не превосходящих 100000, никакие три из которых не образуют арифметическую прогрессию?

Задача 5. В таблице $m \times n$ записаны натуральные числа. За одну операцию разрешается прибавить к любым двум соседним числам (т.е. к числам, записанным в клетки с общей стороной) произвольное целое число так, чтобы в результате они остались неотрицательными. Найти необходимое и достаточное условие, при котором все числа в таблице можно сделать равными 0.

Задача 6. Алиса и Боб играют в игру. На столе лежат k листов бумаги. Сначала Алиса пишет на каждом листке набор каких-то чисел от 1 до 2019 (на разных листках числа могут повторяться; также Алиса может не написать ни одного числа на каком-то листке или написать сразу все числа). Затем Алиса пишет на обратной стороне каждого листа все оставшиеся числа от 1 до 2019

(т.е. на каждом листе написаны все числа от 1 до 2019). Затем Боб переворачивает некоторые листы другой стороной вверх (он также может не перевернуть ни одного листа или перевернуть сразу все). Боб выигрывает, если на верхних сторонах всех листков будут записаны все числа от 1 до 2019. При каком наименьшем k Боб гарантированно сможет выиграть?

Стереографическая проекция и окружности на сфере

Е. А. Морозов

Определение. Пусть сфера Σ касается плоскости π в точке S, а N — точка на Σ, диаметрально противоположная точке S. *Стереографической проекцией* называется отображение $A \mapsto A' = (NA) \cap \pi$.

Задача 1.

a) Докажите, что стереографическая проекция есть просто ограничение некоторой инверсии в пространстве на сферу.

b) Докажите, что при стереографической проекции окружность на сфере переходит в окружность или прямую на плоскости.

c) * Определите угол между окружностями на сфере и докажите, что стереографическая проекция сохраняет углы.

Задача 2. Докажите, что на плоскости существует 12 окружностей таких, что никакие две не пересекаются в двух точках, никакие три не касаются в одной точке, но каждая касается ровно 5 других.

Задача 3.

a) Семь из восьми вершин выпуклого многогранника, комбинаторно эквивалентного кубу, лежат на некоторой сфере. Докажите, что восьмая вершина этого многогранника тоже лежит на этой сфере.

b) Постройте такой выпуклый многогранник, что не существует многогранника такого же комбинаторного строения, все вершины которого лежат на некоторой сфере.

c) Постройте такой выпуклый многогранник, что не существует многогранника такого же комбинаторного строения, все грани которого касаются некоторой сферы.

Определение. *Касательным конусом* окружности ω на сфере, отличной от большого круга, называется пересечение всех полупространств, граничные плоскости которых касаются сферы в точках ω. Вершина этого конуса называется *полюсом* окружности ω.

Задача 4. Переформулируйте все варианты взаимного расположения двух окружностей на сфере (пересечение/касание/отсутствие общих точек) в терминах их полюсов.

Задача 5. Все звенья некоторой замкнутой четырехзвенной ломаной в пространстве касаются некоторой сферы. Докажите, что точки касания лежат на одной окружности.

Задача 6. Сфера касается 99 рёбер некоторой выпуклой 50-угольной пирамиды. Обязательно ли тогда она касается и 100-го ребра этой пирамиды?

Задача 7. * (стереографическая проекция в изотропной геометрии) Пусть

$$C = \{(x, y, z) \mid x^2 + (z-1)^2 = 1\}$$

есть цилиндр в $\mathbb{R}^3$, $N = (0, 0, 2) \in C$. Определим стереографическую проекцию цилиндра на плоскость по аналогии с определением IV.1. Докажите, что при этой проекции плоские сечения C переходят в прямые или параболы с осью, параллельной Oy.

Множители Лагранжа – 2

П. В. Бибиков

Совет: в качестве переменных полезно вводить не только длины, но и углы. Соотношения между углами часто написать проще, чем соотношения между сторонами.

Задача 1. Стороны четырехугольника имеют фиксированную длину, а углы могут меняться. Докажите, что его площадь максимальна, если он вписанный.

Задача 2. Найти точку P внутри данного треугольника, для которой сумма отношений длин сторон треугольника к расстояниям от P до этих сторон минимальна.

Задача 3. Через данную точку M, лежащую внутри угла с вершиной K, провести отрезок AB с концами на сторонах угла так, чтобы величина $\frac{1}{MA} + \frac{1}{MB}$ была наибольшей.

Задача 4. Доказать, что для точки Лемуана L сумма квадратов расстояниям до сторон треугольника минимальна.

2. Вторая неделя

Теория чисел

А. О. Герасименко

Задача 1. Решите в натуральных числах уравнение

$$x^4 + 2x^3 + 2x^2 + x + 3 = y^2.$$

Задача 2. Даны натуральные a, b, c, d такие, что $ab = cd$. Докажите, что $a + b + c + d$ не может быть простым числом.

Задача 3. Число $(1+\sqrt{2})^{2019}$ записали в виде $a+b\sqrt{2}$. Докажите, что $|a^2 - 2b^2| = 1$.

Задача 4. Различные натуральные a, b, c таковы, что $ab+a+b \vdots c$, $bc + b + c \vdots a$, $ca + c + a \vdots b$. Докажите, что хотя бы одно из чисел a, b, c составное.

Задача 5. Натуральные числа a, b, c таковы, что $ab+ac+bc = 3c^2$ и $a-b$ — простое число. Докажите, что $8c+1$ — точный квадрат.

Задача 6. Натуральные числа a, x и y, большие 100, таковы, что $y^2 - 1 = a^2(x^2 - 1)$. Какое наименьшее значение может принимать дробь $\frac{a}{x}$?

Задача 7. Докажите, что любое рациональное число представляется в виде суммы четырех кубов рациональных чисел.

Задача 8. Найдите все натуральные x и простые p, для которых выполняется равенство $x^8 + 2^{2^x+2} = p$.

Задача 9. Решите в целых числах уравнение

$$(x^2 + y)(y^2 + x) = (x - y)^4.$$

Теория чисел. Добавка

А. О. Герасименко

Задача 1. Докажите, что существует бесконечно много натуральных n таких, что наибольшие простые делители у чисел $n^4 + n^2 + 1$ и $(n + 1)^4 + (n + 1)^2 + 1$ совпадают.

Задача 2. Квадратный трехчлен $ax^2 + bx + c$ с целыми коэффициентами принимает в p подряд идущих целых точках значения, являющиеся полными квадратами (p — простое число, $p \geq 5$). Докажите, что $b^2 - 4ac$ делится на p.

Задача 3. Дано простое $p = 4k + 3$. $\frac{m}{n}$ — несократимая дробь, такая, что

$$\frac{1}{0^2 + 1} + \frac{1}{1^2 + 1} + \frac{1}{2^2 + 1} + \cdots + \frac{1}{(p - 1)^2 + 1} = \frac{m}{n}.$$

Докажите, что $2m - n$ делится на p.

Комбинаторная комбинаторика

М. Ю. Дмитриева

Задача 1.

a) Сколькими способами можно расположить в ряд 100 фигурок Супермэна, 100 фигурок Бэтмэна и 100 фигурок Флэша так, чтобы никакие две фигурки Флэша не стояли рядом?

b) На полке стоят n книг. Сколькими способами можно выбрать k книг так, чтобы никакие две выбранные книги не стояли рядом? Все книги разные.

c) За круглым столом короля Артура сидят n рыцарей. Каждый из них враждует со своими соседями. Король хочет составить отряд из k рыцарей. Сколькими способами это можно сделать так, чтобы в этом отряде не было врагов?

Задача 2. У сороконожки есть 40 носков и 40 ботинок. Она может надевать их в любом порядке с одним лишь условием: на каждую ногу надо сначала надеть носок, а только потом ботинок. Сколькими способами она может обуться?

Задача 3. В городе Судиславль живут 2020 мужчин и 2019 женщин. Сколько существует способов выбрать из них тех, кому подарят подарки на день города, если мэр хочет, чтобы среди них мужчин было больше, чем женщин?

Задача 4. Из доски $k \times k$ выбросили клетки, лежащие выше главной диагонали. В оставшиеся $\frac{k(k+1)}{2}$ клеток расставляют числа от 1 до $\frac{k(k+1)}{2}$ каждое по одному разу. Сколько существует способов так расставить числа, что $M_1 < M_2 < \ldots < M_k$, где через M_i обозначено максимальное число в i-м столбце (содержащем клеток)?

Задача 5. Сколько существует различных способов расположить королей на чёрных клетках таблицы $2n \times 2n$ так, чтобы они не били друг друга?

Задача 6. Петя хочет выписать все возможные последовательности из 100 натуральных чисел, в каждой из которых хотя бы раз встречается тройка, а любые два соседних члена различаются не больше, чем на 1. Сколько последовательностей ему придётся выписать?

Задача 7. Улитка должна проползти вдоль линий клетчатой бумаги путь длины $2n$, начав и кончив свой путь в данном узле. Сколько у неё различных маршрутов?

Решетки и блуждания

П. В. Бибиков

Полезная конструкция. Рассмотрим треугольную решетку, т.е. разбиение плоскости на равные треугольники параллельными прямыми, которые получаются сдвигами на три вектора с нулевой суммой. Два треугольника с соседней стороной назовем *ромбиком*. Предположим, что мы замащиваем фигуру на треугольной решетке ромбиками. Тогда для таких замощений можно также определить функцию высоты $H_{T,v_0}(v)$, обходя первый треугольник по контуру, а каждый следующий так, чтобы обход был согласован с предыдущими. Стартуя с произвольной вершины v_0, мы строим произвольный путь к вершине v, складывая отрезки, пройденные с направлении стрелок, и вычитая отрезки, пройденные против этого направления.

Однако в некоторых ситуациях можно обойтись без введения функции высоты. Полезно просто *обходить фигуры по контурам, кодируя путь* (например, приписывая каждому из направлений движения соответствующую букву) и *следя за тем, что обход замкнутого односвязного контура равен* 0. Условие равенства 0 обхода по контуру является мощным инвариантом, противоречие с которым можно получить, придавать элемен-

там кода (т.е. буквам, соответствующим направлению движения) различный смысл, априори не связанный с условием задачи.

Задача 1. Докажите, что для треугольной решетки и двух замощений T и T' ромбиками функции высоты связаны сравнением $H_{T,v_0}(v) \equiv H_{T',v_0}(v) \pmod 3$.

Задача 2. Рассмотрим замощение правильного шестиугольника со стороной n на треугольной решетке.

a) Докажите, что количество замощений правильного шестиугольника со стороной n ромбами со стороной 1 равно количеству трехмерных диаграмм Юнга, расположенных в кубе с ребром длины n.

b) Докажите, что количества ромбов каждого из трех возможных направлений равны.

c) Докажите, что любое рассматриваемое разбиение можно перевести в любое другое с помощью нескольких операций флипа.

d) Докажите, что число $H_{T,v_0}(v)/\sqrt{3}$ равно расстоянию от вершины v трехмерной диаграммы Юнга до плоскости, проходящей через v_0 перпендикулярно вектору $(1;1;1)$.

Задача 3. Рассматривается правильный восьмиугольник со стороной $k \in \mathbb{N}$, доминошки 1×2 и ромбы со стороной 1 и углом $45°$.

a) Докажите, что при четных k такой восьмиугольник можно разбить на доминошки и ромбы.

b) Докажите, что при нечетных k такого разбиения не существует.

LTE–лемма

А. О. Герасименко

Обозначим через $\|n\|_p$ степень вхождения простого числа p в разложение n на простые множители.

Лемма об уточнении показателя (LTE–лемма) гласит, что для простого p и **целых** a и b, не кратных p, а также произвольного n верно следующее:

a) если $p > 2$, и $p \mid a - b$, то $\|a^n - b^n\|_p = \|a - b\|_p + \|n\|_p$;
b) если $p = 2$, и $p^2 \mid (a - b)$, то $\|a^n - b^n\|_p = \|a - b\|_p + \|n\|_p$.

Задача 1. Дано простое число p и натуральные числа a и n. Докажите, что если $2^p + 3^p = a^n$, то $n = 1$.

Задача 2. Решите уравнение $3^x = 2^x y + 1$ в натуральных числах.

Задача 3. Сколькими нулями оканчивается число $4^{5^6} + 6^{5^4}$?

Задача 4. Найдите все натуральные k такие, что произведение первых k простых чисел, уменьшенное на 1, является точной степенью натурального числа (большей, чем первая).

Задача 5. Дано натуральное $k > 1$. Докажите, что существует бесконечно много натуральных n таких, что $n \mid 1^n + 2^n + 3^n + \cdots + k^n$.

Задача 6. Существует ли N делящееся ровно на 2019 различных простых чисел такое, что N делит $2^N + 1$? [N может делится на степени каких-нибудь простых.]

Задача 7. Докажите, что для любого натурального $a > 3$ существует бесконечно много натуральных n,что $a^n - 1$ делится на n^2.

Задача 8. Найдите все натуральные числа n и p, такие, что p — простое, $n \leqslant 2p$ и

$$(p-1)^n + 1 \vdots n^{p-1}.$$

Задача 9. Найдите все тройки (p, x, y), где p простое, а x и y — натуральные, такие, что $x^{p-1} + y$ и $x + y^{p-1}$ — точные степени p.

Задача 10. Для каждого натурального k обозначим через $C(k)$ сумму всех простых различных делителей числа k. Например

$C(1) = 0, C(2) = 2, C(45) = 8$. Найдите все натуральные n для которых $C(2^n + 1) = C(n)$.

Геометрические неравенства

А. О. Герасименко

Задача 1. Дан четырехугольник $ABCD$, причем $AB < BC$ и $AD < DC$. M — точка на диагонали BD. Докажите, что $AM < MC$.

Задача 2. Отрезки AB и CD длины 1 пересекаются в точке O, $\angle AOC = 60°$. Докажите, что $AC + BD \geqslant 1$.

Задача 3. Пусть биссектрисы углов A, B и C треугольника ABC пересекают вторично его описанную окружность в точках A_1, B_1 и C_1 соответственно. Докажите, что

$$S_{ABC_1} + S_{AB_1C} + S_{A_1BC} \geqslant S_{ABC}.$$

Задача 4. Вписанная окружность касается сторон AB, BC и CA треугольника ABC в точках C_1, A_1 B_1 соответственно. Докажите, что

$$\frac{AB}{A_1B_1} + \frac{AC}{A_1C_1} + \frac{BC}{B_1C_1} \geqslant 6.$$

Задача 5. На сторонах AB и BC квадрата $ABCD$ отмечены точки P и Q соответственно так, что $\angle PDQ = 75°$. Докажите, что $PA + QC + AB \geqslant PQ$.

Задача 6. AK и CL — биссектрисы треугольника ABC. Серединный перпендикуляр к AC пересекает отрезок KL в точке M. Докажите, что $3\angle AMC < \pi + 2\angle ABC$.

Задача 7. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ диагональ AC делится диагональю BD пополам, а угол B равен $60°$. Докажите, что $AD + DC \geqslant BD$.

Задача 8. В окружность с радиусом R вписан выпуклый шестиугольник $ABCDEF$. Диагонали AD и BE, BE и CF, CF и AD в точках M, N, K соответственно. Пусть $r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6$ — радиусы вписанных окружностей в треугольники ABM, BCN, CDK, DEM, EFN, FAK. Докажите, что $r_1+r_2+r_3+r_4+r_5+r_6 \leqslant R\sqrt{3}$.

Задача 9. A convex hexagon $A_1B_1A_2B_2A_3B_3$ is inscribed in a circle Ω of radius R. The diagonals A_1B_2, A_2B_3 and A_3B_1 concur at X. For $i = 1, 2, 3$ let ω_i be the circle tangent to the segments XA_i and XB_i and to the arc A_iB_i of Ω not containing other vertices of the hexagon; let r_i be the radius of ω_i.

(*a*) Prove that $R \geqslant r_1 + r_2 + r_3$.

(*b*) If $R = r_1 + r_2 + r_3$, prove that the six points where the circles ω_i touch the diagonals A_1B_2, A_2B_3, A_3B_1 are concyclic.

Добавка по геометрическим неравенствам

А. О. Герасименко

Задача 1. На плоскости даны точка O и многоугольник F (не обязательно выпуклый). Обозначим за P периметр F, за D сумму расстояний от O до вершин F, за H сумму расстояний от O до прямых, содержащих стороны F. Докажите, что $D^2 - H^2 \geqslant P^2/4$.

Задача 2. Четырехугольник $ABCD$ описан вокруг окружности с радиусом 1. Найдите максимальное возможное значение величины $\frac{1}{AC^2} + \frac{1}{BD^2}$.

Задача 3. Дан треугольник ABC, в котором G — центроид, O — центр описанной окружности. Пусть X — точка на плоскости, такая, что $\angle XOG = 90^\circ$. Докажите, что $XA + XB + XC \geqslant OA + OB + OC$.

Задача 4. Докажите, что в остроугольном треугольнике с нормальными обозначениями $\angle OIH < 135^\circ$.

Обобщенная теорема Ван дер Вардена

А. Кушнир

a) Докажите, что найдется клетчатый прямоугольник, угловые клетки которого раскрашены в один и тот же цвет. b) Докажите, что найдутся 100 строк и 100 столбцов, клетки на пересечении которых раскрашены в один и тот же цвет.

Задача 1. Докажите, что натуральные числа можно покрасить в 2 цвета так, чтобы не было ни арифметических, ни геометрических бесконечных монохроматических прогрессий.

Теорема (Ван дер Вардена)**.** *Если натуральный ряд раскрашен в конечное число цветов, то в этой раскраске найдутся сколь угодно длинные монохроматические арифметические прогрессии.*

Далее в листике будет доказано обобщение теоремы Ван дер Вардена.

Теорема. *Для любой конечной клетчатой фигуры M и для любого натурального числа k существует такое натуральное число N, что при любой раскраске клетчатого квадрата $N \times N$ в k цветов найдется монохроматическая клетчатая фигура, гомотетичная M.*

Задача 2. (Доказательство обощенной теоремы Ван дер Вардена).

a) Докажите базу индукции $|M| = 2$, количество цветов — любое.

b) Докажите слабый индукционный переход обобщенной теоремы Ван дер Вардена: пусть теорема доказана для фигур размера n и любого числа цветов, докажите для фигур размера $n + 1$ и двух цветов.

c) Обозначим через M' фигуру, полученную из M удалением одной клетки. Пусть фигура $S = \lambda_1 M + \lambda_2 M + \ldots + \lambda_k M$ (где «+» — это сумма Минковского) раскрашена в несколько цветов так, что ее подфигура $S' = \lambda_1 M' + \lambda_2 M' + \ldots + \lambda_k M'$ — красная, и что в S нет одноцветной подфигуры, гомотетичной M. Докажите, что цвет любой клетки фигуры $S \setminus S'$ отличен от красного.

d) Докажите сильный индукционный переход обобщенной теоремы Ван дер Вардена: пусть теорема доказана для фигур размера n и любого числа цветов, докажите для фигур размера $n+1$ и k цветов.

Задача 3. Некоторые натуральные числа покрашены в красный цвет. Известно, что среди любых 1000 чисел подряд есть красное. Докажите, что есть арифметическая прогрессия длины 100 из красных чисел.

Задача 4. Докажите, что при любых натуральных значениях n и N и при любом разбиении натурального ряда на N классов хотя бы один из них содержит n арифметических прогрессий длины n, первые члены которых образуют геометрическую прогрессию.

Задача 5. Клетки бесконечной плоскости заполнены целыми числами. Докажите, что есть квадрат с кратной 2019 суммой чисел внутри.

Задача 6. Два игрока (Питирим и Вася) по очереди закрашивают клетки изначально белой бесконечной клетчатой плоскости. Питирим — по одной клетке в синий цвет, Вася — по 100 клеток в черный. Начинает Питирим. Цель Питирима — закрасить в синий цвет четыре клетки, центры которых являются a) вершинами некоторого квадрата; b) вершинами некоторого квадрата со сторонами, параллельными линиям сетки. Может ли Вася ему помешать?

Круговые многочлены – 1

П. В. Бибиков

При работе со степенями натуральных чисел невероятным образом оказываются полезны так называемые *круговые многочлены*, или *многочлены деления круга*. Вообще использование многочленов в теории чисел встречаются не так уж и редко, но зачастую эти многочлены определяются довольно просто. А вот многочлены деления круга определяются с помощью комплексных чисел...

Напомним, что *корнем n-й степени из единицы* называется такое комплексное число ξ, что $\xi^n = 1$. Корней n-й степени из 1 существует ровно n штук, и равны они

$$\xi_k := \cos\frac{2\pi k}{n} + i\sin\frac{2\pi k}{n} = e^{\frac{2\pi i k}{n}}, \quad \text{где } k = 0,\ 1,\ ...,\ n-1.$$

Круговым многочленом порядка n называется многочлен

$$\Phi_n(x) = \prod_{(k,n)=1} (x - \xi_k),$$

где ξ_k — корни n-й степени из 1. Именно эти, на первый взгляд, странные многочлены оказываются очень полезны при решении различных задач по теории чисел.

Начнем с того, что докажем основные свойства круговых многочленов.

Задача 1. Докажите, что если p — простое, то $\Phi_p(x) = 1 + x + x^2 + \ldots + x^{p-1}$.

Задача 2. Докажите, что $\prod\limits_{d|n} \Phi_d(x) = x^n - 1$. В частности, $\Phi_n(x) \mid x^n - 1$ и $\sum\limits_{d|n} \varphi(d) = n$.

Задача 3. Докажите, что $\Phi_n(x) \in \mathbb{Z}[x]$.

Задача 4. Пусть p — произвольное простое число. Докажите, что

$$\Phi_{pn}(x) = \begin{cases} \Phi_n(x^p), & \text{если } p \mid n, \\ \frac{\Phi_n(x^p)}{\Phi_n(x)}, & \text{если } p \nmid n \end{cases} \quad \text{и} \quad \Phi_{p^k n}(x) = \begin{cases} \Phi_n(x^{p^k}), & \text{если } p \mid n, \\ \frac{\Phi_n(x^{p^k})}{\Phi_n(x^{p^{k-1}})}, & \text{если } p \nmid n. \end{cases}$$

Задача 5.

a) Докажите, что многочлены $\Phi_n(x)$ и $\Phi_m(x)$ взаимно просты.
b) Докажите, что $\Phi_{kn}(x) \mid \frac{x^{kn}-1}{x^n-1}$ при $k \neq 1$.
c) Докажите, что если числа $\Phi_n(k)$ и $\Phi_m(k)$ не взаимно просты, то $\frac{m}{n}$ является степенью некоторого простого числа (возможно отрицательной).

Задача 6. Пусть m и n — целые числа и p — простой делитель $\Phi_n(m)$. Докажите, что либо $p \mid n$, либо $n \mid p-1$.

Круговые многочлены – 2

П. В. Бибиков

Задача 1. Докажите, что для любого натурального n существует бесконечно много простых чисел p, таких, что $n \mid p-1$.

Задача 2. Пусть p — простое число. Докажите, что существует такое простое число q, что для любого натурального n число $n^p - p$ не делится на q.

Задача 3. Решить уравнение $\frac{x^7-1}{x-1} = y^5 - 1$ в целых числах.

Задача 4. Пусть p_1, ..., p_k — различные простые числа, большие 3, и $N = 2^{p_1 \cdots p_k} + 1$. Докажите, что у числа N есть хотя бы $2^{2^{k-1}}$ делителей.

Прыжок по Виету

А. О. Герасименко

Задача 1. Докажите, что существуют натуральные a, b, c, d большие 10^{2019} такие, что

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = abc + bcd + cda + dab.$$

Задача 2. Натуральные числа a и b таковы, что число a^2+b^2+1 делится на ab.

a) Чему может равняться частное?
b) Докажите, что a и b — числа Фибоначчи.

Задача 3. Докажите, что если для некоторых натуральных a, b, k выполнено равенство$\frac{a^2+b^2}{ab+1} = k$, то k — точный квадрат.

Задача 4. Натуральные числа a, b, c таковы, что $0 < a^2 + b^2 - abc \leqslant c$. Докажите, что $a^2 + b^2 - abc$ — точный квадрат.

Задача 5. Докажите, что уравнение $a^2 + b^2 + c^2 = kabc$ в натуральных числах

a) не имеет решений при $k = 2$;
b) не имеет решений при $k > 3$;
c) имеет бесконечное множество решений при $k = 1$ и $k = 3$.

Задача 6. Дано натуральное число k. Докажите, что существует возрастающая последовательность натуральных чисел a_i такая, что для любого n выполнено $a_n^2 + k \vdots a_{n+1}$ и $a_{n+1}^2 + k \vdots a_n$.

Задача 7. Пусть натуральные a, b, c, m таковы, что выполнено равенство

$$a^2 + b^2 + c^2 + 1 = abcm.$$

Докажите, что $m = 4$.

Задача 8. Какие натуральные значения может принимать выражение $\frac{(a+b+c)^2}{abc}$ при натуральных a, b, c?

Задача 9. Найдите максимальное значение n, при котором существует последовательность натуральных чисел a_1, a_2, ..., a_n,

такая, что для любого $2 \leqslant k \leqslant n-1$ выполнено следующее:

$$a_{k+1} = \frac{a_k^2 + 1}{a_{k-1} + 1} - 1.$$

Прыжок по Виету. Добавка

А. О. Герасименко

Задача 1. Найдите количество пар натуральных различных m и n, меньших 100, для которых $m^2 - 1 \vdots n$ и $n^2 - 1 \vdots m$.

Задача 2. Пусть натуральные a, b, c, m такие, что выполнено равенство

$$a^2 + b^2 + c^2 + 1 = abcm.$$

Докажите, что $m = 4$.

Задача 3. Пусть a, b, c — натуральные числа, такие , что $abc + 1 | a^2 + b^2 + c^2$. Докажите, что $\frac{a^2+b^2+c^2}{abc+1}$ представляется в виде суммы двух квадратов натуральных чисел.

Классические теоремы аддитивной комбинаторики

А. Кушнир

Задача 1. Даны два конечных непустых множества A и B целых чисел. Известно, что $|A| = n$, $|B| = m$. Определите, в зависимости от m и n, минимальный возможный размер множества $A + B$ всевозможных сумм вида $a + b$ (где $a \in A$, $b \in B$).

Задача 2. (*Теорема Коши-Дэвенпорта*). Даны два конечных непустых множества A и B остатков по простому модулю p. Тогда множество $A+B$ всевозможных сумм вида $a+b$ (где $a \in A$, $b \in B$) содержит хотя бы $\min(p, |A| + |B| - 1)$ элементов.

a) Докажите теорему в случае, когда $|A| = 1$.

b) Пусть x — остаток по модулю p. Обозначим через A' множество $A + \{x\}$ (т. е. все элементы множества A «сдвинулись» на x). Докажите, что $|A' + B| = |A + B|$.

c) Докажите, что если $A \cap B \neq \emptyset$, то множество $(A \cap B) + (A \cup B)$ является подмножеством множества $A + B$.

d) Докажите теорему Коши-Девенпорта.

Задача 3. Дано множество A, состоящее из 100 различных натуральных чисел из отрезка $[1, 10^6]$. Докажите, что существует такое множество B, состоящее из 200 различных натуральных чисел из того же отрезка, что всевозможные суммы вида $a + b$, где $a \in A$, $b \in B$, различны (всего $200 \cdot 100$ сумм).

Задача 4. (*Теорема Эрдеша-Гинзбурга-Зива*) Для любого натурального n из любых $2n - 1$ целых чисел всегда можно выбрать n чисел с кратной n суммой.

a) Пусть A — непустое множество остатков по простому модулю p, причем $|A| \leqslant p-1$, а x — ненулевой остаток. Докажите, что множество $A + \{x\}$ содержит хотя бы один элемент, которого нет в множестве A.

b) Дан набор из $p-1$ ненулевых не обязательно различных остатков по простому модулю p. Рассматриваются всевозможные 2^{p-1} сумм по всем подмножествам этого набора (сумма элементов пустого множества равна 0). Докажите, что среди значений рассматриваемых сумм встретятся всевозможные остатки по модулю p.

c) Докажите теорему Эрдеша-Гинзбурга-Зива для простых n.

d) Докажите теорему Эрдеша-Гинзбурга-Зива в общем случае.

Задача 5. Дано множество S, состоящее из n натуральных чисел. Для $k \leqslant n$ рассмотрим всевозможные суммы вида $x_1 + \ldots + x_k$, где x_i — различные элементы из S. Докажите, что количество

различных значений сумм, состоящих из k слагаемых, не может быть меньше, чем $k(n-k)+1$.

Игры

Д. А. Байгушев

Задача 1. На столе лежит 300 монет. Два игрока ходят по очереди. За ход разрешается забрать не более половины имеющихся на столе монет. Проигрывает тот, кто не может забрать хотя бы одну монету. Кто выиграет при правильной игре?

Задача 2. Двое ребят играют в такую игру. Первый называет число от 2 до 9, второй умножает его на любое число от 2 до 9, первый умножает результат на любое число от 2 до 9 и т.д. Выигрывает тот, у кого впервые получилось число, большее 1000. Кто выиграет при правильной игре?

Задача 3. Уголком размера $n \times m$, где $n, m > 2$, называется фигура, получаемая из прямоугольника размера $n \times m$ клеток удалением прямоугольника размера $(n-1) \times (m-1)$ клеток. Два игрока по очереди делают ходы, заключающиеся в закрашивании в уголке произвольного ненулевого количества клеток, образующих прямоугольник или квадрат. Пропускать ход или красить одну клетку дважды нельзя. Проигрывает тот, после чьего хода все клетки уголка окажутся окрашенными. Кто из игроков победит при правильной игре?

Задача 4. Есть шоколадка в форме равностороннего треугольника со стороной $n > 1$, разделенная бороздками на равносторонние треугольники со стороной 1. Играют двое. За ход можно отломать от шоколадки треугольный кусок вдоль бороздки, съесть его, а остаток передать противнику. Тот, кто получит от соперника последний кусок треугольник со стороной 1, победитель. Если кто-то из игроков не может сделать ход, то он

проиграл. Для каждого n выясните, кто из играющих может всегда выигрывать.

Задача 5. На бесконечной плоскости расположены фишка-волк и 50 фишек-овец. Двое ходят по очереди: один игрок передвигает волка, а другой одну из овец. И волк, и овцы передвигаются за один ход в любую сторону не более чем на один метр. Верно ли, что при любой первоначальной позиции волк поймает хотя бы одну овцу?

Задача 6. Игра начинается с числа 1000. За ход разрешается вычесть из имеющегося числа любое, не превосходящее его, натуральное число, являющееся степенью двойки (включая $1 = 2^0$). Выигрывает тот, кто получит ноль.

Точки Брокара

А. Кушнир

Точкой Брокара треугольника ABC называется такая точка P, что $\angle ABP = \angle CAP = \angle BCP = \varphi$. Угол φ называется *углом Брокара* треугольника.

Задача 1. Докажите, что точка Брокара существует и единственна.

Задача 2. В треугольник ABC. На его сторонах вне треугольника построим соответственно подобные ему треугольники $CA'B$, CAB', $C'AB$ той же ориентации.

a) Докажите, что окружности, описанные около трех построенных треугольников, пересекаются в точке P.

b) Докажите, что прямые AA', BB', CC' пересекаются в точке P.

Аналогично в треугольнике можно ввести вторую точку Брокара Q такую, что $\angle CBQ = \angle BAQ = \angle ACQ$. Точки P и Q, очевидно, изогонально сопряжены.

Задача 3. Докажите, что педальный треугольник точки P подобен треугольнику ABC. (Вершинами педального треугольника по определению являются проекции точки P на прямые BC, CA, AB).

Задача 4. Обозначим через A_1, B_1, C_1 соответственно вторые точки пересечения прямых AP, BP, CP с описанной окружностью треугольника ABC.

a) Докажите, что треугольники ABC и $B_1C_1A_1$ равны.
b) Докажите, что $OP = OQ$ и $\angle POQ = 2\varphi$, где O — центр окружности (ABC).

Задача 5. Углы треугольника ABC обозначены через α, β, γ. Докажите, что

a) $\sin^3\varphi = \sin(\alpha-\varphi)\sin(\beta-\varphi)\sin(\gamma-\varphi)$;
b) $\operatorname{ctg}\varphi = \operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta + \operatorname{ctg}\gamma$.

Задача 6. Отрезок AS — симедиана треугольника ABC. Докажите, что прямые SP и SQ симметричны относительно прямой BC. *Таким образом, эллипс с фокусами в точках P и Q, вписанный в треугольник ABC, касается его сторон в основаниях симедиан.*

Задача 7. Обозначим через L точку Лемуана треугольника ABC (то есть точку пересечения симедиан). Точка O — центр окружности (ABC). Докажите, что точки P и Q лежат на окружности, построенной на отрезке OL как на диаметре.

3. Третья неделя

Неравенство Мюрхева

А. О. Герасименко

Задача 1. Для положительных a, b, c докажите неравенство

$$(a+b+c)^2 \geqslant 3(ab+ac+bc).$$

Задача 2. Для положительных a, b, c докажите неравенство

$$a^5+b^5+c^5 \geqslant \frac{1}{2}\cdot(a^3b^2+b^3c^2+c^3a^2+a^2b^3+b^2c^3+c^2a^3).$$

Задача 3. Докажите, что для любых положительных чисел a, b, c выполнено

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b} \geqslant \frac{3}{2}.$$

Задача 4. Положительные числа a, b, c таковы, что $a^2+b^2+c^2=3$. Докажите, что

$$a+b+c \geqslant ab+bc+ca.$$

Задача 5. Для положительных a, b, c, d докажите неравенство

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2+d^2}{4}} \geqslant \sqrt[3]{\frac{abc+bcd+cda+dab}{4}}.$$

Задача 6. Числа a, b, c положительны. Докажите, что

$$\frac{a}{2a+b+c}+\frac{b}{2b+c+a}+\frac{c}{2c+a+b} \leq \frac{3}{4}.$$

Задача 7. Докажите, что для положительных a, b, c выполнено неравенство

$$\frac{a^b+b^2}{c^2+ab}+\frac{b^2+c^2}{a^2+bc}+\frac{c^2+a^2}{b^2+ac} \geqslant 3.$$

Задача 8. Для положительных a, b, c верно, что $a+b+c = ab+bc+ca$. Докажите, что

$$a+b+c+1 \geqslant 4abc.$$

Усреднение и интегралы – 1

П. В. Бибиков[(1)]

Задача 1. Докажите неравенство $C_{2n}^{n} > \frac{2^{2n-1}}{n}$.

Задача 2. На круглом столе лежат 2019 правильно идущих круглых часов. Докажите, что в некоторый момент времени сумма расстояний от центра стола до концов минутных стрелок больше суммы расстояний от центра стола до центров часов.

Сначала нужно обсудить понятие среднего значения функции, которое служит далеко идущим обобщением понятия среднего арифметического нескольких чисел. Пусть функция $f(x)$ задана на отрезке $I = [a; b]$. Что такое среднее значение функции на отрезке? Давайте разобьем наш отрезок I на n маленьких отрезков I_k ($k = 1, 2, \ldots, n$) одинаковой длины $\Delta x_k = (b-a)/n$; на каждом из маленьких отрезков выберем соответственно точку x_k и найдем среднее арифметическое

$$\frac{f(x_1)+f(x_2)+\ldots+f(x_n)}{n} = \frac{1}{b-a}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x_k.$$

Что будет, если устремить число n отрезков разбиения к бесконечности (или, что то же самое, Δx_k к нулю)? Оказывается, если функция f непрерывна на отрезке I, то записанная в правой части интегральная сумма стремится к некоторому предельному значению, которое не зависит от конкретного выбора точек x_1,

[(1)] Данный листок составлен с использованием материалов И. В. Яковлева, см. http://mathus.ru/math/

x_2, ..., x_n и является *определенным интегралом*:

$$\text{если } n \to \infty, \text{ то } \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x_k \to \int_a^b f(x)\,dx.$$

Таким образом, мы приходим к определению среднего значения функции f на отрезке $[a; b]$:

$$\widehat{f} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx.$$

Пусть, в частности, $f(\varphi)$ есть периодическая функция угла φ с периодом 2π. Среднее значение функции f — это ее среднее значение на отрезке $[0; 2\pi]$. Имеем:

$$\widehat{f} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\varphi)\,d\varphi.$$

Задача 3.

a) Рассмотрим на координатной плоскости вектор $\overline{a}$ и семейство все возможных прямых, проходящих через начало координат. Докажите, что средняя длина проекции вектора $\overline{a}$ на эти прямые пропорциональна длине $|\overline{a}|$.

b) Вычислите коэффициент пропорциональности между средней длиной проекции вектора $\overline{a}$ и $|\overline{a}|$.

Совет: полезно пытаться представить длины отрезков как средние значения проекций каких-то векторов. Таким образом мы понижаем размерность задачи: вместо того, чтобы доказывать утверждение для набора отрезков на плоскости, мы можем доказать утверждение для проекций на всевозможные прямые. Тогда сами длины исходных отрезков — это просто средние для длин проекций, поэтому неравенство для проекций влечет неравенство для длин отрезков.

Задача 4. На плоскости даны две системы векторов: $\overline{a_1}$, ..., $\overline{a_m}$ и $\overline{b_1}$, ..., $\overline{b_n}$. Известно, что сумма длин проекций векторов первой системы на любую прямую не превосходит суммы длин проекций векторов второй системы на ту же прямую. Докажите, что сумма длин векторов первой системы не превосходит суммы длин векторов второй системы.

Задача 5. Один выпуклый многоугольник расположен внутри другого. Докажите, что периметр внутреннего многоугольника не превосходит периметра внешнего.

Задача 6. Докажите, что если длины всех сторон и диагоналей выпуклого многоугольника меньше d, то его периметр меньше πd.

Задача 7. Докажите, что если $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$, $\overline{d}$ — векторы на плоскости, сумма которых равна $\overline{0}$, то $|\overline{a}|+|\overline{b}|+|\overline{c}|+|\overline{d}| \geqslant |\overline{a}+\overline{d}|+|\overline{b}+\overline{d}|+|\overline{c}+\overline{d}|$.

Задача 8. Пусть $A = \{\overline{a_1}, \overline{a_2}, \ldots, \overline{a_n}\}$ — множество векторов на плоскости, сумма длин которых равна 1. Обозначим через $B \subset A$ подмножество этих векторов с наибольшей возможной длиной суммы.

a) Докажите, что все векторы из B образуют с некоторой осью острые углы (т.е. смотрят в одну полуплоскость).

b) Назовем *псевдопроекцией* вектора $\overline{p}$ на прямую ℓ обычную проекцию, если угол между $\overline{p}$ и ℓ острый, и $\overline{0}$ в противном случае. Вычислите среднее значение длины псевдопроекции вектора на всевозможные прямые, проходящие через его начало.

c) Докажите, что длина суммы векторов из подмножества B не меньше $\frac{1}{\pi}$.

Привет из 8 класса

А. Кушнир

Задача 1. Вписанная в неравнобедренный треугольник ABC окружность имеет центр I и касается его сторон BC, CA, AB в точках A_1, B_1, C_1 соответственно. Докажите, что отличная от A_1I общая внутренняя касательная окружностей, вписанных в четырёхугольники BA_1IC_1 и CA_1IB_1, проходит через вершину A.

Задача 2. Пусть A_1, B_1, C_1 — середины сторон остроугольного треугольника ABC ($AB > AC$). Прямая AA_1 пересекает описанную окружность треугольника $A_1B_1C_1$ с точке S; точка T — проекция A на A_1B_1. Отрезки C_1T и BS пересекаются в точке X. Докажите, что вторая точка пересечения описанных окружностей треугольников BC_1X и STX лежит на прямой BC.

Задача 3. Точки A_1, B_1, C_1 — середины сторон треугольника ABC. На отрезках BA_1, CA_1 отмечены точки X и Y соответственно так, что $BX = CY$. Описанная окружность ω треугольника AXY вторично пересекает стороны AB и AC в точках P и Q соответственно. Обозначим через K, M, N точки пересечения пар лучей PX и QY, PX и B_1A_1, QY и C_1A_1 соответственно. Докажите, что описанная окружность треугольника KMN касается окружности ω.

Задача 4. На описанной окружности треугольника ABC отмечены точки P и Q. Точка A' на стороне BC такова, что прямые PA' и QA' симметричны относительно прямой BC. Аналогично определяются точки B', C'. Докажите, что A', B', C' лежат на одной прямой.

Усреднение и интегралы – 2

П. В. Бибиков[(2)]

Задача 1.

[(2)] Данный листок составлен с использованием материалов И. В. Яковлева, см. `http://mathus.ru/math/`

a) Рассмотрим в пространстве вектор $\overline{a}$ и семейство все возможных прямых, проходящих через начало координат. Докажите, что средняя длина проекции вектора $\overline{a}$ на эти прямые пропорциональна длине $|\overline{a}|$.

b) Вычислите коэффициент пропорциональности между средней длиной проекции вектора $\overline{a}$ и $|\overline{a}|$.

Задача 2. В пространстве даны две системы векторов: $\overline{a_1}$, ..., $\overline{a_m}$ и $\overline{b_1}$, ..., $\overline{b_n}$. Известно, что сумма длин проекций векторов первой системы на любую прямую не превосходит суммы длин проекций векторов второй системы на ту же прямую. Докажите, что сумма длин векторов первой системы не превосходит суммы длин векторов второй системы.

Задача 3. Один выпуклый многогранник расположен внутри другого. Докажите, что площадь поверхности внутреннего многогранника не превосходит площади поверхности внешнего.

Задача 4. Вершины тетраэдра $KLMN$ лежат внутри, на гранях или на ребрах другого тетраэдра $ABCD$. Докажите, что сумма длин всех ребер тетраэдра $KLMN$ меньше, чем $4/3$ суммы длин всех ребер тетраэдра $ABCD$.

Задача 5. Пусть $A = \{\overline{a_1}, \overline{a_2}, \ldots, \overline{a_n}\}$ — множество векторов в пространстве, сумма длин которых равна 1. Докажите, что среди векторов множества A можно выбрать такое подмножество $B \subset A$, длина суммы которых не меньше $\frac{1}{4}$.

Лемма Саваямы и теорема Тебо

А. О. Герасименко

Задача 1. К окружностям с центрами в точках O_1 и O_2 провели общую внутреннюю касательную A_1A_2 и общую внешнюю касательную B_1B_2 (точки A_1 и B_1 принадлежат окружности

с центром O_1). На отрезках A_1A_2 и B_1B_2 как на диаметрах построили окружности ω_1 и ω_2.

a) Докажите, что прямая O_1O_2 — радикальная ось этих окружностей.
b) Докажите, что точка пересечения A_1B_1 и A_2B_2 лежит на прямой O_1O_2.

Задача 2. (**Лемма Саваямы**) На стороне BC треугольника ABC выбрали произвольную точку X. Окружность ω касается описанной окружности Ω треугольника ABC в точке T, отрезка XB в точке Q, P — точка касания окружности ω и прямой AX. Докажите, что I (центр вписанной окружности треугольника ABC) лежит на прямой QP.

a) Пусть L — середина дуги BC окружности Ω, не содержащей точку A. Прямая AL пересекает прямую PQ в точке J. Докажите, что точки J, P, A и T лежат на одной окружности.
b) Докажите, что $LJ^2 = LB^2 = LC^2 = LT \cdot LQ$.
c) Докажите лемму Саваямы.

Задача 3. (**Теорема Тебо**) На стороне BC треугольника ABC выбрана произвольная точка X. В криволинейные треугольники AXB и AXC вписано по окружности. Докажите, что линия центров этих окружностей содержит центр вписанной окружности треугольника ABC. Такие окружности называются *окружностями Тебо* для точки X.

Задача 4.

a) Докажите, что окружности Тебо касаются тогда и только тогда, когда X — основание биссектрисы треугольника ABC.
b) Докажите, что окружности Тебо равны тогда и только тогда, когда X — точка касания вневписанной окружности треугольника ABC со стороной BC.

Задача 5. Вневписанная окружность треугольника ABC, соответствующая вершине C, касается продолжения стороны AC в

точке P. Рассмотрим окружность ω, касающуюся AC в точке P и прямой, проходящей через B параллельно AC. Докажите, что ω касается описанной окружности треугольника ABC.

Задача 6. Окружность касается оснований AB и CD трапеции $ABCD$ и меньшей дуги BC окружности, описанной около треугольника ABC. Докажите, что она касается и вписанной окружности этого треугольника.

Лемма Саваямы и теорема Тебо. Добавка

А. О. Герасименко

Задача 1. В окружность вписан четырехугольник $ABCD$. Докажите, что четыре точки: центры вписанных окружностей I_1, I_2 треугольников ABD и ACD, центры вневписанных окружностей I_3, I_4 треугольников ABC и BCD, соответствующие вершине C и B соответственно, лежат на одной прямой.

Задача 2. Обозначим B_0 и C_0 середины «меньших» дуг AC и AB описанной окружности Ω остроугольного треугольника ABC; точка O — центр Ω. Рассмотрим окружность ξ, касающуюся отрезков AB, AC и описанной окружности треугольника BOC внешним образом. Докажите, что точки касания ξ с отрезками AB, AC лежат на прямой B_0C_0.

Задача 3. Окружности Ω_1 и Ω_2 касаются друг друга внешним образом в точке T, четырехугольник $ABCD$ вписан в Ω_1 так что T лежит на дуге AB, не содержащей C. Лучи DA, CB касаются Ω_2 в точках E и F соответственно. Биссектриса угла ABF пересекает отрезок EF в точке N. Прямая FT пересекает дугу AT, не содержащую B, в точке M. Докажите, что M — центр описанной окружности треугольника BCN.

Комбинаторные раскраски

П. В. Бибиков

Задача 1. Пусть p — простое число, a_1, ..., a_p — произвольные целые числа. Докажите, что существует такое целое k, что числа $a_i + ki$, где $i = 1$, ..., p, дают не менее $p/2$ различных остатков по модулю p.

Указание: попробуйте построить граф на вершинах a_1, a_2, ..., a_p и покрасить его.

Задача 2. (теорема Шура) Докажите, что для каждого натурального $k \geqslant 2$ найдется натуральное $n > 3$, такое, что для любой раскраски множества $\{1, 2, \ldots, n\}$ в k цветов найдутся три одноцветных числа x, y, z, таких, что $x + y = z$.

Задача 3. Докажите, что любая раскраска множества $\{1, 2, \ldots, 2019\}$ в 6 цветов содержит три одноцветных числа x, y, z, таких, что $x + y = z$.

Задача 4. (Большая теорема Ферма для остатков) Докажите, что для любого натурального m найдется такое p_0, что для всех простых чисел $p > p_0$ существуют ненулевые решения сравнения $x^m + y^m \equiv z^m \pmod{p}$.

Инверсия + симметрия

А. Кушнир

Дан треугольник ABC. Преобразованием *инверсия + симметрия* относительно вершины A треугольника будем называть композицию инверсии с центром в точке A и радиусом $\sqrt{AB \cdot AC}$ и симметрии относительно биссектрисы угла BAC.

Задача 1. Докажите, что при инверсии + симметрии относительно вершины A треугольника ABC

а) вершины B и C меняются местами;

b) окружность (ABC) переходит в прямую BC;
c) произвольная точка X переходит в такую точку Y, что $\triangle BAX \sim \triangle YAC$;
d) основание высоты из вершины A переходит в точку, диаметрально противоположную точке A на окружности (ABC);
e) центр окружности (ABC) переходит в отражение вершины A относительно прямой BC;
f) центр I вписанной окружности переходит в центр I_A вневписанной окружности. *В этом пункте вредно рисовать сами окружности. Поищите лучше подобные треугольники.*

Задача 2. Дан треугольник ABC. Одна окружность проходит через точку B и касается прямой AC в точке A, а вторая проходит через точку C и касается прямой AB в точке A. Указанные окружности пересекаются в точках A и X. Точка M — середина стороны BC. Докажите, что $\angle BAM = \angle XAC$.

Задача 3. Окружность γ_A касается отрезков AB, AC в точках P и Q и касается описанной окружности треугольника ABC внутренним образом в точке T. a) Точка K — точка касания вневписанной окружности с отрезком BC. Докажите, что $\angle BAT = \angle KAC$. b) Докажите, что центр I вписанной окружности треугольника ABC лежит на отрезке PQ.

Задача 4. В треугольнике ABC проведена биссектриса AD (точка D лежит на отрезке BC), пересекающая описанную окружность Ω треугольника ABC в точках A и E. Окружность, построенная на отрезке DE как на диаметре, пересекает Ω в точках E и F. Докажите, что прямая, симметричная прямой AF относительно прямой AD, содержит медиану треугольника ABC.

Задача 5. Обозначим середины сторон AB, AC, BC треугольника ABC через C_0, B_0, A_0, а центр описанной окружности — через O. Окружности $(A_0B_0C_0)$ и (BOC) пересекаются в точках P и Q. Докажите, что $\angle BAP = \angle CAQ$.

Инверсия + симметрия, продолжение

А. Кушнир

Задача 1. Продолжения боковых сторон AB и CD трапеции $ABCD$ пересекаются в точке P. Обозначим через U и V центры окружностей (ABC) и (ADC). Докажите, что $\angle APU = \angle VPD$.

Задача 2. Углы AOB и COD совмещаются поворотом так, что луч OA совпадает с лучом OC, а луч OB — с OD. В них вписаны окружности, пересекающиеся в точках E и F. Докажите, что $\angle BOE = \angle COF$.

Задача 3. Боковые стороны AB и CD трапеции $ABCD$ являются хордами касающихся окружностей ω_1 и ω_2 соответственно. Градусные меры касающихся дуг AB и CD равны соответственно α и β . Пусть ω_3 и ω_4 —также окружности с хордами AB и CD соответственно, но градусные меры аналогичных дуг AB и CD равны соответственно β и α. Докажите, что ω_3 и ω_4 тоже касаются.

Задача 4. В углы B и C треугольника ABC вписаны непересекающиеся окружности ω и γ с центрами P и Q. Оказалось, что $\angle BAQ = \angle CAP$. Докажите, что окружность, касающаяся γ и ω внешним образом и проходящая через A, касается и описанной окружности треугольника ABC.

IMO – 2019

П. В. Бибиков, А. О. Герасименко

Задача 1. Найти все функции $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, такие, что для любых целых чисел a и b выполнено равенство

$$f(2a) + f(b) = f(f(a+b)).$$

Задача 2. В треугольнике ABC точка A_1 лежит на отрезке BC, а точка B_1 лежит на отрезке AC. Пусть точки P и Q лежат на отрезках AA_1 и BB_1, причем так, что PQ параллельно AB. Точка P_1, лежащая на прямой PB_1, такова, что B_1 находится строго между P и P_1, причем $\angle PP_1C = \angle BAC$. Аналогично, точка Q_1, лежащая на прямой QA_1, такова, что A_1 находится строго между Q и Q_1, причем $\angle CQ_1Q = \angle CBA$. Докажите, что точки P, Q, P_1 и Q_1 лежат на одной окружности.

Задача 3. В социальной сети 2019 пользователей. Некоторые пользователи дружат с некоторыми другими, причем дружба взаимна. Перестройки следующего типа происходят последовательно, по одной перестройке за раз:

> выбираются три пользователя A, B и C, таких, что A дружит с B и с C, а B и C друг с другом не дружат; после чего B и C становятся друзьями, но A теперь не дружит ни с B, ни с C.

Изначально 1010 пользователей имеют по 1009 друзей, а 1009 пользователей имеют по 1010 друзей. Докажите, что существует последовательность перестроек, после которой каждый пользователь будет иметь не более одного друга.

Задача 4. Найти все пары (k, n) натуральных чисел, таких, что

$$k! = (2^n - 1)(2^n - 2)(2^n - 4)\dots(2^n - 2^{n-1}).$$

Задача 5. Банк города Бат выпускает монеты с буквой H на одной стороне и букой T на другой стороне. Гарри разложил n таких монет в ряд слева направо. Он последовательно производит следующую операцию: если в ряду ровно $k > 0$ монет лежат буквой H кверху, то он переворачивает k-ю слева монету; иначе все монеты лежат буквой T кверху, и он останавливается.

а) Докажите, что при любой начальной конфигурации процесс остановится после конечного числа операций.

b) Для каждой начальной конфигурации C через $L(C)$ обозначим количество операций, после которых процесс остановится. Найдите среднее арифметическое значений $L(C)$, когда C пробегает всевозможные начальные конфигурации.

Задача 6. Пусть I — центр вписанной окружности остроугольного треугольника ABC, в котором $AB \neq AC$. Вписанная окружность ω треугольника ABC касается сторон BC, CA и AB в точках D, E и F соответственно. Прямая, проходящая через D перпендикулярно EF, вторично пересекает ω в точке R. Прямая AR вторично пересекает ω в точке P. Описанные окружности треугольников PCE и PBF вторично пересекаются в точке Q. Докажите, что прямые DI и PQ пересекаются на внешней биссектрисе угла $\angle BAC$ треугольника ABC.

Тебо + Львов

П. В. Бибиков

Наша цель — доказать следующую теорему.

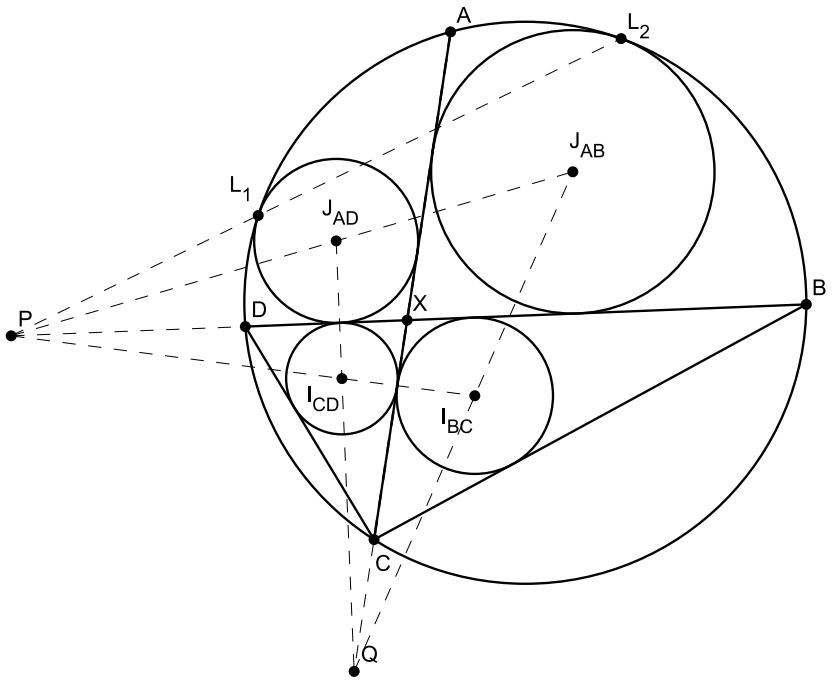
Основная теорема (А. Львов)**.** *Пусть $ABCD$ — вписанный в окружность Ω четырехугольник, X — точка пересечения его диагоналей. Обозначим через ω_{CD} и ω_{BC} вписанные в треугольники XCD и XBC окружности, в через α_{AD} и α_{AB} — окружности, вписанные в криволинейные треугольники DXA и AXB и касающиеся окружности Ω в точках L_1 и L_2 соответственно (т.н. окружности Тебо). Пусть также T_A — точка касания окружности Ω и полувписанной окружности треугольника ABD, соответствующей вершине A, и P — точка пересечения прямых BD и T_AC. Тогда*

(1) точка P является центром гомотетии окружностей ω_{CD} и ω_{BC};

(2) точка P является центром гомотетии окружностей α_{AB} и α_{AD};

(3) точка P лежит на прямой L_1L_2;

(4) внешние центры гомотетии пар окружностей $(\omega_{CD}, \alpha_{AD})$ и $(\omega_{BC}, \alpha_{AB})$ совпадают.



Задача 1. Обозначим через B' и D' середины дуг $\overset{\frown}{AD}$ и $\overset{\frown}{BA}$ окружности Ω. Докажите, что четырехугольник $T_AB'AD'$ является гармоническим.

Задача 2. Докажите п. (1) основной теоремы.

Задача 3. Пусть прямая, проходящая через вершину A, пересекает прямую BD и окружность Ω в точках E и F соответственно. Пусть также K_A — точка касания вписанной в треугольник ABD окружности со стороной BD.

a) Докажите, что $\angle BT_AK_A = \angle ABD$ и $\angle DT_AK_A = \angle ADB$.

b) Докажите, что точки T_A, K_A, E и F лежат на одной окружности.

При решении следующих задач стоит помнить про следующие теоремы.

Теорема (Лемма Саваямы)**.** *I лежит на прямой, проходящей через точки касания окружности α_{AD} с прямыми XA и XD.*

Теорема (Теорема Тебо)**.** *I, J, J_{AD} и J_{AB} лежат на одной прямой.*

Задача 4. Обозначим центры этих окружностей через J_{AD}, J_{AB}, а также проведем к ним вторую общую внешнюю касательную ℓ, отличную от BD. Прямая ℓ пересекает окружность Ω в точках M и N. Пусть J — центр вписанной окружности треугольника NMC. Обозначим точки касания окружностей α_{AD} и α_{AB} с прямой BD через X_1 и X_2. Докажите, что

1) точки I, J, X_1 и X_2 лежат на одной окружности;
2) точки I, J, X и K_A лежат на одной окружности.
3) точки I, J, B и D лежат на одной окружности;

Задача 5.

a) Докажите п. 2) Основной теоремы.
b) Докажите п. 3) Основной теоремы.
c) Докажите п. 4) Основной теоремы.

Задача 6. Докажите, что точка пересечения отрезков BJ_{AD} и DJ_{AB}, точка X и центр вписанной окружности треугольника BCD лежат на одной прямой.

Паросочетания

М. Ю. Дмитриева

Задача 1. (T. Gallai, 1959) Пусть G — двудольный граф на n вершинах, в котором нет вершин нулевой степени. Пусть A — максимальное паросочетание, а B — такое минимальное подмножество рёбер, что любая вершина является концом одного из них. Докажите, что $|A| + |B| = n$.

a) Докажите, что $|B| \leq n - |A|$.

b) В графе G удалили все ребра кроме рёбер из множества B. Опишите компоненты связности получившегося графа (как-нибудь) и посчитайте их количество.

c) Докажите, что $|A| \geq n - |B|$.

d) Докажите теорему Галлаи.

Задача 2. (D. Konig, 1931.) Пусть G — двудольный граф, в котором нет вершин нулевой степени. Пусть A — максимальное паросочетание, а C — такое минимальное подмножество вершин, что любое ребро имеет конец в одной из них. Докажите, что $|A| = |C|$.

a) Докажите, что $|C| \geq |A|$.

b) Воспользуйтесь леммой Холла и докажите, что $|A| \geq |C|$.

c) Докажите теорему Кенига.

Задача 3.

a) Петя и Вася играют в игру. Петя начинает и может поставить фишку на произвольную клетку шахматной доски. Каждым следующим ходом можно передвинуть фишку на соседнюю по стороне или углу клетку, если до этого фишка в ней ни разу не побывала. Кто выигрывает при правильной игре?

b) Дан граф G. Петя и Вася играют в игру. Петя начинает и может поставить фишку в произвольную вершину G. Каждым следующим ходом можно передвинуть фишку в вершину, соединенную с предыдущей ребром, если до этого фишка в ней ни разу не побывала. Докажите, что если в графе все вершины можно разбить на пары, соединенные ребром, то выигрывает Вася.

c) Докажите, что если в графе из предыдущего пункта все вершины нельзя разбить на пары, соединённые ребром, то выигрывает Петя.

Указание: рассмотрите максимальное паросочетание.

Задача 4.

a) Назовём паросочетание совершенным, если оно разбивает на пары все вершины. В графе G есть совершенное паросочетание, содержащее ребро ab, но не содержащее ребро cd, и совершенное паросочетание, содержащее ребро cd, но не содержащее ребро ab. Известно, что a соединена с вершинами c и d. Докажите, что в графе существует совершенное паросочетание, не содержащее рёбер ab и cd.

b) В графе G нельзя выделить совершенное паросочетание, но это свойство нарушается при добавлении любого ребра. Докажите, что если удалить из него все вершины степени $|G|-1$, то граф распадётся на компоненты связности, каждая из которых является полным графом.

c) **(W. T. Tutte, 1947.)** Обозначим через $o(G)$ количество компонент связности в графе G с нечетным количеством вершин, а через $V(G)$ — множество вершин. Докажите, что в графе G можно выделить совершенное паросочетание тогда и только тогда, когда для любого $S \subset V(G)$ выполняется условие $o(G-S) \leq |S|$.

d) **(C. Berge, 1958.)** Пусть $\alpha(G)$ — размер максимального паросочетания. Назовем дефицитом графа G величину $\mathrm{def}(G) = |G| - 2\alpha(G)$. Докажите, что $\mathrm{def}(G) = \max\limits_{S \subset V(G)} o(G-S) - |S|$.

Задача 5. Королевский парк представляет собой граф G. В его вершинах король расставил мудрецов и каждому из них надел на голову чёрный или белый колпак. Мудрецы видят только цвета колпаков на мудрецах из соседних вершин. После этого все мудрецы одновременно пытаются угадать цвет своего колпака.

a) Докажите, что в случае произвольного двудольного графа максимальное гарантированное число угадавших мудрецов равно размеру максимального паросочетания в графе.

Указание: вам поможет теорема Кенига.

b) Докажите это для произвольного графа.

Указание: вам поможет теорема Берже.

Глава V

10 класс

1. Первая неделя

Ацтекский бриллиант и функции высоты

П. В. Бибиков

Пусть G — граф, вершинами которого являются узлы квадратной решетки на плоскости, а ребрами — отрезки, соединяющие соседние узлы. Рассмотрим раскраску вершин графа G в шахматном порядке в черный и белый цвета. Расставим на единичных отрезках между соседними узлами стрелки следующим образом: если отрезок горизонтален, направим стрелку от черного узла к белому; если же он вертикален, то от белого к черному.

Пусть нам дано некоторое замощение плоскости доминошками, которое мы обозначим через T. Представим себе, что доминошки выложены поверх графа G. Тогда каждая из них закрывает одно ребро графа. Удалим из графа ребра, закрытые доминошками; тот граф, который останется, будем обозначать G_T. Сопоставим замощению его функцию высоты — это будет функция на вершинах графа G, которую мы будем обозначать $H_{T,v_0}(v)$. Определим ее следующим образом. Выберем произвольную вершину v_0 и положим ее высоту равной нулю; далее, каждую вершину v соединим с v_0 путем в графе G_T. Этот путь состоит из стрелок, каждая из которых проходится либо в попутном направлении (т. е. сонаправлена с путем), либо в противоположном. Положим вы-

соту $H_{T,v_0}(v)$ равной разности числа попутных и противоположно направленных стрелок.

Задача 1. Докажите, что так определенное значение функции высоты $H_{T,v_0}(v)$ не зависит от выбора пути, соединяющего v_0 с v.

Задача 2. Докажите, что в результате другого выбора начальной вершины функция высоты изменяется во всех точках на одну и ту же константу.

В дальнейшем при необходимости мы будем считать, что две функции высоты совпадают в некоторой точке, чтобы не думать об этой константе.

Задача 3. Докажите, что для любых двух замощений T и T' выполнено сравнение $H_{T,v_0}(v) \equiv H_{T',v_0}(v) \pmod 4$.

Задача 4. Пусть $H(v)$ — функция на вершинах графа G, удовлетворяющая следующему свойству: для любых соседних вершин u и v, ребро между которыми направлено от u к v, либо $H(v) = H(u) + 1$, либо $H(v) = H(u) - 3$. Докажите, что $H(v)$ является функцией высоты единственного замощения T.

Задача 5. Прямоугольник на клетчатой бумаге со стороной клетки 1 разбит на фигурки доминошки. Докажите, что все вершины клеток на границе и внутри прямоугольника можно раскрасить в три цвета так, чтобы для каждых двух вершин, находящихся на расстоянии 1, выполнялось следующее условие: эти вершины разного цвета, если соединяющий их отрезок лежит на границе одной из фигурок домино, и одинакового цвета в противном случае.

Задача 6. Назовем *минимальным разбиением* разбиение $T_{\min}$, в котором все доминошки горизонтальны. Докажите, что для любого разбиения T ацтекского бриллианта, вершины контура которого покрашены в черный цвет, выполнено неравенство $H_T(v) \geqslant H_{T_{\min}}(v)$.

Назовем *приведенной высотой разбиения* T величину

$$h_T(v) = \frac{H_T(v) - H_{T_{\min}}(v)}{4}.$$

Совет 1: попробуйте посчитать приведенную функцию высоты для минимального замощения и какого-то произвольного. Попробуйте понять, как они связаны.

Совет 2: у функций полезно исследовать точки максимума и минимума.

Задача 7. Операция флипа — это поворот двух доминошек с общей стороной длины 2.

a) Докажите, что любые два разрезания прямоугольной доски на доминошки флип-эквивалентны.

b) Докажите аналогичное утверждение для замощения ацтекского бриллианта.

c) Докажите это для любой фигуры, обладающей минимальным разбиением.

d) Назовем *рангом замощения* T число $r(T) = \sum_v h_T(v)$. Докажите, что любое замощение T ацтекского бриллианта, вершины контура которого покрашены в черный цвет, можно получить из минимального замощения за $r(T)$ флипов, причем за меньшее количество флипов это сделать невозможно.

e) Докажите, что максимальный ранг замощения ацтекского бриллианта порядка n равна $n(n+1)(2n+1)/6$.

Задача 8. Плоскость разбита на равные правильные треугольники. Рассмотрим ромбики, составленные из двух треугольников с общей стороной. Будем замащивать правильный шестиугольник со стороной n.

a) Докажите, что количества ромбов каждого из трех возможных направлений равны.

b) Докажите, что любое рассматриваемое разбиение можно перевести в любое другое с помощью нескольких операций флипа.

Формальные степенные ряды и производящие функции

Е. А. Морозов

Определение. *Формальным степенным рядом* называется бесконечная числовая последовательность $(a_0, a_1, \dots, a_n, \dots)$. Формальные степенные ряды можно складывать и умножать согласно следующим правилам:

$$(a_0, a_1, \dots, a_n, \dots) + (b_0, b_1, \dots, b_n, \dots) = (a_0 + b_0, a_1 + b_1, \dots, a_n + b_n, \dots)$$

$$(a_0, a_1, \dots, a_n, \dots) \cdot (b_0, b_1, \dots, b_n, \dots) = (a_0 b_0, a_0 b_1 + a_1 b_0, \dots, \sum\nolimits_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}, \dots$$

Формальный степенной ряд $(a_0, a_1, \dots, a_n, \dots)$ часто записывают как $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ или даже просто $f(x) = \sum a_n x^n$. Тогда сложение и умножение формальных степенных рядов можно воспринимать как действия с «бесконечными многочленами».

Замечание. В записи $f(x) = \sum a_n x^n$ переменную «x» следует воспринимать *формально*: не надо пытаться подставить вместо неё число (это может привести к бессмыслице). Единственное исключение: всегда можно подставить $x = 0$, по определению $f(0) := a_0$.

Задача 1. Проверьте, что умножение формальных степенных рядов *ассоциативно*, т. е. для любых формальных степенных рядов $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ верно $(f(x)g(x))h(x) = f(x)(g(x)h(x))$.

Формальные степенные ряды можно складывать и умножать. Разберемся, когда их можно делить.

Определение. *Обратным* рядом к $f(x) = \sum a_n x^n$ называется ряд $g(x) = f(x) = \sum b_n x^n$ такой, что $f(x)g(x) = 1$. Обозначение: $g(x) = 1/f(x)$.

Задача 2. Найдите обратные ряды к

a) $1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \ldots$;
b) $1 + 2x + 3x^2 + \cdots + (n+1)x^n + \ldots$;
c) * $1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \ldots$.

Задача 3. Докажите, что для любого ряда $f(x) = \sum a_n x^n$ такого, что $a_0 \neq 0$, существует обратный ряд (*указание:* покажите, что его коэффициенты можно вычислить один за другим).

Определение. *Производящей функцией* последовательности (a_n) называется соответствующий формальный степенной ряд $\sum a_n x^n$.

Задача 4. Вычислите производящую функцию a) геометрической; b) арифметической прогрессии общего вида.

Напомним, что последовательность *чисел Фибоначчи* определяется реккурентно: $f_0 = f_1 = 1$, $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$. Пусть $F(x) = f_0 + f_1 x + f_2 x^2 + \cdots + f_n x^n + \ldots$ — производящая функция чисел Фибоначчи.

Задача 5.

a) Докажите, что $F(x)$ удовлетворяет уравнению $1 + xF(x) + x^2F(x) = F(x)$, и найдите $F(x)$.
b) Найдите такие числа A, B, C, D, что $F(x) = \frac{A}{x-B} + \frac{C}{x-D}$.
c) Выпишите явную формулу для чисел Фибоначчи.

Итак, иногда формальные степенные ряды можно делить. А как насчет извлечения корня?

Задача 6. Дан формальный степенной ряд $f(x) = \sum a_n x^n$. Придумайте определение для ряда $\sqrt{f(x)}$. Найдите простое достаточное условие на существование $\sqrt{f(x)}$.

Теорема (бином Ньютона)**.** $\sqrt{1+x} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\ldots\left(\frac{1}{2}-k+1\right)}{k!} x^k$.

Теорему V.1 мы докажем чуть позже. А пока ей можно пользоваться без доказательства.

Последовательность *чисел Каталана* определяется реккурентно: $c_0 = c_1 = 1$, $c_{n+1} = c_0c_n + c_1c_{n-1} + \cdots + c_nc_0$. Пусть $C(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \cdots + c_nx^n + \ldots$ — производящая функция чисел Каталана.

Задача 7. *

a) Докажите, что $C(x)$ удовлетворяет уравнению $xC^2(x) - C(x) + 1 = 0$ и найдите $C(x)$.

b) Запишите коэффициенты ряда $\sqrt{1-4x}$ в замкнутом виде (т. е. без использования знаков Σ, Π и $\ldots$).

c) Найдите явную формулу для чисел Каталана.

Игры

Д. А. Байгушев

Задача 1. На столе лежит 300 монет. Два игрока ходят по очереди. За ход разрешается забрать не более половины имеющихся на столе монет. Проигрывает тот, кто не может забрать хотя бы одну монету. Кто выиграет при правильной игре?

Задача 2. Двое ребят играют в такую игру. Первый называет число от 2 до 9, второй умножает его на любое число от 2 до 9, первый умножает результат на любое число от 2 до 9 и т.д. Выигрывает тот, у кого впервые получилось число, большее 1000. Кто выиграет при правильной игре?

Задача 3. Уголком размера $n \times m$, где $n, m > 2$, называется фигура, получаемая из прямоугольника размера $n \times m$ клеток удалением прямоугольника размера $(n-1) \times (m-1)$ клеток. Два игрока по очереди делают ходы, заключающиеся в закрашивании в уголке произвольного ненулевого количества клеток, образующих прямоугольник или квадрат. Пропускать ход или красить одну клетку дважды нельзя. Проигрывает тот, после чьего хода все клетки уголка окажутся окрашенными. Кто из игроков победит при правильной игре?

Задача 4. Есть шоколадка в форме равностороннего треугольника со стороной $n > 1$, разделенная бороздками на равносторонние треугольники со стороной 1. Играют двое. За ход можно отломать от шоколадки треугольный кусок вдоль бороздки, съесть его, а остаток передать противнику. Тот, кто получит от соперника последний кусок треугольник со стороной 1, победитель. Если кто-то из игроков не может сделать ход, то он проиграл. Для каждого n выясните, кто из играющих может всегда выигрывать.

Задача 5. На бесконечной плоскости расположены фишка-волк и 50 фишек-овец. Двое ходят по очереди: один игрок передвигает волка, а другой одну из овец. И волк, и овцы передвигаются за один ход в любую сторону не более чем на один метр. Верно ли, что при любой первоначальной позиции волк поймает хотя бы одну овцу?

Задача 6. Игра начинается с числа 1000. За ход разрешается вычесть из имеющегося числа любое, не превосходящее его, натуральное число, являющееся степенью двойки (включая $1 = 2^0$). Выигрывает тот, кто получит ноль.

Точка со многими свойствами

П. В. Бибиков

Пусть ABC — неравнобедренный треугольник. Окружность ω с центром в P проходит через вершины B и C и пересекает стороны AB и AC в точках D и E соответственно. Прямые CD и BE пересекаются в точке S и пересекают описанную окружность Ω треугольника ABC в точках G и H соответственно. Пусть прямая DE пересекает прямую BC в точке K, а касательные к окружности Ω в вершинах B и C — в точках M и L соответственно.

Задача 1. Докажите, что

- окружность Ω
- описанная окружность γ треугольника ADE
- прямая AK
- перпендикуляр к AK, проходящий через P
- прямая PS
- прямая MG
- прямая LH

пересекаются в одной точке N.

Задача 2. Пусть D и E — произвольные точки на сторонах AB и AC соответственно. Пусть G и H — вторые точки пересечения прямых CD и BE с Ω. Прямая DE пересекает касательную в точке B к Ω в точке M, а касательную в точке C к Ω — в точке L.

a) Докажите, что прямые MG и LH пересекаются в точке N, лежащей на Ω.
b) Докажите, что точки A, N и точка пересечения BC и DE коллинеарны.

Задача 3. Точку S отразили относительно сторон AB и AC. Докажите, что получившиеся точки, точка A и точка N лежат на одной окружности.

Производящие функции-2

Е. А. Морозов

Что еще можно делать с формальными степенными рядами? Оказывается, иногда один ряд можно подставить в другой.

Задача 1.

a) Пусть $f(x) = \sum a_n x^n$ и $g(x) = \sum b_n x^n$ — формальные степенные ряды, причем $g(0) = b_0 = 0$. Определите подстановку $f(g(x))$. Зачем нужно условие $g(0) = 0$?

b) **(обратный ряд по подстановке).** Пусть $g(x) = \sum b_n x^n$ — формальный степенной ряд такой, что $b_0 = 0$, $b_1 \neq 0$. Докажите, что существуют и единственны такие формальные степенные ряды $f(x)$ и $h(x)$, что $f(g(x)) = g(h(x)) = x$.

Но это еще не все...

Определение. Пусть $f(x) = \sum a_n x^n$ — формальный степенной ряд. *Производной* ряда $f(x)$ называется ряд

$$f'(x) = \frac{d}{dx} f(x) = a_1 + 2a_2 x + \cdots + n a_n x_{n-1} + \ldots.$$

Интегралом ряда $f(x)$ называется ряд

$$\int f(x)dx = a_0 x + \frac{a_1}{2} x^2 + \cdots + \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} + \ldots.$$

Замечание. Последнее определение следует понимать *формально*: оно никак не опирается на соответствующие ε-δ определения из математического анализа (хотя вдохновлялось, несомненно, ими).

Задача 2.

a) Найдите такие ряды $f(x)$ и $g(x)$, что $f'(x) = f(x)$, $g'(x) = \frac{1}{1+x}$ (они называются *экспонентой* и *логарифмом* соответственно).
b) Докажите, что для ряда $f(x)$ из п. a) выполнено $f(x+y) = f(x)f(y)$.

Задача 3. Пусть $f(x)$, $g(x)$ — формальные степенные ряды, c — число. Докажите, что

a) $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$, $(cf)'(x) = cf'(x)$.
b) **(правило Лейбница)** $(fg)' = f'g + fg'$.
c) * **(«цепное правило»)** $\frac{d}{dx}(f(g(x))) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$.
d) **(интегрирование по частям)** $\int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - f(0)g(0) - \int f(x)g'(x)dx$.

Задача 4. Докажите **формулу Тейлора**: $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$.

Пришло время доказать теорему V.1 из прошлого листочка. Напомним:

Теорема (бином Ньютона)**.** $\sqrt{1+x} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\ldots\left(\frac{1}{2}-k+1\right)}{k!} x^k$.

Задача 5. Докажите теорему V.1 (*указание:* докажите равенство

$$(\sqrt{1+x})^{(n)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\ldots\left(\frac{1}{2}-n+1\right)\frac{\sqrt{1+x}}{(1+x)^n}$$

индукцией по n и воспользуйтесь формулой Тейлора).

Про лемму об уточнении показателя

М. Ю. Дмитриева

Обозначим через $\|a\|_p$ степень вхождения простого числа p в разложение a на простые множители. **Лемма об уточнении показателя** гласит, что для простого p и натуральных a и b, не кратных p, а также произвольного n верно следующее:

a) если $p > 2$ и $a - b$ делится на p, то $\|a^n - b^n\|_p = \|a - b\|_p + \|n\|_p$;
b) если $p = 2$ и $a - b$ делится на p^2, то $\|a^n - b^n\|_p = \|a - b\|_p + \|n\|_p$.

Задача 1. В этой задаче a и b не делятся на p.

a) Пусть $a - b$ делится на p. Докажите, что если n не делится на p, что $\|a^n - b^n\|_p = \|a - b\|_p$.
Указание: необходимо и достаточно доказать, что $a^{n-1} + a^{n-2}b + \ldots + b^{n-1}$ не делится на p. Для этого достаточно посчитать его остаток при делении на p.
b) Пусть $a - b$ делится на p. Докажите, что если $p > 2$, то $\|a^p - b^p\|_p = 1 + \|a - b\|_p$.
Указание: необходимо и достаточно доказать, что $a^{p-1} + a^{p-2}b + \ldots + b^{p-1}$ делится на p и не делится на p^2. Для этого достаточно посчитать его остаток при делении на p^2.

c) Докажите, что если $p = 2$ и $a - b$ делится на 4, то $\|a^p - b^p\|_p = 1 + \|a - b\|_p$.

d) Докажите лемму об уточнении показателя.

Задача 2. Дано простое число p и натуральные числа a и n. Докажите, что если $2^p + 3^p = a^n$, то $n = 1$.

Задача 3. Натуральные числа m и n взаимно просты и $m > 1$, $n > 1$. Докажите, что существуют натуральные числа a, b, c такие, что $m^a = 1 + n^b c$ и n и c взаимно просты.

Задача 4. Даны различные вещественные a и b такие, что все числа $a - b$, $a^2 - b^2$, $a^3 - b^3$, ...натуральные. Докажите, что a и b тоже натуральные.

Задача 5. Найдите все натуральные k такие, что произведение первых k простых чисел, уменьшенное на 1, является точной степенью натурального числа (большей, чем первая).

Задача 6. Дано натуральное $k > 1$. Докажите, что существует бесконечно много натуральных n таких, что $n \mid 1^n + 2^n + 3^n + \ldots + k^n$.

Задача 7. (IMO 2000, 5) Существует ли N делящееся ровно на 2000 различных простых чисел такое, что N делит $2^N + 1$? [N может делится на степени каких-нибудь простых.]

Задача 8. Найдите все тройки (p, x, y), где p простое, а x и y — натуральные, такие, что $x^{p-1} + y$ и $x + y^{p-1}$ — точные степени p.

Задача 9. Найдите все сюръективные $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ такие, что для любых m, $n \in \mathbb{N}$ и любого p число $f(m + n)$ делится на p тогда и только тогда, когда $f(m) + f(n)$ делится на p.

Симедиана. Гармонический четырехугольник.

Е. А. Морозов

Теория

Определение. *Симедианой* треугольника называется прямая, симметричная медиане относительно биссектрисы того же угла.

Казалось бы, зачем рассматривать такую странную прямую? Все дело в ее замечательных свойствах.

Задача 1. Выясните, в каких треугольниках симедиана совпадает с высотой.

Задача 2.

a) Точка K лежит на стороне AC треугольника ABC. Докажите, что
$$\frac{\sin\angle ABK}{\sin\angle CBK} = \frac{CB}{AB}\cdot\frac{AK}{CK}.$$
b) Докажите, что симедиана делит основание в отношении квадратов боковых сторон. В частности, все симедианы в треугольнике пересекаются в одной точке.

Задача 3.

a) **(основное свойство симедианы)** Пусть T — точка пересечения касательных к описанной окружности треугольника ABC в точках A и C. Докажите, что BT — симедиана.
b) Пусть в условиях предыдущего пункта прямая BT пересекается с описанной окружностью в точках B и D. Докажите, что $AB\cdot CD = BC\cdot AD$.

С симедианой тесно связан еще один важный объект.

Определение. Вписанный четырехугольник называется *гармоническим*, если произведения его противоположных сторон равны.

Задача 4. Докажите, что следующие свойства вписанного четырехугольника $ABCD$ равносильны.

i) Четырехугольник $ABCD$ — гармонический.

ii) Биссектрисы противоположных углов $ABCD$ четырехугольника пересекаются на его диагонали.

iii) Каждая диагональ четырехугольника $ABCD$ является симедианой в треугольниках, на которые делит четырехугольник другая диагональ.

iv) Касательные к описанной окружности четырехугольника $ABCD$, проведенные в его противоположных вершинах, пересекаются на диагонали четырехугольника.

v) Если M — середина диагонали AC, то $\angle AMB = \angle AMD$.

Задачи

Задача 5. (о том, как она обычно появляется) Дан треугольник ABC. Точки A' и C' на сторонах BC и AB соответственно таковы, что четырехугольник $AC'A'C$ — вписанный. Точки M и M' — середины отрезков AC и $A'C'$ соответственно. Докажите, что $\angle ABM = \angle CBM'$.

Задача 6. Точка S внутри треугольника ABC такова, что $\angle BAS = \angle CBS$ и $\angle BCS = \angle ABS$. Докажите, что BS — симедиана треугольника ABC.

Задача 7. Две окружности пересекаются в точках M и K. Из точки A одной окружности проводятся лучи AM и AK, пересекающие вторую окружность в точках B и C соответственно. Докажите, что все медианы треугольника ABC, проведенные из вершины A, пересекаются в одной точке.

Задача 8. В окружности Ω проведены две параллельные хорды AB и CD. Прямая, проведенная через C и середину AB вторично пересекает Ω в точке E. Точка K — середина отрезка DE. Докажите, что $\angle AKE = \angle BKE$.

Круговые многочлены – 1

П. В. Бибиков

При работе со степенями натуральных чисел невероятным образом оказываются полезны так называемые *круговые многочлены*, или *многочлены деления круга*. Вообще использование многочленов в теории чисел встречаются не так уж и редко, но зачастую эти многочлены определяются довольно просто. А вот многочлены деления круга определяются с помощью комплексных чисел...

Напомним, что *корнем n-й степени из единицы* называется такое комплексное число ξ, что $\xi^n = 1$. Корней n-й степени из 1 существует ровно n штук, и равны они

$$\xi_k := \cos\frac{2\pi k}{n} + i\sin\frac{2\pi k}{n} = e^{\frac{2\pi i k}{n}}, \quad \text{где } k = 0,\ 1,\ ...,\ n-1.$$

Круговым многочленом порядка n называется многочлен

$$\Phi_n(x) = \prod_{(k,n)=1} (x - \xi_k),$$

где ξ_k — корни n-й степени из 1. Именно эти, на первый взгляд, странные многочлены оказываются очень полезны при решении различных задач по теории чисел.

Начнем с того, что докажем основные свойства круговых многочленов.

Задача 1. Докажите, что если p — простое, то $\Phi_p(x) = 1 + x + x^2 + \ldots + x^{p-1}$.

Задача 2. Докажите, что $\prod\limits_{d|n} \Phi_d(x) = x^n - 1$. В частности, $\Phi_n(x) \mid x^n - 1$ и $\sum\limits_{d|n} \varphi(d) = n$.

Задача 3. Докажите, что $\Phi_n(x) \in \mathbb{Z}[x]$.

Задача 4. Пусть p — произвольное простое число. Докажите, что

$$\Phi_{pn}(x) = \begin{cases} \Phi_n(x^p), & \text{если } p \mid n, \\ \frac{\Phi_n(x^p)}{\Phi_n(x)}, & \text{если } p \nmid n \end{cases} \quad \text{и} \quad \Phi_{p^k n}(x) = \begin{cases} \Phi_n(x^{p^k}), & \text{если } p \mid n, \\ \frac{\Phi_n(x^{p^k})}{\Phi_n(x^{p^{k-1}})}, & \text{если } p \nmid n. \end{cases}$$

Задача 5.

a) Докажите, что многочлены $\Phi_n(x)$ и $\Phi_m(x)$ взаимно просты.
b) Докажите, что $\Phi_{kn}(x) \mid \frac{x^{kn}-1}{x^n-1}$ при $k \neq 1$.
c) Докажите, что если числа $\Phi_n(k)$ и $\Phi_m(k)$ не взаимно просты, то $\frac{m}{n}$ является степенью некоторого простого числа (возможно отрицательной).

Задача 6. Пусть m и n — целые числа и p — простой делитель $\Phi_n(m)$. Докажите, что либо $p \mid n$, либо $n \mid p-1$.

Комбинаторика

М. Ю. Дмитриева

Про число Каталана.

Слоненок умеет ходить на вектора $(1,1)$ и $(1,-1)$. *Числом Каталана* C_n называется число способов добраться слоненку от точки $(0,0)$ до точки $(2n,0)$, не заходя в нижнюю полуплоскость (на оси x оказываться можно). В начале занятия было доказано, что $C_n = \frac{1}{n+1}C_{2n}^n$.

Задача 1.

a) Докажите, что число правильных скобочных последовательностей длины $2n$ равно C_n.
b) Докажите, что $C_n = C_0C_{n-1} + C_1C_{n-2} + \ldots + C_{n-2}C_1 + C_{n-1}C_0$.
c) Докажите, что число способов разбить выпуклый $(n+2)$-угольник на треугольники рано C_n.

Задача 2.

a) Докажите, что количество таблиц из двух двух строк длины n, заполненных числами от 1 до $2n$ так, чтобы во всех строках и столбцах числа были расположены (слева направо и сверху вниз соответственно) по возрастанию, тоже равняется n-ному числу Каталана.

b) Найдите количество таблиц из двух строк длины m и n ($m > n$), заполненных числами от 1 до $m + n$ так, чтобы во всех строках и столбцах числа были расположены (слева направо и сверху вниз соответственно) по возрастанию.

c) Докажите, что количество последовательностей натуральных чисел 1, a_1, ..., a_n, 1, в которых каждый a_i больше единицы и является делителем суммы своих соседей, равняется n-ному числу Каталана.

Не про число Каталана.

Задача 3. Сколько существует

a) возрастающих

b) неубывающих

функций из чисел $\{1, 2, \ldots, n\}$ в числа $\{1, 2, \ldots m\}$?

Задача 4. В городе Судиславль живут 2020 мужчин и 2019 женщин. Сколько существует способов выбрать из них тех, кому подарят подарки на день города, если мэр хочет, чтобы среди них мужчин было больше, чем женщин?

Задача 5. Обозначим как $p(n, k)$ количество разбиений числа n на слагаемые, не превосходящие k. (Разбиения, отличающиеся лишь порядком слагаемых, считаются одинаковыми).

a) Докажите, что количество разбиений числа n на k слагаемых равно $p(n, k)$.

b) Докажите, что $p(10000, 100)^2 < p(3000, 3000)$.

Задача 6. Петя хочет выписать все возможные последовательности из 100 натуральных чисел, в каждой из которых хотя бы раз встречается тройка, а любые два соседних члена различаются не больше, чем на 1. Сколько последовательностей ему придётся выписать?

Лемма Минковского

Е. А. Морозов

В конце XIX-го — начале XX-го века в математике появилась новая область на стыке геометрии и теории чисел — *геометрия чисел*. На этом занятии мы докажем нетрудную геометрическую лемму, являющуюся ключом ко многим результатам из этой области.

Напомним, что фигура называется *выпуклой*, если вместе с любыми 2-я своими точками она содержит и соединяющий их отрезок. Точку, обе координаты которой — целые числа, будем называть *целой*. Вектор $\overrightarrow{AB}$ называется *целым* также если обе его координаты целые (хотя его концы при этом не обязаны быть целыми точками).

Лемма (Минковский)**.** *Пусть F — выпуклая центрально-симметричная относительно начала координат фигура на плоскости площади больше 4-х. Тогда внутри F есть еще одна целая точка.*

Замечание. Здесь и далее вы ничего не потеряете, если все фигуры будете считать многоугольниками.

Задача 1.

а) Пусть $A_1 = (x_1, y_1)$ и $A_2 = (x_2, y_2)$ — две целые точки. При каких условиях на x_1, y_1, x_2, y_2 отрезок A_1A_2 содержит целую точку?

b) На плоскости даны 5 попарно различных целых точек. Докажите, что найдется отрезок с концами в данных точках, проходящий через еще одну целую точку.

c) Кстати, а сколько целых точек надо брать в пространстве, чтобы всегда нашелся отрезок с концами в этих точках, содержащий еще одну целую точку?

Задача 2.

a) Карта Москвы масштаба 1:45000 разрезана на 60 прямоугольников 9×13 см. После того, как прямоугольники совместили, получился атлас. Докажите, что иглой можно проткнуть этот атлас так, чтобы хотя бы на 10 листах было проткнуто что-нибудь зелёное.

Справочная информация: общая площадь садов, скверов и парков Москвы составляет 343 км^2.

b) Докажите, что всякая фигура площади больше 4-х содержит 5 таких точек $A_1, \ldots, A_5$ что все вектора $\overrightarrow{A_iA_j}$ целые.

Задача 3. Докажите лемму Минковского.

Задача 4. При решении этой задачи формулой Пика пользоваться запрещено!

a) Докажите, что площадь параллелограмма с вершинами в целых точках — целое число.

b) Все вершины параллелограмма — целые точки, а внутри него и на границе целых точек больше нет. Докажите, что его площадь равна 1.

Гомотетия

Д. А. Байгушев

Задача 1. Внутри угла расположены две окружности с центрами A, B, которые касаются друг друга и сторон угла. Докажите, что окружность с диаметром AB касается сторон угла.

Задача 2. Четырехугольник разрезан диагоналями на четыре треугольника. Докажите, что точки пересечения медиан этих треугольников образуют параллелограмм.

Задача 3. На стороне BC треугольника ABC выбрана такая точка D, что радиусы вписанных окружностей треугольников ABD и ADC равны. Докажите, что и радиусы вневписанных окружностей этих треугольников, соответствующих вершине A, тоже равны.

Задача 4. Пусть M и P — точки касания вписанной и вневписанной окружностей треугольника ABC со стороной BC, MN — диаметр вписанной окружности. Докажите, что точки A, N и P лежат на одной прямой.

Задача 5. Впишите в треугольник две равные окружности, каждая из которых касается двух сторон треугольника и другой окружности.

Задача 6. Через середину M стороны BC неравнобедренного треугольника ABC проведена касательная к его вписанной окружности, отличная от BC, точка касания обозначена через Y. Докажите, что прямая AY проходит через точку касания вневписанной окружности с отрезком BC.

Задача 7. Пусть I — центр вписанной окружности треугольника ABC, I_b — точка касания ее со стороной AC, M_b — середина стороны AC. Докажите, что прямая M_bI делит отрезок BI_b пополам.

Задача 8. В каждый угол треугольника ABC вписана окружность, касающаяся описанной окружности. Пусть A_1, B_1 и C_1 — точки касания этих окружностей с описанной окружностью. Докажите, что прямые AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке.

Суммы квадратов

Е. А. Морозов

Вопрос 1. Какие натуральные числа представимы в виде суммы двух квадратов целых чисел?

Ответ на этот естественный вопрос был получен Ферма в 1640-м году, однако его доказательство не было опубликовано. Первое опубликованное доказательство было представлено Эйлером только 100 лет спустя. В настоящее время существует множество содержательных доказательств основанных на совершенно разных идеях.

Напоминания. Здесь и далее p — нечетное простое число.

1) Всякое нечетное простое число p имеет вид $p = 4k + 1$ или $p = 4k + 3$ для некоторого целого k.
2) Малая теорема Ферма: если $p \nmid a$, то $a^{p-1} - 1$ делится на p.
3) Теорема Вильсона: $(p - 1)! + 1$ делится на p.
4) Площадь треугольника с вершинами (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) равна
$$\frac{1}{2}|x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1 - x_2y_1 - x_3y_2 - x_1y_3|.$$

Задача 1. Докажите, что если два числа представимы в виде суммы двух квадратов, то их произведение тоже представимо.

Задача 2.

a) Докажите, что если p имеет вид $4k+3$, то не существует такого целого s, что $p \mid s^2 + 1$. (*указание:* $s^{p-1} = (s^2)^{\frac{p-1}{2}}$).
b) Докажите, что если $x^2 + y^2$ делится на простое p вида $4k + 3$, то $p \mid x$ и $p \mid y$.

Задача 3. Докажите, что если p имеет вид $4k+1$, то существует такое целое s, что $p \mid s^2 + 1$. (*указание:* $s = (2k)!$).

Задача 4. Пусть p — простое число вида $4k+1$, s — такое целое число, что $p \mid s^2 + 1$. Рассмотрим множество $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + (xs + yp)^2 < 2p\}$ (на самом деле, это внутренность эллипса).

a) Проверьте, что E — выпуклое центрально-симметричное относительно начала координат множество.
b) Проверьте, что отображение $(x, y) \mapsto (x, ax + by)$, $b \neq 0$ переводит прямые в прямые, а площадь любого треугольника умножает на $|b|$ (таким образом, из соображений предельного перехода можно считать, что площади всех фигур умножаются на $|b|$).
c) Найдите площадь множества E.
d) Докажите, что E содержит целую точку, отличную от $(0, 0)$.
e) Докажите, что всякое простое число вида $4k + 1$ представимо в виде суммы двух квадратов.

Задача 5. Ответьте на вопрос 1, доказав **рождественскую теорему Ферма**.

2. Вторая неделя

Решетки и блуждания

П. В. Бибиков

Полезная конструкция. Рассмотрим треугольную решетку, т.е. разбиение плоскости на равные треугольники параллельными прямыми, которые получаются сдвигами на три вектора с нулевой суммой. Два треугольника с соседней стороной назовем *ромбиком*. Предположим, что мы замащиваем фигуру на треугольной решетке ромбиками. Тогда для таких замощений можно также определить функцию высоты $H_{T,v_0}(v)$, обходя первый треугольник по контуру, а каждый следующий так, чтобы обход был согласован с предыдущими. Стартуя с произвольной вершины v_0, мы строим произвольный путь к вершине v, складывая отрезки, пройденные с направлении стрелок, и вычитая отрезки, пройденные против этого направления.

Однако в некоторых ситуациях можно обойтись без введения функции высоты. Полезно просто *обходить фигуры по контурам, кодируя путь* (например, приписывая каждому из направлений движения соответствующую букву) и *следя за тем, что обход замкнутого односвязного контура равен* 0. Условие равенства 0 обхода по контуру является мощным инвариантом, противоречие с которым можно получить, придавать элементам кода (т.е. буквам, соответствующим направлению движения) различный смысл, априори не связанный с условием задачи.

Задача 1. Докажите, что для треугольной решетки и двух замощений T и T' ромбиками функции высоты связаны сравнением $H_{T,v_0}(v) \equiv H_{T',v_0}(v) \pmod 3$.

Задача 2. Рассмотрим замощение правильного шестиугольника со стороной n на треугольной решетке.

a) Докажите, что количество замощений правильного шестиугольника со стороной n ромбами со стороной 1 равно количеству трехмерных диаграмм Юнга, расположенных в кубе с ребром длины n.

b) Докажите, что количества ромбов каждого из трех возможных направлений равны.

c) Докажите, что любое рассматриваемое разбиение можно перевести в любое другое с помощью нескольких операций флипа.

d) Докажите, что число $H_{T,v_0}(v)/\sqrt{3}$ равно расстоянию от вершины v трехмерной диаграммы Юнга до плоскости, проходящей через v_0 перпендикулярно вектору $(1;1;1)$.

Задача 3. Рассматривается правильный восьмиугольник со стороной $k \in \mathbb{N}$, доминошки 1×2 и ромбы со стороной 1 и углом $45°$.

a) Докажите, что при четных k такой восьмиугольник можно разбить на доминошки и ромбы.

b) Докажите, что при нечетных k такого разбиения не существует.

Непростая добавка к симедиане.

Е. А. Морозов

Задача 1. В треугольнике ABC: точка M — середина BC, P — точка пересечения касательных в точках B и C к описанной окружности, N — середина отрезка MP. Отрезок AN пересекает описанную окружность в точке Q. Докажите, что $\angle PMQ = \angle MAQ$.

Задача 2. В остроугольном неравнобедренном треугольнике ABC высоты AA' и BB' пересекаются в точке H, а медианы треугольника AHB пересекаются в точке M. Прямая CM делит отрезок $A'B'$ пополам. Найдите угол C.

Задача 3. В треугольнике ABC проведена биссектриса BD (точка D лежит на отрезке AC). Прямая BD пересекает окружность Ω, описанную около треугольника ABC, в точках B и E. Окружность ω, построенная на отрезке DE как на диаметре, пересекает окружность Ω в точках E и F. Докажите, что прямая, симметричная прямой BF относительно прямой BD, содержит медиану треугольника ABC.

Задача 4. Прямые, содержащие медианы треугольника ABC пересекают описанную окружность в точках A_1, B_1, C_1. Прямые, проходящие через A, B, C и параллельные противолежащим сторонам, пересекают ее же в точках A_2, B_2, C_2. Докажите, что прямые A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 пересекаются в одной точке.

Задача 5. Постройте треугольник по его вершине, центру описанной окружности и точке пересечения симедиан.

Задача 6. Дан треугольник ABC. Точка A_1 — середина его стороны BC, а точка A_2 — середина его высоты AH. Докажите,

что прямая A_1A_2 проходит через точку пересечения симедиан треугольника ABC.

Раскраски и вращения

Г. К. Седов

Задача 1. Сколько существует

a) Раскрасок граней куба в черный и белый цвета;
b) Различных (неизоморфных) неориентированых графов с 4 вершинами;
c) Раскрасок в r цветов вершин правильного тетраэдра.

Задача 2. Найдите количество раскрасок карусели из n незанумерованных вагончиков в r цветов для

a) $n = 5$,
b) $n = 4$,
c) $n = 6$.

Задача 3. Перечислите все вращения пространства, переводящие куб в себя.

Задача 4. Найдите количество:

a) r-цветных ожерелий из $n = 2k + 1$ бусин (Ожерелья одинаковы, если их можно либо совместить поворотом вокруг центра, либо осевой симметрией ожерелья)
b) Раскрасок незанумерованных граней куба в r цветов
c) Раскрасок незанумерованных вершин куба в r цветов

Лемма (Бернсайд)**.** *Пусть заданы конечное множество M и семейство $\{g_1, \dots g_n\}$ преобразований этого множества, замкнутое относительно взятия композиции и взятия обратного элемента. Назовем элементы множества M эквивалентными, если один из них можно перевести в другой одним из*

данных преобразований. Тогда количество классов эквивалентности равно $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\mathrm{fix}(g_k)$*, где* $\mathrm{fix}(g_k)$ *— количество элементов множества* M*, которые преобразование* g_k *переводит в себя.*

Задача 5. Докажите лемму Бернсайда.

Задача 6. Найдите количество графов с n вершинами с точностью до изоморфизма.

Задача 7.

a) Найдите количество b_n отображений $\{0,1\}^n \to \{0,1\}$ с точностью до перестановки переменных.

b) Докажите, что существует предел

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n!b_n}{2^{2^n}}$$

и найдите его.

Добавка к Бернсайду

Г. К. Седов

Задача 1. Найдите количество раскрасок граней правильного октаэдра в r цветов.

Задача 2. Найдите количество раскрасок графа $K_{3,3}$ в r цветов. Раскраски считаются одинаковыми, если существует автоморфизм, переводящий одну в другую. (Автоморфизм — это изоморфизм из графа в самого себя.)

Задача 3. Боковые грани правильной шестиугольной пирамиды окрашиваются в красный, синий и зеленый цвета. Определить

a) число различных 2-х и 3-х цветных пирамид;

b) число пирамид с одной красной гранью;

c) число пирамид, у которых не менее трех красных граней.

Задача 4. Вершины куба помечают красным, синим и зеленым цветами. Сколько существует

a) кубов, у которых половина вершины красные;
b) кубов, у которых не более двух красных вершин

Усреднение и интегралы

П. В. Бибиков[1]

Задача 1. Докажите неравенство $C_{2n}^{n} > \frac{2^{2n-1}}{n}$.

Задача 2. На круглом столе лежат 2019 правильно идущих круглых часов. Докажите, что в некоторый момент времени сумма расстояний от центра стола до концов минутных стрелок больше суммы расстояний от центра стола до центров часов.

Сначала нужно обсудить понятие среднего значения функции, которое служит далеко идущим обобщением понятия среднего арифметического нескольких чисел. Пусть функция $f(x)$ задана на отрезке $I = [a; b]$. Что такое среднее значение функции на отрезке? Давайте разобьем наш отрезок I на n маленьких отрезков I_k ($k = 1, 2, \ldots, n$) одинаковой длины $\Delta x_k = (b-a)/n$; на каждом из маленьких отрезков выберем соответственно точку x_k и найдем среднее арифметическое

$$\frac{f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_n)}{n} = \frac{1}{b-a} \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x_k.$$

Что будет, если устремить число n отрезков разбиения к бесконечности (или, что то же самое, Δx_k к нулю)? Оказывается, если функция f непрерывна на отрезке I, то записанная в правой части интегральная сумма стремится к некоторому предельному значению, которое не зависит от конкретного выбора точек x_1, x_2, ..., x_n и является *определенным интегралом*:

$$\text{если } n \to \infty, \text{ то } \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x_k \to \int_a^b f(x)\,dx.$$

[1] Данный листок составлен с использованием материалов И. В. Яковлева, см. `http://mathus.ru/math/`

Таким образом, мы приходим к определению среднего значения функции f на отрезке $[a;b]$:

$$\widehat{f} = \frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x)\,dx.$$

Пусть, в частности, $f(\varphi)$ есть периодическая функция угла φ с периодом 2π. Среднее значение функции f — это ее среднее значение на отрезке $[0;2\pi]$. Имеем:

$$\widehat{f} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(\varphi)\,d\varphi.$$

Для наших дальнейших целей полезно вернуться в данной формуле от определённого интеграла к интегральной сумме. Мы не будем гнаться за строгостью и обозначим результат по-прежнему $\widehat{f}$, считая, что в сумме «очень много» слагаемых, и она с хорошей точностью приближает величину интеграла:

$$\widehat{f} = \frac{1}{l}\sum_k f(M_k)\Delta l_k.$$

Теперь подключим к делу тригонометрическую окружность ω, то есть окружность единичного радиуса с центром в начале координат. Каждому углу $\varphi \in [0;2\pi]$ отвечает единственная точка $M \in \omega$, так что функцию $f(\varphi)$ можно понимать как функцию $f(M)$, заданную на окружности ω. Разбиение отрезка $[0;2\pi]$ на малые отрезки длиной $\Delta\varphi_k$ приводит к разбиению тригонометрической окружности на малые дуги с угловой величиной $\Delta\varphi_k$ и соответственно длиной $\Delta l_k = \Delta\varphi_k$. Заметив, наконец, что длина тригонометрической окружности $l = 2\pi$, запишем нашу формулу в следующем виде:

$$\widehat{f} = \frac{1}{2\pi}\sum_k f(M_k)\Delta\varphi_k.$$

Пользуясь тем, что дуги разбиения очень малы, мы можем аппроксимировать окружность многоугольником и считать, что Δl_k есть длина стороны многоугольника (то есть длина хорды, стягивающей соответствующую дугу), а точка M_k выбрана в середине этой стороны. Такой прием поможет найти интересующее нас среднее значение чисто геометрически, не прибегая к вычислению интеграла.

Задача 3.

a) Рассмотрим на координатной плоскости вектор $\overline{a}$ и семейство все возможных прямых, проходящих через начало координат. Докажите, что средняя длина проекции вектора $\overline{a}$ на эти прямые пропорциональна длине $|\overline{a}|$.

b) Вычислите коэффициент пропорциональности между средней длиной проекции вектора $\overline{a}$ и $|\overline{a}|$.

c) * Докажите аналогичный результат для вектора $\overline{a}$ в пространстве.

Совет: полезно пытаться представить длины отрезков как средние значения проекций каких-то векторов. Таким образом мы понижаем размерность задачи: вместо того, чтобы доказывать утверждение для набора отрезков на плоскости, мы можем доказать утверждение для проекций на всевозможные прямые. Тогда сами длины исходных отрезков — это просто средние для длин проекций, поэтому неравенство для проекций влечет неравенство для длин отрезков.

Задача 4. На плоскости даны две системы векторов: $\overline{a_1}$, ..., $\overline{a_m}$ и $\overline{b_1}$, ..., $\overline{b_n}$. Известно, что сумма длин проекций векторов первой системы на любую прямую не превосходит суммы длин проекций векторов второй системы на ту же прямую. Докажите, что сумма длин векторов первой системы не превосходит суммы длин векторов второй системы.

Задача 5. Один выпуклый многоугольник расположен внутри

другого. Докажите, что периметр внутреннего многоугольника не превосходит периметра внешнего.

Задача 6. Докажите, что если длины всех сторон и диагоналей выпуклого многоугольника меньше d, то его периметр меньше πd.

Задача 7. Докажите, что если a, b, c, d — вещественные числа, сумма которых равна 0, то

$$|a| + |b| + |c| + |d| \geqslant |a + d| + |b + d| + |c + d|.$$

Задача 8. Докажите, что если $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$, $\overline{d}$ — векторы на плоскости, сумма которых равна $\overline{0}$, то

$$|\overline{a}| + |\overline{b}| + |\overline{c}| + |\overline{d}| \geqslant |\overline{a} + \overline{d}| + |\overline{b} + \overline{d}| + |\overline{c} + \overline{d}|.$$

Задача 9. Вершины тетраэдра $KLMN$ лежат внутри, на гранях или на ребрах другого тетраэдра $ABCD$. Докажите, что сумма длин всех ребер тетраэдра $KLMN$ меньше, чем $4/3$ суммы длин всех ребер тетраэдра $ABCD$.

Задача 10.

a) Пусть $A = \{\overline{a_1}, \overline{a_2}, \ldots, \overline{a_n}\}$ — множество векторов на плоскости. Обозначим через $B \subset A$ подмножество этих векторов с наибольшей возможной длиной суммы. Докажите, что все векторы из B образуют с некоторой осью острые углы (т.е. смотрят в одну полуплоскость).

b) Назовем *псевдопроекцией* вектора $\overline{p}$ на прямую ℓ обычную проекцию, если угол между $\overline{p}$ и ℓ острый, и $\overline{0}$ в противном случае. Зафиксируем ось ℓ_0 и обозначим через ℓ_α ось, образующую с ℓ_0 угол α. Положим

$$g(x) = \begin{cases} \cos x, & \text{если } \cos x > 0, \\ 0, & \text{если } \cos x \leqslant 0. \end{cases}$$

Вычислите $\int\limits_0^{2\pi} g(\varphi - \alpha)\, d\alpha$.

c) Обозначим сумму псевдопроекций векторов $\overline{a_1}$, ..., $\overline{a_n}$ на ось ℓ_α через $f(\alpha)$. Докажите, что среднее значение f на отрезке $[0; 2\pi]$ равно $\frac{1}{\pi}$.

d) Докажите, что среди векторов множества A можно выбрать такое подмножество $B \subset A$, длина суммы которых не меньше $\frac{1}{\pi}$.

e) Докажите, что для набора векторов в пространстве верен аналогичный результат с заменой константы $\frac{1}{\pi}$ на константу $\frac{1}{4}$.

LTE–лемма: добавка для скучающих

М. Ю. Дмитриева

Задача 1. Пусть a, $b \in \mathbb{N}$. Докажите, что лишь для конечного числа $n \in \mathbb{N}$ сумма $(a + 0{,}5)^n + (b + 0{,}5)^n$ — целая.

Задача 2. Решите уравнение $(n-1)! + 1 = n^m$ в натуральных числах.

Задача 3. Для простых чисел p и q нашлись такие m и n, что $1 + p + p^2 + \ldots + p^m$ — степень q с натуральным показателем, а $1 + q + q^2 + \ldots + q^n$ — степень p с натуральным показателем. Докажите, что одно из чисел p и q равно 2.

Проективные преобразования

Д. А. Байгушев

Задача 1. Как будет меняться двойное отношение $(AB; CD)$ при перестановках букв A, B, C, D внутри скобок?

Задача 2. Докажите, что если $(AB; CX) = (AB; CY)$, то $X = Y$.

Задача 3. Пусть прямые $a; b; c; d$ такие, как в определении двойного отношения на прямой, а пятая прямая пересекается с ними

в точках $A; B; C; D$ соответственно. Докажите, что $(ab; cd) = (AB; CD)$.

Задача 4. Подумайте, как определить двойное отношение четырёх прямых в случае, если одна из точек бесконечно удалённая. Пусть при центральном проектировании прямой l_1 на прямую l_2 точки $A; B; C; D$ перешли в точки $A'; B'; C'; D'$ соответственно. Докажите, что $(AB; CD) = (A'B'; C'D')$.

Задача 5. Докажите, что существует проективное преобразование, переводящее A в A', B в B', C в C' (заранее произвольно зафиксированные точки).

Задача 6. Докажите, что композиция проективных отображений – проективное отображение.

Про поляры

М. Ю. Дмитриева

Дана окружность ω с центром O и радиусом R. Будем говорить, что точка A' является *инверсной* точке A относительно ω, если A' лежит на луче OA и $OA' \cdot OA = R^2$. Нетрудно понять, если точка A' инверсна A, то A инверсна A'.

Определение. *Полярой* точки A относительно ω назовём прямую a такую, что $A' \in a$ и $a \perp OA$. Соответственно, A будет называться *полюсом* прямой a.

Полярное преобразование отображает точки, отличные от O, в их поляры, а прямые, не проходящие через O — в их полюса. Нетрудно проверить, что это биекция.

Задача 1. (Полярная двойственность.) Докажите, что если a и b — поляры точек A и B, соответственно, то $B \in a$ тогда и только тогда, когда $A \in b$.

Задача 2.

a) Докажите, что если a и b — поляры различных точек A и B, соответственно, то AB — поляра точки $C = a \cap b$.

b) Из точки A вне ω проведены касательные AX и AY к ω ($X, Y \in \omega$). Докажите, что XY — поляра A.

c) Пусть a, b и c — поляры точек A, B и C, соответственно. Докажите, что A, B и C лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда a, b и c пересекаются в одной точке.

Задача 3.

a) Из точки A к окружности ω проведены касательные AX_A и AY_A, а из точки B — BX_B и BY_B. Пусть $X_AY_B \cap AB = T_1$ и $X_BY_A \cap AB = T_2$. Докажите, что $T_1 = T_2$.

Указание: вам может помочь теорема синусов.

b) Из точки A к ω проведены секущие l и k, пересекающие ω в точках B, C и D, E соответственно. Пусть $M = BD \cap CE$, $K = BE \cap CD$. Докажите, что MK — поляра A.

Задача 4. Постройте касательную из точки к окружности с помощью одной линейки.

Задача 5. Дана окружность ω и точки A_1, A_2, ..., $A_6 \in \omega$. Положим $X = A_1A_2 \cap A_4A_5$, $Y = A_2A_3 \cap A_5A_6$, $Z = A_3A_4 \cap A_6A_1$. Напомним, что *теорема Паскаля* утверждает, что в таком случае X, Y и Z лежат на одной прямой.

Пусть a_1, a_2, ...a_6 — касательные к ω в точках A_1, A_2, ..., A_6 соответственно. Положим $B_1 = a_1 \cap a_2$, $B_2 = a_2 \cap a_3$, ..., $B_6 = a_6 \cap a_1$. **Теорема Брианшона** утверждает, что в таком случае прямые B_1B_4, B_2B_5 и B_3B_6 пересекаются в одной точке.

Выведете теорему Брианшона из теоремы Паскаля.

Задача 6. Вписанная окружность описанного четырёхугольника $ABCD$ касается его сторон AB, BC, CD и DA в точках A_1, B_1, C_1 и D_1, соответственно. Пусть $P = AB \cap CD$, $Q = BC \cap AD$, $M = A_1B_1 \cap C_1D_1$, $K = B_1C_1 \cap A_1D_1$.

a) Докажите, что AC, BD, A_1C_1 и B_1D_1 пересекаются в одной точке.
b) Докажите, что P, Q, M и K лежат на одной прямой.

Задача 7. Пусть вписанная окружность треугольника ABC касается его сторон в точках A_0, B_0, C_0. Определим A' как пересечение BC и B_0C_0, аналогично определим точки B' и C'. Докажите, что A', B' и C' лежат на одной прямой.

Задача 8. Пусть I — инцентр треугольника ABC, A_0 — такая точка на BC, что $\angle AIA_0 = 90^\circ$. Аналогично строим точки B_0 и C_0. Докажите, что A_0, B_0 и C_0 лежат на одной прямой.

Спуск по Виету

А. О. Герасименко

Задача 1. Докажите, что существуют натуральные a, b, c, d большие 10^{2019} такие, что

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = abc + bcd + cda + dab.$$

Задача 2. Натуральные числа a и b таковы, что число a^2+b^2+1 делится на ab.

a) Чему может равняться частное?
b) Докажите, что a и b — числа Фибоначчи.

Задача 3. Докажите, что если для некоторых натуральных a, b, k выполнено, что
$\frac{a^2+b^2}{ab+1} = k$, то k — точный квадрат.

Задача 4. Натуральные числа a, b, c таковы, что $0 < a^2 + b^2 - abc \leq c$. Докажите, что
$a^2 + b^2 - abc$ — точный квадрат.

Задача 5. Докажите, что уравнение $a^2 + b^2 + c^2 = kabc$ в натуральных числах

a) не имеет решений при $k = 2$;
b) не имеет решений при $k > 3$;
c) имеет бесконечное множество решений при $k = 1$ и $k = 3$.

Ещё про поляры

М. Ю. Дмитриева

Задача 1. На плоскости даны точки A, B, C и Q. Пусть M, N и P — точки пересечения AQ, BQ и CQ с BC, CA и AB, соответственно. Пусть также D', E' и F' — точки касания вписанной окружности треугольника ABC с BC, CA и AB соответственно. Касательные из точек M, N, P (отличные от сторон треугольника) к вписанной окружности образуют треугольник DEF. Докажите, что прямые DD', EE', FF' пересекаются в точке Q.

Задача 2. Окружность ω с центром I касается внутренним образом окружности Ω и её хорды AB. Точка M — середина дуги AB (I и M лежат по одну сторону от AB), а точка N — середина противоположной дуги. Касательные из точки N касаются ω в точках C и D. Стороны AC и BD четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке X, а диагонали $ABCD$ пересекаются в Y . Докажите, что точки X, Y, I и M лежат на одной прямой.

Задача 3. Пусть вписанная окружность треугольника ABC касается его сторон в точках A_0, B_0, C_0. Пусть X — произвольная точка на отрезке BC. Прямая AX пересекает (первый раз) вписанную окружность в точке K. Положим $J = AA_0 \cap XB_0$ и $P = CJ \cap B_0C_0$. Докажите, что прямая PK касается вписанной окружности.

Задача 4. Вписанная в треугольник ABC окружность касается сторон BC, CA и AB в точках A', B' и C' соответственно. Перпендикуляр из центра I этой окружности на медиану из

вершины C пересекает прямую $A'B'$ в точке K. Докажите, что $CK \parallel AB$.

Задача 5. Пусть A_1 — такая точка на прямой BC, что AA_1 касается описанной окружности треугольника ABC. Из A_1 проводятся касательные A_1X и A_1Y к окружности девяти точек треугольника ABC (X и Y — точки касания). Докажите, что XY проходит через A.

Спуск по Виету. Добавка

А. О. Герасименко

Задача 1. Найдите количество пар натуральных различных m и n, меньших 100, для которых $m^2 - 1 \vdots n$ и $n^2 - 1 \vdots m$.

Задача 2. Пусть натуральные a, b, c, m такие, что выполнено равенство

$$a^2 + b^2 + c^2 + 1 = abcm.$$

Докажите, что $m = 4$.

Задача 3. Пусть a, b, c — натуральные числа, такие , что $abc + 1 | a^2 + b^2 + c^2$. Докажите, что $\frac{a^2+b^2+c^2}{abc+1}$ представляется в виде суммы двух квадратов натуральных чисел.

Задача 4. Дано натуральное число k. Докажите, что существует возрастающая последовательность натуральных чисел a_i такая, что для любого n выполнено $a_n^2 + k \vdots a_{n+1}$ и $a_{n+1}^2 + k \vdots a_n$.

Задача 5. Пусть натуральные a, b, c, m такие, что выполнено равенство

$$a^2 + b^2 + c^2 + 1 = abcm.$$

Докажите, что $m = 4$.

Задача 6. Какие натуральные значения может принимать выражение $\frac{(a+b+c)^2}{abc}$ при натуральных a, b, c.

Задача 7. Найдите максимальное значение n, при котором существует последовательность натуральных чисел a_1, a_2, …, a_n,

такая, что для любого $2 \leqslant k \leqslant n-1$ выполнено следующее:

$$a_{k+1} = \frac{a_k^2 + 1}{a_{k-1} + 1} - 1.$$

3. Третья неделя

Уравнение Пелля – 1

А. Б. Меньщиков

Определение. Уравнение в целых числах вида $x^2 - my^2 = 1$, где m — натуральное число, не являющееся точным квадратом, называется *уравнением Пелля*. Его решение (x_0, y_0) называется *нетривиальным*, если $(x_0, y_0) \neq (\pm 1, 0)$. Нетривиальное решение уравнения Пелля (x_0, y_0) называется *минимальным*, если $x_0, y_0 > 0$ и $x_0 + y_0$ минимально среди всех положительных решений уравнения Пелля.

Определение. Рассмотрим множество $\mathbb{Z}[\sqrt{m}]$, состоящее из всех чисел вида $x + y\sqrt{m}$, где x, y — целые, m — натуральное. Для каждого числа определим *норму* $N(x + y\sqrt{m}) = x^2 - my^2$. Будем говорить, что $a \in \mathbb{Z}[\sqrt{m}]$ *делится на* $b \in \mathbb{Z}[\sqrt{m}]$ (или $a \vdots b$), если существует $c \in \mathbb{Z}[\sqrt{m}]$, такое что $a = bc$.

Замечание. Решить уравнение Пелля $\Leftrightarrow$ найти все числа с нормой 1 в $\mathbb{Z}[\sqrt{m}]$.

Задача 1. Докажите, что норма в $\mathbb{Z}[\sqrt{m}]$ мультипликативна, т.е. если a, $b \in \mathbb{Z}[\sqrt{m}]$, то $N(ab) = N(a) \cdot N(b)$.

Задача 2.

а) Пусть $x_1 + y_1\sqrt{m}$ и $x_2 + y_2\sqrt{m}$ принадлежат $\mathbb{Z}[\sqrt{m}]$, $n = N(x_2 + y_2\sqrt{m})$. Докажите, что если $x_1 \equiv x_2 \pmod{n}$ и $y_1 \equiv y_2 \pmod{n}$, то $x_1 + y_1\sqrt{m} \vdots x_2 + y_2\sqrt{m}$.

b) Докажите, что если у уравнения $x^2 - my^2 = n$ более n^2 решений в целых неотрицательных числах, то найдётся нетривиальное решение уравнения $x^2 - my^2 = 1$.

Задача 3. Пусть пара чисел (a, b) — минимальное решение уравнения Пелля $x^2 - my^2 = 1$. Определим преобразование $f(x, y) = (ax + mby, ay + bx)$.

a) Докажите, что если (x_0, y_0) — решение уравнения Пелля, то $f(x_0, y_0)$ — тоже решение уравнения Пелля.

b) Заметим, что, исходя из тривиального решения $(1, 0)$, мы можем получить бесконечную последовательность решений (x_i, y_i) по формуле $(x_i, y_i) = f(x_{i-1}, y_{i-1})$. Докажите, что не существует положительных решений уравнения Пелля, отличных от элементов данной последовательности.

Задача 4. (**Теорема Минковского.**) Дан выпуклый центрально-симметричный многоугольник площади больше 4 с центром в точке $(0; 0)$. Докажите, что внутри него есть ещё хотя бы одна целая точка.

Задача 5. Рассмотрим гиперболы, заданные уравнениями $x^2 - my^2 = N$ и $x^2 - my^2 = -N$.

a) Выберем две точки с координатами $(x_0; y_0)$, $(-x_0; -y_0)$ на первой гиперболе и две точки с координатами $(\sqrt{m}y_0; \frac{x_0}{\sqrt{m}})$, $(-\sqrt{m}y_0; -\frac{x_0}{\sqrt{m}})$ на второй. Найдите площадь параллелограмма с вершинами в этих точках. Зависит ли она от x_0 и y_0?

b) Докажите, что для некоторого N на гиперболе $x^2 - my^2 = N$ найдётся бесконечно много целых точек.

c) Докажите, что любое уравнение Пелля имеет нетривиальное решение.

Замечание. Подобрать минимальное нетривиальное решение уравнения Пелля не всегда легко. Например, при $m = 61$ им является пара $(1766319049, 226153980)$.

Комбинаторный разнобой

Г. К. Седов

Задача 1. Андрею нравятся все числа, не делящиеся на 3, а Тане нравятся все числа, в которых нет цифр, делящихся на 3.

a) Сколько четырехзначных чисел нравятся и Андрею, и Тане?
b) Найдите общую сумму цифр всех таких четырехзначных чисел.

Задача 2. Рассматриваются всевозможные наборы, которые состоят из 2017 различных натуральных чисел и в каждом из которых ни одно из чисел нельзя представить в виде суммы двух других чисел этого набора. Какое наименьшее значение может принимать наибольшее число в таком наборе?

Задача 3. Какое наибольшее количество чисел можно выбрать из множества всех нечётных чисел, лежащих между 16 и 2016, чтобы ни одно из выбранных чисел не делилось ни на одно другое?

Задача 4. Маша, скучая на уроке математики, проделала с некоторым 2015-значным натуральным числом следующую операцию: от десятичной записи этого числа она отбросила последнюю цифру и к умноженному на 3 получившемуся числу прибавила удвоенную отброшенную цифру. С полученным числом она опять проделала ту же операцию и так далее. После многократного применения этой операции получающиеся у Маши числа перестали меняться, и тогда она остановилась.

a) Какое число оказалось у Маши в конце?
b) Какое наименьшее число могло быть у Маши в самом начале (укажите две его последние цифры)?

Задача 5. Петя подсчитал количество всех возможных m-буквенных слов, в записи которых могут использоваться только четыре буквы T, O, W и N, причем в каждом слове букв T

и О поровну. Вася подсчитал количество всех возможных $2m$-буквенных слов, в записи которых могут использоваться только две буквы Т и О, и в каждом слове этих букв поровну. У кого слов получилось больше? (Слово — это любая последовательность букв.)

Задача 6. Среди всех натуральных чисел от 1 до 20 включительно некоторые 10 чисел окрасили в синий цвет, а остальные 10 — в красный, затем подсчитали все возможные суммы пар чисел, одно из которых синее, а другое — красное. Какое максимальное количество различных может быть среди ста полученных чисел?

Долгожданная стереометрия

П. В. Бибиков

Мысль: при решении стреометрических задач очень полезно либо пытаться сводить их к плоским (проекции, сечения), либо искать их плоские аналоги и рассуждать по аналогии.

Задача 1. (теорема Менелая – 3D) Дан тетраэдр $ABCD$, на ребрах AB, BC, CD, DA которого отмечены соответственно точки K, L, M, N. Докажите, что эти точки лежат в одной плоскости тогда и только тогда, когда

$$\frac{AK}{KB} \cdot \frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MD} \cdot \frac{DN}{NA} = 1.$$

Задача 2. Известно, что замкнутая четырехзвенная ломаная касается сферы. Докажите, что точки касания лежат в одной плоскости.

Задача 3. Известно, что середины всех ребер тетраэдра лежат на одной сфере. Докажите, что скрещивающиеся ребра этого тетраэдра перпендикулярны.

Задача 4. В пространстве даны три отрезка A_1A_2, B_1B_2 и C_1C_2, не лежащие в одной плоскости и пересекающиеся в одной точке

P. Обозначим через O_{ijk} центр сферы, проходящей через точки A_i, B_j, C_k и P. Мы хотим доказать, что прямые $O_{111}O_{222}$, $O_{112}O_{221}$, $O_{121}O_{212}$ и $O_{211}O_{122}$ пересекаются в одной точке.

a) Придумайте и решите плоский аналог этой задачи.

b) Докажите исходное утверждение.

Задача 5. Рассмотрим две окружности, одна из которых лежит внутри другой. Из точки A, лежащей на большой окружности, проведем две хорды AB и AC, касающиеся маленькой окружности. Пусть O — центр маленькой окружности. Докажите, что центры описанных окружностей треугольников ABO и ACO равноудалены от центра большой окружности.

Задача 6. (трезубец – 3D) Рассмотрим тетраэдр, в который вписана сфера с центром в I и описана сфера с центром в O. Докажите, что центры описанных сфер тетраэдров $ABCI$, $BCDI$, $ABDI$ и $ACDI$ лежат на сфере с центром в O.

Задача 7. Три диагонали правильной n-угольной призмы пересекаются в одной внутренней точке O. Докажите, что точка O — центр призмы. (Диагональ призмы — это отрезок, соединяющий две её вершины, не находящиеся в одной грани.)

Задача 8. На ребрах SA, SB, SC тетраэдра $SABC$ взяты точки A_0, B_0, C_0 соответственно. Точка C_1 — точка пересечения прямых AB и A_0B_0, а точка C_2 — общая точка окружностей, описанных около треугольников C_1AA_0 и C_1BB_0, отличная от C_1. Аналогично определяются точки A_2 и B_2. Докажите, что точки A_2, B_2, C_2 и S лежат в одной плоскости.

Задача 9. Кубоид — это выпуклый многогранник с шестью гранями и восемью вершинами, все грани которого четырехугольники. Докажите, что если 7 из 8 вершин кубоида лежат на одной сфере, то и 8-я тоже лежит на этой сфере.

Уравнение Пелля – 2

А. Б. Меньщиков

Задача 1.

a) Найдите рекуррентное соотношение, дающее общее решение уравнения $x^2 - 3y^2 = 1$ в целых числах.
b) Найдите все решения этого уравнения в явном виде.

Задача 2. Сколько существует пар натуральных чисел x и y, для которых $x^2 = 2y^2 + 23^{23}$?

Задача 3. В пифагоровой тройке $(3, 4, 5)$ катеты различаются на 1. А сколько всего пифагоровых троек с таким же свойством?

Задача 4.

a) Докажите, что уравнение $(x + 2)^3 - x^3 = y^2$ не имеет решений в натуральных числах.
b) Докажите, что уравнение $(x + 1)^3 - x^3 = y^2$ имеет бесконечно много решений в натуральных числах.
c) Докажите, что если квадрат натурального числа n представим в виде разности кубов последовательных целых чисел, то число n есть сумма квадратов двух последовательных целых чисел.

Задача 5. Решите в целых числах уравнение $x^2 - 6xy + y^2 = 1$.

Задача 6. Опишите все решения уравнения $x^2 - xy - y^2 = \pm 1$ в натуральных числах.

Задача 7. Опишите все решения уравнения $x^2 - 3y^2 = 13$ в натуральных числах.

Вероятностный метод в комбинаторике

А. Кушнир

Задача 1. На плоскости отмечены $n > 2$ точек. Докажите, что можно соединить каждую пару точек единственной стрелкой таким образом, чтобы в полученном полном ориентированном графе было как минимум $\frac{n!}{2^{n-1}}$ гамильтоновых путей. *Гамильтоновым путем* называется путь, проходящий по всем вершинам ровно по одному разу.

Задача 2. У каждого из двух равных правильных додекаэдров отметили по 9 вершин. Докажите, что первый додекаэдр можно так совместить со вторым, чтобы по крайней мере пять его отмеченных вершин совпали с отмеченными вершинами второго. (*Додекаэдр* — правильный многогранник, у которого 12 пятиугольных граней, 30 ребер и 20 вершин, в каждой из которых сходится по три ребра.)

Задача 3. В классе n школьников, они посещают k кружков, каждый кружок посещают ровно m школьников, причем $k < 2^{m-1}$. Докажите, что школьников можно раскрасить в два пола так, чтобы на каждом кружке были и мальчики, и девочки.

Задача 4. Дано четное число $n > 2$. Клетки доски $n \times n$ раскрашены в $n^2/2$ цветов, каждого цвета — ровно по две клетки. Докажите, что можно расставить на доске n не бьющих друг друга ладей так, чтобы они все стояли на клетках разного цвета.

Задача 5. Докажите, что из любого графа можно выкинуть не более чем $1/d$ его ребер так, чтобы стало возможным раскрасить его вершины в d цветов правильным образом.

Задача 6. Пусть A — множество из n различных остатков по модулю n^2. Докажите, что существует множество B, состоящее из n различных остатков по модулю n^2, такое, что не менее половины остатков по модулю n^2 можно записать в виде $a + b$, где $a \in A$, $b \in B$.

Задача 7. На плоскости даны 10 точек. Докажите, что их можно покрыть непересекающимися кругами радиуса 1.

Множители Лагранжа

П. В. Бибиков

Совет: нужно отдельно разбирать случай границы, а затем использовать метод множителей Лагранжа.

Задача 1. Найти минимум функции $f(x, y) = 5x^2 + 2xy + 3y^2$ при условии $g(x, y) = 7x^2 + 2xy + 4y^2 - 3 = 0$.

Задача 2. Для неотрицательных a, b, c верно, что $a + b + c = 1$. Докажите неравенство $1 + 12abc \geqslant 4(ab + bc + ca)$.

Задача 3. Докажите, что для всех неотрицательных x, y, z, таких, что $x + y + z = 1$, имеет место неравенство

$$xy + yz + zx - 2xyz \leqslant \frac{7}{27}.$$

Задача 4. Для неотрицательных вещественных чисел a, b, c, удовлетворяющих соотношению $a + b + c = 1$, докажите неравенство $a^2b + b^2c + c^2a \leqslant \frac{4}{27}$.

Задача 5. Известно, что a, b, c, $d \geqslant 0$ и $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1$. Докажите, что

$$a^3 + b^3 + c^3 + d^3 + abc + bcd + cda + dab \leqslant 1.$$

Задача 6. Пусть a, b, c, d — неотрицательные вещественные числа, такие, что $a + b + c + d = 4$. Докажите, что $3(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) + 4abcd \geqslant 16$.

Задача 7. Даны положительные числа a, b, c. Найти все положительные числа x, y, z, такие, что

$$\begin{cases} x + y + z = a + b + c \\ 4xyz - (a^2x + b^2y + c^2z) = abc. \end{cases}$$

Неравенства

А. О. Герасименко

Задача 1. Пусть a, b, c действительные числа. Докажите, что

$$\frac{a^2}{4} + b^2 + c^2 \geqslant ab - ac + 2bc.$$

Задача 2. Положительные числа a, b, c таковы, что $a^2+b^2+c^2 = 3$. Докажите, что

$$a + b + c \geqslant ab + bc + ca.$$

Задача 3. Пусть x, y — положительные числа. Докажите неравенство:

$$\frac{x}{x^4 + y^2} + \frac{y}{y^4 + x^2} \leqslant \frac{1}{xy}.$$

Задача 4. Для положительных a, b, c докажите неравенство

$$\frac{a^2 + b^2}{c^2 + ab} + \frac{b^2 + c^2}{a^2 + bc} + \frac{c^2 + a^2}{b^2 + ac} \geqslant 3.$$

Задача 5. Положительные числа a, b, c удовлетворяют условию $a + b + c = 1$. Докажите неравенство:

$$\frac{1}{1-a} + \frac{1}{1-b} + \frac{1}{1-c} \geqslant \frac{2}{1+a} + \frac{2}{1+b} + \frac{2}{1+c}.$$

Задача 6. Положительные x, y, z таковы, что $xyz = 1$. Докажите неравенство:

$$\frac{x^3}{(1+y)(1+z)} + \frac{y^3}{(1+z)(1+x)} + \frac{z^3}{(1+x)(1+y)} \geqslant \frac{3}{4}.$$

Задача 7. (**Неравенство Шура**) Докажите, что для положительных a, b, c выполнено неравенство:

$$a^3 + b^3 + c^3 + 3abc \geqslant a^2b + b^2a + a^2c + c^2a + b^2c + c^2b.$$

Действие групп в комбинаторных задачах

А. Кушнир

Задача 1. Скажем, что колода из 52 карт сложена *правильно*, если каждая пара лежащих рядом карт совпадает по масти или достоинству, то же верно для верхней и нижней карты, и наверху лежит туз пик. Докажите, что число способов сложить колоду правильно a) делится на 12!; b) делится на 13!.

Задача 2. Во всех пунктах этой задачи положения центров граней кубика Рубика в пространстве считаются фиксированными.

a) Хулиган Вася выдернул из кубика Рубика все $8+12 = 20$ нецентральных кубиков $1 \times 1 \times 1$. Сколькими способами выдернутые кубики можно вставить обратно?

b) Докажите, что число состояний кубика Рубика, которые можно получить его вращениями из собранного (включая собранное), не кратно 13.

c) Вася утверждает, что придумал такую комбинацию вращений кубика Рубика, что из любого состояния кубика можно перейти в собранное, повторив эту комбинацию достаточное число раз. Докажите, что Вася ошибается.

Задача 3. Клетчатый прямоугольник $m \times n$ склеен в тор. Докажите, что число способов разрезать тор на связные клетчатые фигурки четной площади четно.

Задача 4. Дан набор чисел $1, 2, 3, \ldots, n-1, n$. Непустое подмножество S этого набора называется *удачным*, если среднее

арифметическое всех элементов множества S является целым числом. Докажите, что количество удачных подмножеств имеет ту же четность, что и число n.

Задача 5. Дано простое число $p > 2$. Сколькими способами можно выбрать p чисел из множества $1, 2, \ldots, 2p$ так, чтобы сумма выбранных делилась на p?

Задача 6. Докажите, что число способов разрезать клетчатую доску 9×9 на уголки из трех клеток делится на 128.