

Геометрия в сюжетах

7-8 классы

П. В. Бибиков, К. В. Козеренко, А. И. Малахов

Оглавление

1	Окружность Эйлера	5
1.1	Четыре точки на одной окружности	9
1.2	Пять точек на одной окружности	11
1.2.1	Точка H	11
1.2.2	Дельтоид и сумма углов треугольника	12
1.3	Девять точек на одной окружности	16
1.3.1	«Крутим» вершины	16
1.3.2	Средние линии и прямые углы	17
1.4	Некоторые замечания и наблюдения	21
1.4.1	Прямоугольники Эйлера	21
1.4.2	Острый и тупой углы	21
1.4.3	Серединные треугольники	23
2	Биссектрисы и точки W	24
2.1	Биссектрисы и высоты	27
2.2	Точки W_A и W^A	28
2.3	Высоты и биссектрисы	32
2.4	Основания биссектрис	37
2.5	W -треугольники	39
3	Треугольники Эйлера	41
3.1	H -треугольник и свойства ортоцентра	45
3.2	Степени свободы треугольников Эйлера	53
3.2.1	Середины и основание высоты. Невырожденный случай	55
3.2.2	Основания высот и середины. Невырожденный случай	57
3.2.3	M, H и E . Невырожденный случай	59
3.2.4	Прямоугольники Эйлера. Вырожденный случай	61
3.2.5	Окружности, связанные с высотами	63
3.2.6	Дельтоид и совпадающие индексы	65
4	Прямая Эйлера	69
4.1	Центр окружности Эйлера	73
4.2	Параллелограммы Эйлера	75
4.3	Точка пересечения медиан треугольника	76
4.4	Биссектрисы и прямая Эйлера	80
4.5	Глаз дракона	82
5	Формула Карно	84
5.1	Пять радиусов	87
5.2	Теорема Фейербаха	88

6 Отрезки касательных	90
6.1 Отрезки касательных вписанной и вневписанных окружностей	93
6.2 Точки касания вписанной окружности	95
7 Прямоугольный треугольник	98
7.1 Т-конфигурация	101
7.2 Несколько формул	104
8 Окружности и касательные	106
8.1 Общие касательные	109
8.2 Три вписанные окружности	113
8.3 Арбелос Архимеда	114
9 Окружность Аполлония	117
9.1 Биссектрисы и пропорциональные отрезки	121
9.2 Координаты в геометрии	123
9.3 Пучок окружностей Аполлония	126
9.4 Окружности Аполлония в треугольнике	127
9.5 Снова точки W	129
9.6 Касательные и секущие	132
9.7 Снова ортотреугольник	135
9.8 Задача Фаньяно и теорема синусов	138
10 Пропорциональные отрезки в треугольнике	142
10.1 Теорема Менелая и пропорциональные отрезки в треугольнике	145
10.2 Теорема Чевы	147
10.3 Еще замечательные точки в треугольнике	149
10.4 И снова о биссектрисах	150
11 Добавление: вокруг гомотетии	155
11.1 Основные свойства гомотетии	159
11.2 Гомотетия в трапеции	165
11.2.1 Подобные трапеции и среднее геометрическое	165
11.2.2 Среднее гармоническое	166
11.2.3 Замечательное свойство трапеции	167
11.3 Гомотетия и прямая Эйлера	168
11.4 Гомотетия и окружность Эйлера	171
11.5 Гомотетия и пара окружностей	177
11.5.1 Общие касательные	177
11.5.2 Параллельные диаметры и лемма Евклида	178
11.5.3 Связь с биссектрисами и окружностью Аполлония	181
11.6 Композиция гомотетий	183
11.6.1 Формулировка и доказательство	183
11.6.2 Теорема о трех колпаках	185
11.7 Гомотетия и касающиеся окружности и прямые	188
11.7.1 Параллельные секущие и касательные	188
11.7.2 Лемма Архимеда	188
11.7.3 Одна задача с IMO	191
11.8 Теорема Дезарга	191
11.8.1 Формулировка и доказательство	192
11.8.2 Птолемеева ось треугольника	193

Предисловие

Простое собрание фактов столь же мало является наукой, как куча камней — домом. Факт сам по себе есть ничто: он имеет значение, лишь поскольку с ним связана идея или поскольку он служит доказательством чего-либо. Тот, кто не знает, чего ищет, не поймет и того, что найдет.

Анри Пуанкаре

Любое научное исследование начинается с наблюдения.

Всем известен закон всемирного тяготения, открытый в середине XVII века (Буйо, Гук, Ньютон).

$$F = G \frac{mM}{r^2}$$

В своем фундаментальном труде «Математические начала натуральной философии» (1687) Исаак Ньютон установил эквивалентность этого закона трем эмпирическим законам, сформулированным Иоганном Кеплером в 1609 году и описывающим движение планет в Солнечной системе. Чтобы получить и аккуратно изложить этот результат, Ньютон сформулировал основные принципы, связанные с понятиями массы, силы, ускорения — так, например, появились три закона Ньютона. Тем самым Ньютон построил полноценную математическую модель гравитационного взаимодействия¹. Но отправной точкой послужили именно законы Кеплера. Как он смог эти законы сформулировать? Основой послужили *наблюдения* его учителя Тихо Браге (1546 - 1601), которые он скрупулезно проводил в течение нескольких десятилетий (практически невооруженным глазом!)².

Пять лет (с 1831 по 1836 год) провел в кругосветном путешествии на корабле «Бигль» только что окончивший университет Чарльз Дарвин. Большую часть времени тогда еще молодой натуралист провел на берегу, наблюдая и исследуя геологию и животный мир. Эти (и не только) *наблюдения* легли в основу труда «Происхождение видов», который будучи впервые изданным 24 ноября 1859 года перевернул наше представление о развитии живого на Земле и заложил основу эволюционного учения — краеугольного камня всей современной биологической науки.

Серия *наблюдений*: принцип относительности (1632, Галилео Галилей), изменение скорости света (1676, Олаф Ремер), несостоительность теории эфира (1881, 1887, Альберт Майкельсон, Эдвард Морли) — привела Анри Пуанкаре, а затем и Альberta Эйнштейна к созданию специальной (1905), а впоследствии и общей теории относительности (1916), которые принципиальным образом изменили наше представление о пространстве и времени и уже на протяжении ста лет остаются основополагающими теориями, описывающими глобальное устройство видимой Вселенной.

Этот список может быть продолжен сколь угодно далеко.

Ошибочным было бы полагать, что математика как наука устроена принципиально иным образом. Наблюдения и эксперимент первичны и в математических

¹Она оказалась настолько точной, что принципиальные поправки были в нее внесены лишь спустя 229 лет Альбертом Эйнштейном.

²Нужно заметить, что нам несколько повезло с нашей планетной системой: в ее центре одиночная звезда, поэтому закономерность движения планет можно уловить невооруженным взглядом, что и сделал Кеплер. Что может быть в иных случаях можно прочитать, например, в замечательном рассказе А. Азимова «Приход ночи».

исследованиях. Но что наблюдает математик? Пользуясь названием известной книги, мы бы ответили, что математик наблюдает числа и фигуры (а еще алгебраические многообразия, дифференциальные уравнения, стохастические интегралы и многое другое, с чем вы, дорогой читатель, познакомитесь, если продолжите свое математическое образование). К сожалению, при обучении математике эти соображения зачастую остаются в тени. У школьников складывается впечатление, что образовательный процесс состоит из заучивания большого набора *случайных, никак друг с другом не связанных и ничем не мотивированных* фактов, которые сваливаются на них с неба. О каком формировании интуиции и вкуса тут можно говорить?! Какое представление складывается у учащихся о математической науке в таком случае?!

Особенно остро эти проблемы стоят в геометрии. Обычно в преподавании основное внимание уделяется отработке базовых навыков и умений: заметить равные треугольники, вычислить угол с помощью суммы углов треугольника, доказать параллельность прямых и т.д. Подавляющее большинство таких задач являются «одноходовками» и не способствуют развитию геометрической культуры у школьников. Еще одной чертой задач, часто предлагаемых в курсе геометрии 7–8 класса, является их «вычурность». Кроме того, нередко учитель просто формулирует задачу, не уделяя внимания вопросам типа «откуда эта задача взялась», «как она связана с другими задачами» и уж тем более «как догадаться до формулировки этой самой задачи»? Таким образом мы не строим дом — мы собираем кучу камней.

Итак, ключевой проблемой в преподавании геометрии в 7–8 классах является отсутствие глубоких и содержательных результатов, последовательно осваивая которые, школьники могли бы

- а) существенно повысить как свой уровень владения материалом, так и свои навыки выстраивать сложные многоходовые рассуждения, используя весь арсенал имеющихся у них средств;
- б) на примере этого освоения познакомиться с тем, как делается и как устроена математика как наука.

На наш взгляд, приводимые далее сюжеты помогут восполнить этот пробел и дать возможность познакомиться с содержательными геометрическими результатами уже на ранних этапах освоения геометрии.

Отметим еще одну принципиальную особенность предлагаемого ниже подхода: дорога, по которой мы идем, лежит не в стороне от основного курса теории (принятого, например, в учебнике А. Погорелова), а, наоборот, расширяет, дополняет, углубляет и связывает между собой материал всего курса 7–8 классов. Удивительно, что результаты, лежащие на этой дороге, могут быть доказаны без привлечения такой мощной техники как вписанные и центральные углы, гомотетия и подобие, и в то же время эти доказательства не искусственны! Они проясняют суть дела, но с совершенно неожиданной стороны, позволяя помимо всего прочего продемонстрировать конструкции, не всегда знакомые даже победителям и призерам олимпиад. Представляется чрезвычайно важным дать школьникам еще младших (7–8) классов самостоятельно пройтись по этой дороге.

В заключение мы хотим выразить благодарность ученикам 7 «А», 7 «Г» и 8 «В» классов лицея «Вторая школа» 2016 года. В совместном общении с ними мы работали над исследованием изложенных ниже идей и наблюдений.

Глава 1

Окружность Эйлера

Окружность Эйлера является одной из жемчужин элементарной геометрии. Она вскрывает закономерность в положении самых важных и фундаментальных замечательных точек в треугольнике и дает начало целой серии исследований, связанных с более сложными объектами и понятиями. Кроме того, доказательства соответствующих утверждений не требуют никаких знаний, выходящих за рамки школьного курса, и во многих физико-математических классах и кружках окружность Эйлера изучается столь же основательно, как вписанные углы, теоремы Чевы и Менелая и т.д.

Как правило, окружность Эйлера изучается в 9 классе, редко раньше (отметим, правда, что в учебнике А. Погорелова окружность Эйлера приводится в конце §6 8 класса). Считается, что для понимания доказательств соответствующих теорем школьники уже должны хорошо владеть самыми разнообразными фактами и понятиями из курса геометрии: вписанными углами, гомотетией, подобием и т.д. При этом теоремы об окружности Эйлера преподносятся как финальный результат: смотрите, какие утверждения мы теперь умеем доказывать! То есть получается, что эти утверждения оторваны от самого процесса освоения нового материала, они — лишь следствие, причем находящееся где-то в стороне от школьного курса, нужное лишь в силу своей красоты и применения в олимпиадных задачах.

В данной главе мы знакомим читателя с другими подходами к изложению этих теорем. Во-первых, они предполагают знакомство с окружностью Эйлера уже в 7 классе. Во-вторых, для нас важен не только сам результат, но и путь к нему, поскольку на этом пути *естественно* возникают классические конструкции геометрии 7 класса: свойства прямоугольного и равнобедренного треугольников, средние линии и высоты в треугольнике, теорема об описанной окружности и другие. Поэтому представленные ниже сюжеты могут служить дополнительной мотивацией к изучения этих классических конструкций.

Ниже мы приведем два подхода к исследованию объектов, связанных с окружностью Эйлера. Для знакомства с одним из них достаточно освоения первых четырех параграфов учебника Погорелова. Предполагаются известными

- признаки равенства треугольников;
- признаки и свойства равнобедренного треугольника;
- параллельные прямые и сумма углов треугольника;
- признаки и свойства прямоугольного треугольника.

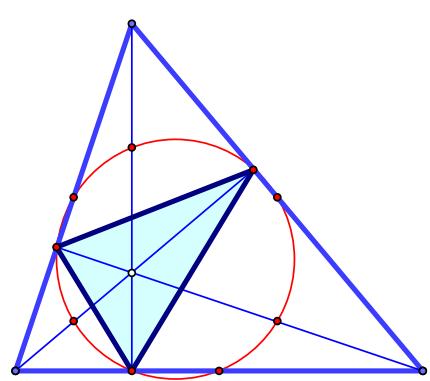
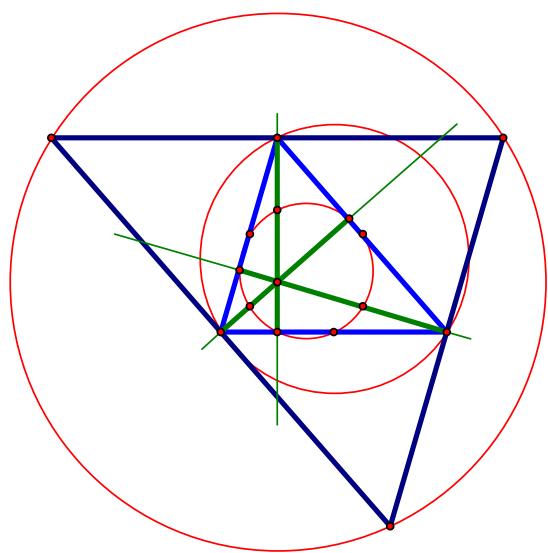
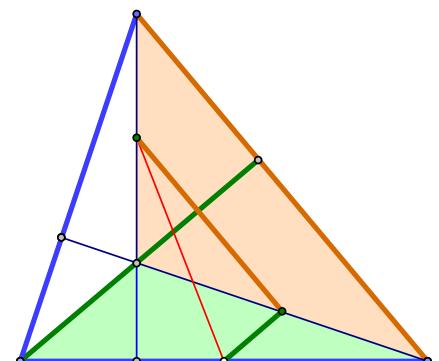
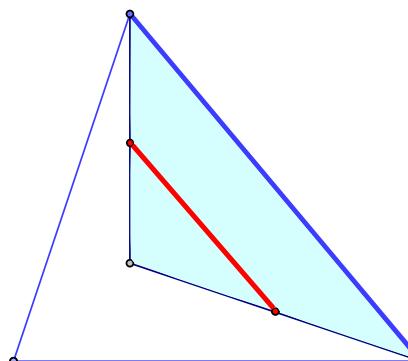
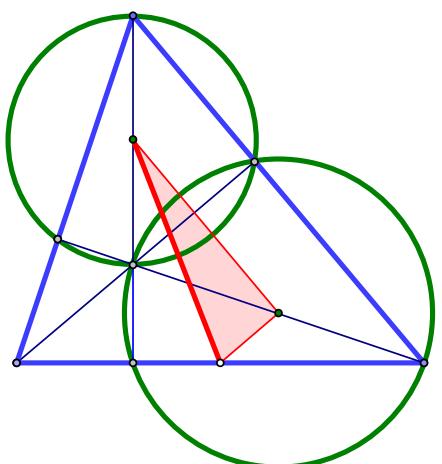
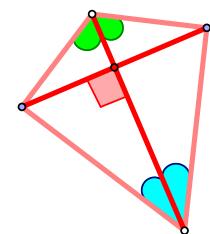
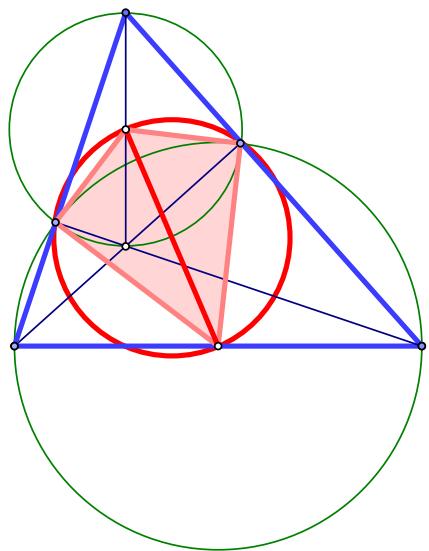
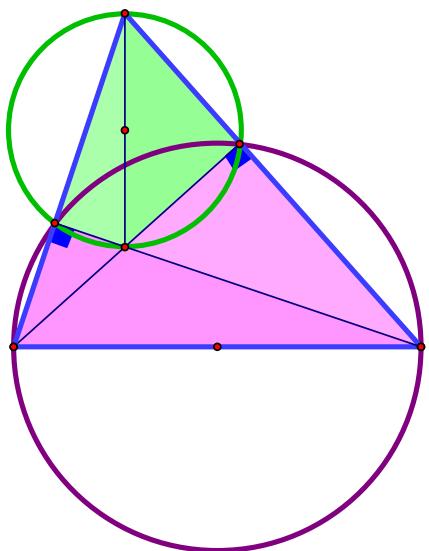
Для освоения другого потребуется также теорема об описанной окружности и теорема о точке H .

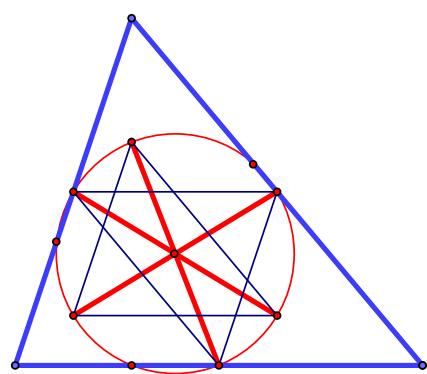
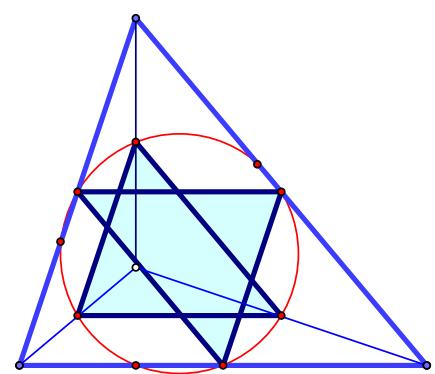
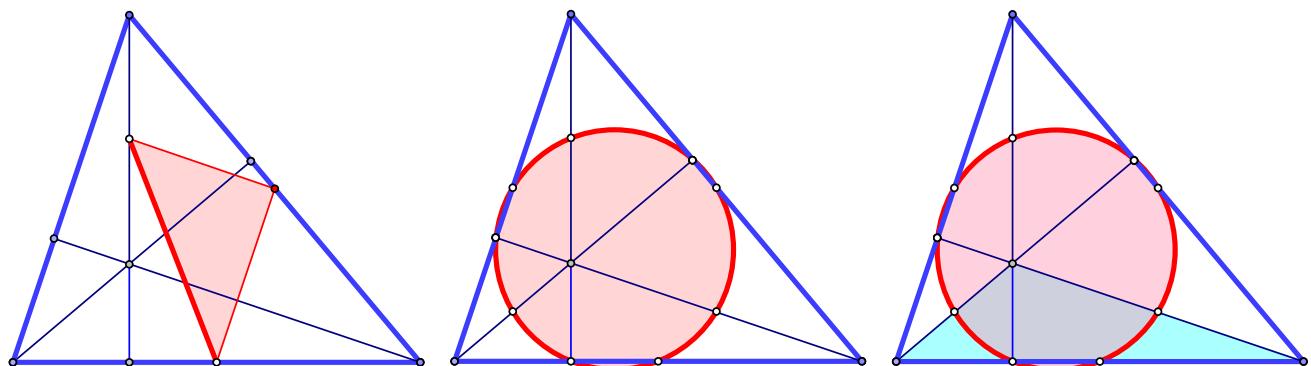
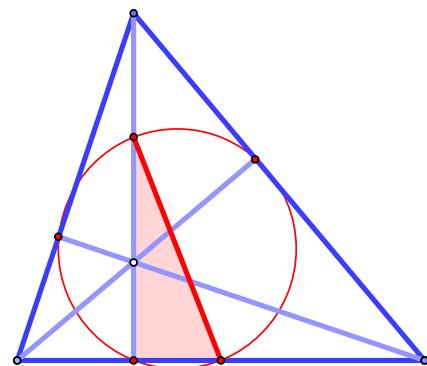
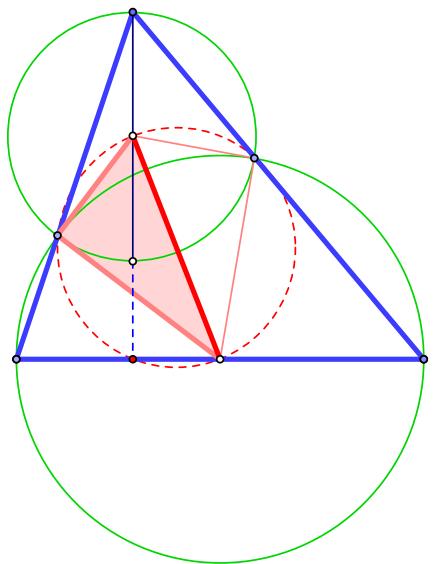
Изложение разбито на большое количество шагов, каждый из которых доступен по сложности. При этом каждый следующий шаг мотивирован: объяснено, откуда и что берется¹.

Зафиксируем также стандартные обозначения.

- M_A, M_B, M_C — середины сторон треугольника;
- H_A, H_B, H_C — основания высот;
- H — точка пересечения высот;
- E_A, E_B, E_C — середины отрезков, соединяющих вершины треугольника с точкой H .

¹При написании этой и всех других глав авторы руководствовались моделью реальных научных исследований.





1.1 Четыре точки на одной окружности

Начнем наш путь с замечательного свойства медианы прямоугольного треугольника.

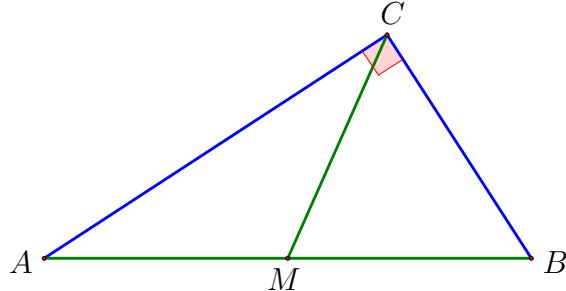


Рис. 1.1: Медиана прямоугольного треугольника

Задача 1.1. Треугольник ABC — прямоугольный с прямым углом C тогда и только тогда, когда $CM = AB/2$.

Оказывается, что прямоугольный треугольник тесно связан с . . . окружностью!

Задача 1.2. Докажите, что диаметр окружности виден из любой ее точки под прямым углом.

Наоборот, докажите, что если в окружности проведен диаметр AB и на плоскости выбрана точка C такая, что $\angle ACB = 90^\circ$, то точка C лежит на данной окружности (см. рис. 1.2).

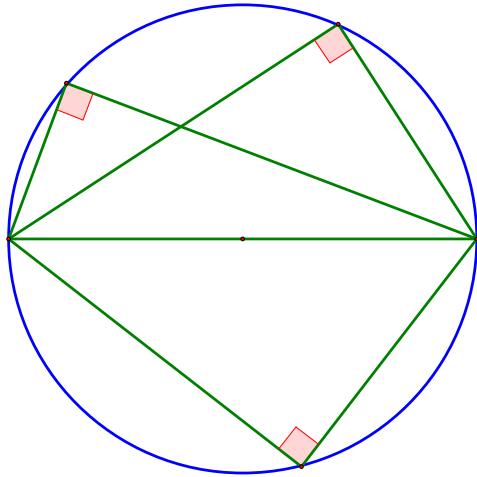


Рис. 1.2: Угол, смотрящий на диаметр

Используя намеченную выше связь, замечаем, что в произвольном треугольнике с каждой парой высот связаны две окружности.

Задача 1.3. Докажите, что каждая из четверок точек (A, H, H_B, H_C) и (B, C, H_B, H_C) воистину лежит на окружности (см. рис. 1.3). Эти окружности мы будем обозначать через κ^A и κ_A соответственно.

Центры этих окружностей E_A и M_A — середины отрезков AH и BC соответственно. Что мы можем сказать об этих точках? Как они связаны с остальными точками? Естественным шагом будет соединить центры полученных окружностей с точками на них — провести радиусы (см. рис. 1.4).

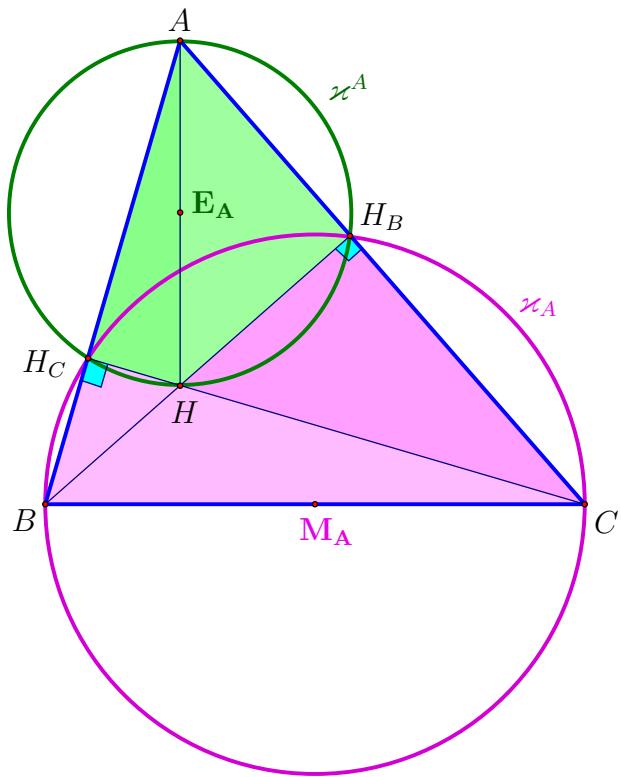


Рис. 1.3: Четыре точки на окружности

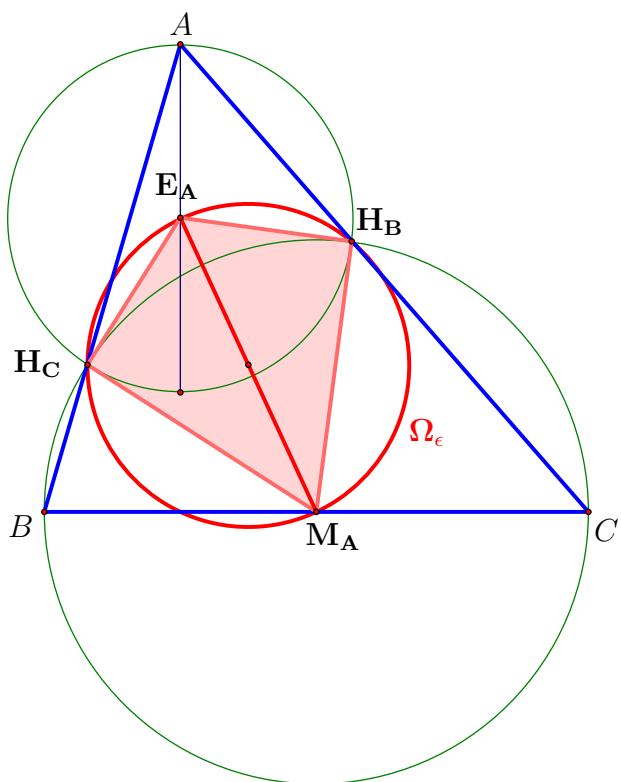


Рис. 1.4: Наблюдение: еще четыре точки на окружности

Эксперимент ² (см. рис. 1.4) позволяет сформулировать следующую гипотезу.

Гипотеза 1.1. Точки E_A, M_A, H_B, H_C лежат на одной окружности с диаметром E_AM_A .

Поскольку мы начали экспериментировать, не будем останавливаться на достигнутом. Обратим внимание на рисунки 1.3 и 1.4. Естественным ходом будет продлить отрезок AH до пересечения со стороной BC .

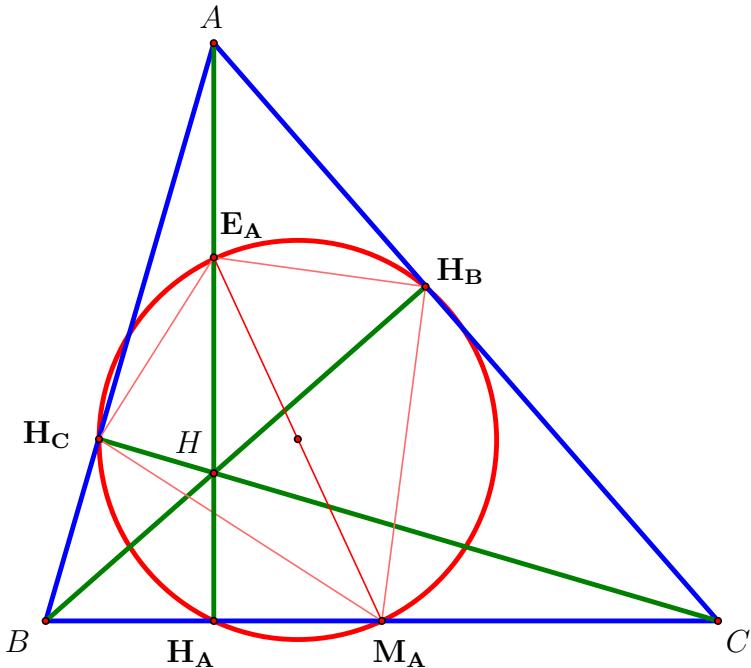


Рис. 1.5: Наблюдение: три высоты и пять точек на одной окружности

Данный рисунок позволяет нам сформулировать следующие гипотезы.

Гипотеза 1.2. В треугольнике три высоты пересекаются в одной точке.

Гипотеза 1.3. Точки E_A, M_A, H_B, H_C, H_A лежат на одной окружности с диаметром E_AM_A .

Как доказать эти утверждения и превратить высказанные нами гипотезы в теоремы? Обозначим два независимых пути к достижению этой цели.

1.2 Пять точек на одной окружности

1.2.1 Точка H

Первый путь берет начало в доказательстве гипотезы 1.2. Для этого может быть использована классическая конструкция, представленная на рисунке 1.6. А именно, через вершины исходного треугольника нужно провести прямые, параллельные его сторонам. Проведенные прямые образуют треугольник $A_M B_M C_M$ ³.

²Чтобы проводить эксперименты в геометрии, одного карандаша может оказаться недостаточно. Чтобы ясно видеть закономерности, вам понадобится программа интерактивной геометрии: Живая геометрия, Geogebra или им подобные.

³Вопрос, конечно, состоит в том, как догадаться до этой конструкции? Пока что для нас она выглядит как трюк. Однако в главе 3 и позже при изучении гомотетии она появится естественным образом.

Как высоты исходного треугольника связаны с треугольником $A_M B_M C_M$?

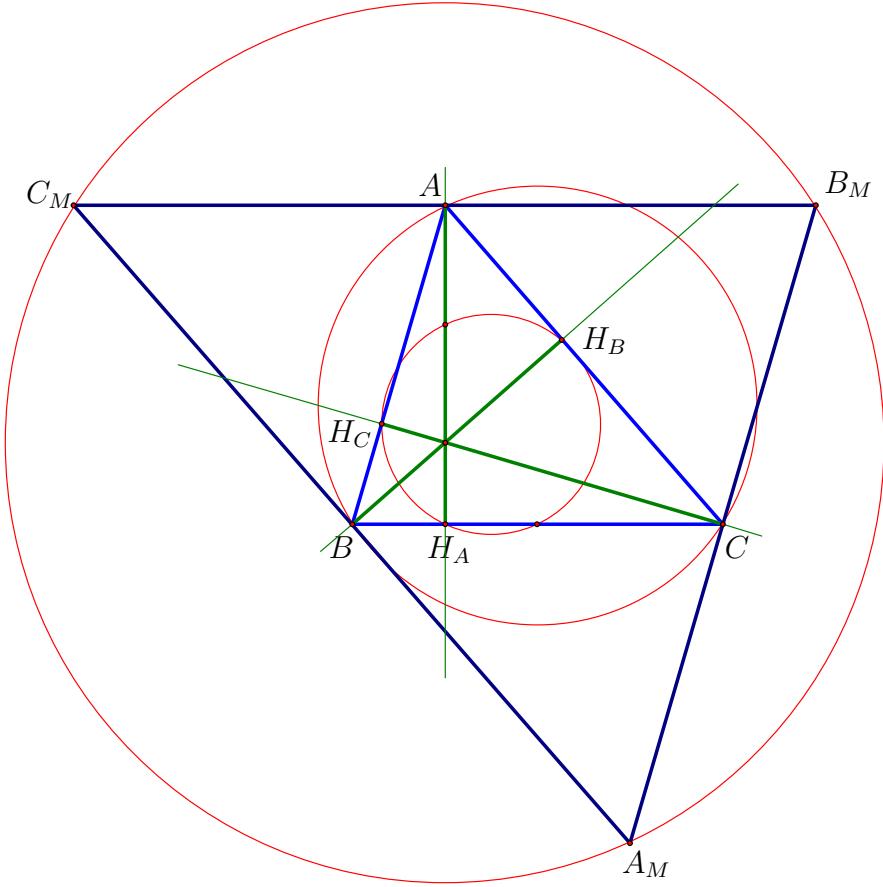


Рис. 1.6: Три высоты и треугольник $A_M B_M C_M$

Задача 1.4. Докажите, что высоты треугольника ABC являются серединными перпендикулярами треугольника $A_M B_M C_M$.

В произвольном треугольнике серединные перпендикуляры к сторонам пересекаются в одной точке, которая является центром описанной окружности треугольника. Поэтому из задачи 1.4 мгновенно следует доказательство гипотезы 1.2. Отсюда мы сразу получаем, что H_A лежит на окружности с диаметром $E_A M_A$ ($\angle E_A H_A M_A = 90^\circ$).

Теорема об описанной окружности гарантирует, что для трех точек на плоскости, не лежащих на одной прямой, существует единственная окружность, проходящая через эти точки. Уже для четырех произвольных точек это утверждение неверно. Поэтому результаты, описываемые нами в этой главе, удивительны — на одну окружность попадает много точек.

Перейдем теперь к точкам H_B и H_C .

Задача 1.5. Докажите, что $\angle E_A H_C M_A = \angle E_A H_B M_A = 90^\circ$ и, тем самым, гипотезу 1.3 (см. рис. 1.7).

1.2.2 Дельтоид и сумма углов треугольника

Теперь представим второй путь к доказательству гипотез 1.1, 1.2, 1.3. Каковы его преимущества и недостатки? С одной стороны, в рассуждениях ниже потребуется

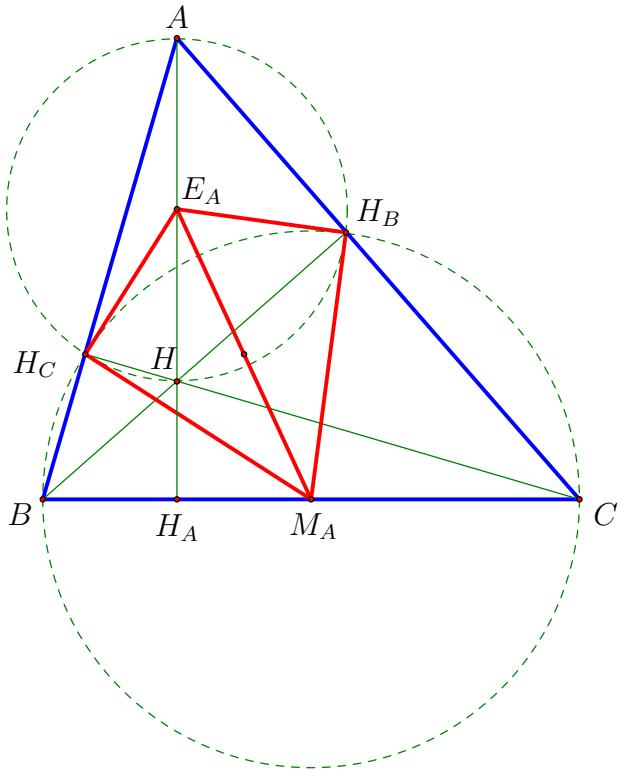


Рис. 1.7: Точки H_B, H_C на окружности с диаметром E_AM_A

проводить больше подсчетов, поэтому можно утверждать, что данный путь «менее геометричен», чем первый. С другой стороны, нам удастся избежать использования конструкции рисунка 1.6 и теоремы о пересечении серединных перпендикуляров (которая сама по себе требует не самых тривиальных рассуждений)⁴.

Начнем с точек E_A, H_B, M_A, H_C . Наша цель — доказать равенство

$$\angle E_A H_B M_A = \angle E_A H_C M_A = 90^\circ. \quad (1.1)$$

Начнем со следующего наблюдения

Задача 1.6. Докажите, что углы $\angle E_A H_B M_A$ и $\angle E_A H_C M_A$ равны.

Задача 1.7. Докажите, что $\angle E_A H_B M_A + \angle E_A H_C M_A = 180^\circ$ (см. рис. 1.8).

Из результатов двух предыдущих задач следует равенство (1.1) и справедливость гипотезы 1.1. Полученную окружность обозначим через Ω_ε .

Замечание. Обратим внимание на четырехугольник $E_A H_C M_A H_B$. Он доставляет пример *дельтоида* — четырехугольника с двумя парами смежных равных сторон. Полезно отметить и запомнить свойства дельтоида: его диагонали перпендикулярны, одна из них является биссектрисой двух его углов, вторая делится точкой пересечения диагоналей пополам.

Теперь перейдем к третьей высоте и ее основанию. Продлим отрезок AH до пересечения со стороной BC и покажем, что $\angle BA_1A = 90^\circ$ (см. рис. 1.9). Гипотеза 1.2, тем самым, будет доказана.

⁴Таким образом, можно утверждать, что теорема о пересечении высот в треугольнике и теорема об окружности Эйлера оказываются на порядок «ближе» к аксиомам. В данном случае достаточными оказываются признаки равенства треугольников и теорема о сумме углов треугольника.

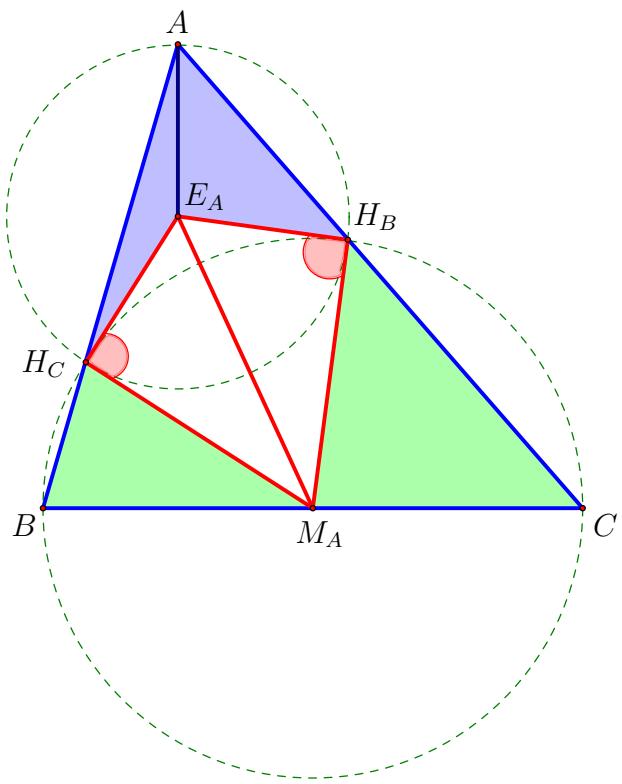


Рис. 1.8: Углы $\angle E_A H_B M_A$ и $\angle E_A H_C M_A$

Замечание. Равенство (1.1) влечет за собой удивительное наблюдение: стороны дельтоида являются касательными к окружностям κ^A и κ_A . (см. рис. 1.10)!

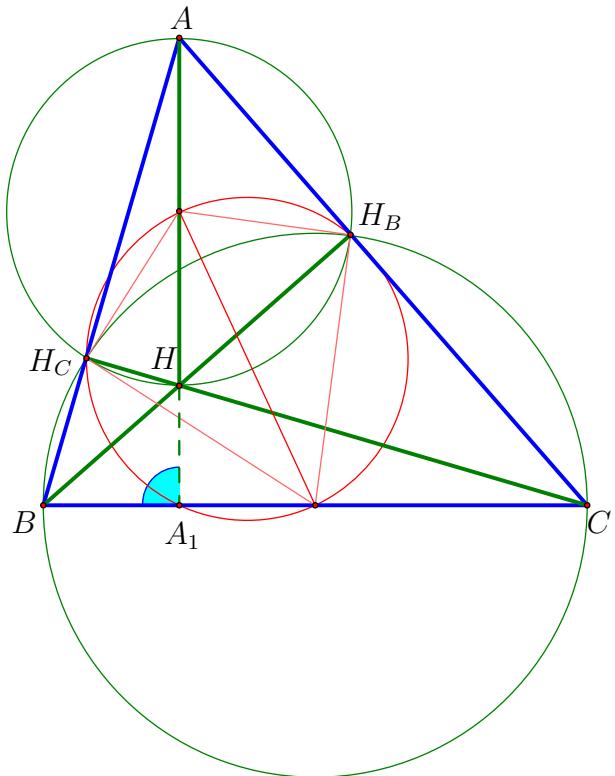


Рис. 1.9: Третья высота — это AA_1

Обращаясь к рисунку 1.9, совершенно непонятно, как вычислить $\angle BA_1A$, за какие факты цепляются? Кстати, для любого исследователя (не только математика, но и физика, химика, биолога, лингвиста, историка, экономиста, психолога, ...) это нормальная ситуация: Природа не высвечивает нужные нам факты! Мы видим картину во всей ее полноте, и, чтобы выяснить нужные детали, иногда приходится приложить немало усилий (например, построить большой адронный коллайдер — ускоритель элементарных частиц длиной порядка 30 километров⁵). К счастью, в работе математика потребность в технических устройствах ограничивается компьютером.

Посмотрим на рисунок 1.9 и попытаемся проанализировать, какие его элементы нам понадобятся, а какие нет⁶. Во-первых, нам не нужны две другие высоты (каким бы странным это ни казалось). Ведь мы хотим доказать утверждение о высотах, поэтому нам потребуются дополнительные соображения, к ним не относящиеся (иначе мы попадем в замкнутый логический круг). Во-вторых, мы можем смело избавиться от одной половины дельтоида, поскольку они идентичны. А вот прямой угол, смотрящий на диаметр окружности Ω_ε , нам необходим. Понятно, что именно его нужно как-то перебросить на $\angle BA_1A$. Получаем следующий рисунок.

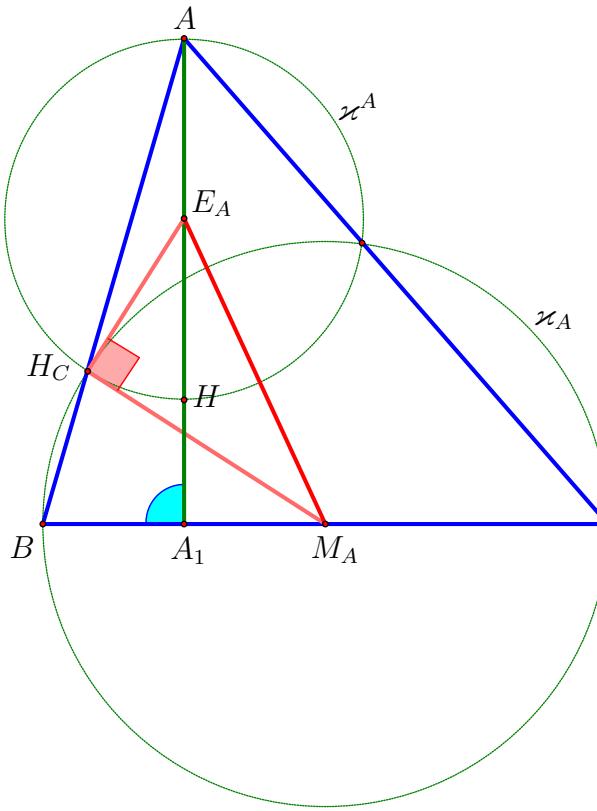


Рис. 1.10: $\angle BA_1A$

⁵Несколько деталей, чтобы вы могли представить техническое совершенство этого устройства. Для удержания и фокусировки протонных пучков используются 1624 сверхпроводящих магнита, общая длина которых превышает 22 километра, и работают они при температуре -271°C . Чтобы определять, какие частицы рождаются в процессе работы коллайдера, используются детекторы, имеющие длину около 40 метров, а высоту больше 20 метров (они размером с 9-этажный дом).

⁶Справедливо считается, что провести дополнительное построение в геометрии — дело не из простых. Однако стереть лишнее оказывается делом не меньшей сложности.

Задача 1.8. Докажите, что $\angle BA_1A = 90^\circ$ и, тем самым, что AA_1 — высота треугольника ABC .

Таким образом мы доказали, что три высоты пересекаются в одной точке. Откуда в том числе следует справедливость гипотезы 1.3.

1.3 Девять точек на одной окружности

На старте мы выбрали точки E_A и M_A как центры соответствующих окружностей (см. рис. 1.3). Эти точки вместе с основаниями высот попали на одну окружность Ω_ε . Но что можно сказать о точках E_B, E_C, M_B, M_C ? Чем они, как говорится, хуже? Посмотрим, например, на точку E_C .

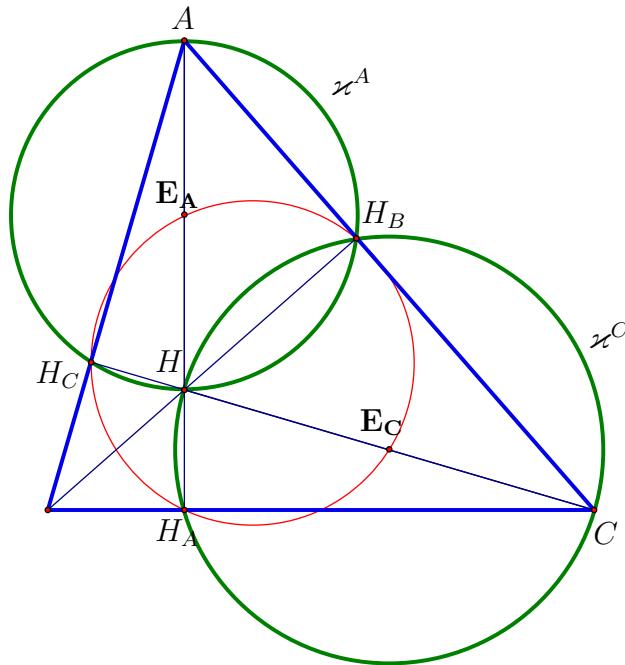


Рис. 1.11: Равноправие точек E_A и E_C

Точка E_C попадает на Ω_ε . Аналогичные наблюдения можно сделать относительно оставшихся точек. Поэтому мы можем сформулировать следующую гипотезу.

Гипотеза 1.4. Точки E_B, E_C, M_B, M_C лежат на окружности Ω_ε .

Как и в предыдущем разделе, продолжим двигаться двумя путями.

1.3.1 «Крутим» вершины

Окружность Ω_ε была изначально открыта нами, как окружность с диаметром $E_A M_A$. Эта конструкция несимметрична по отношению к вершинам треугольника. Однако разумно предположить, что в действительности результат не будет зависеть от выбора вершины треугольника, что демонстрирует рисунок 1.12.

Поэтому возникает

Задача 1.9. Докажите, что окружности с диаметрами $E_A M_A, E_B M_B$ и $E_C M_C$ совпадают.

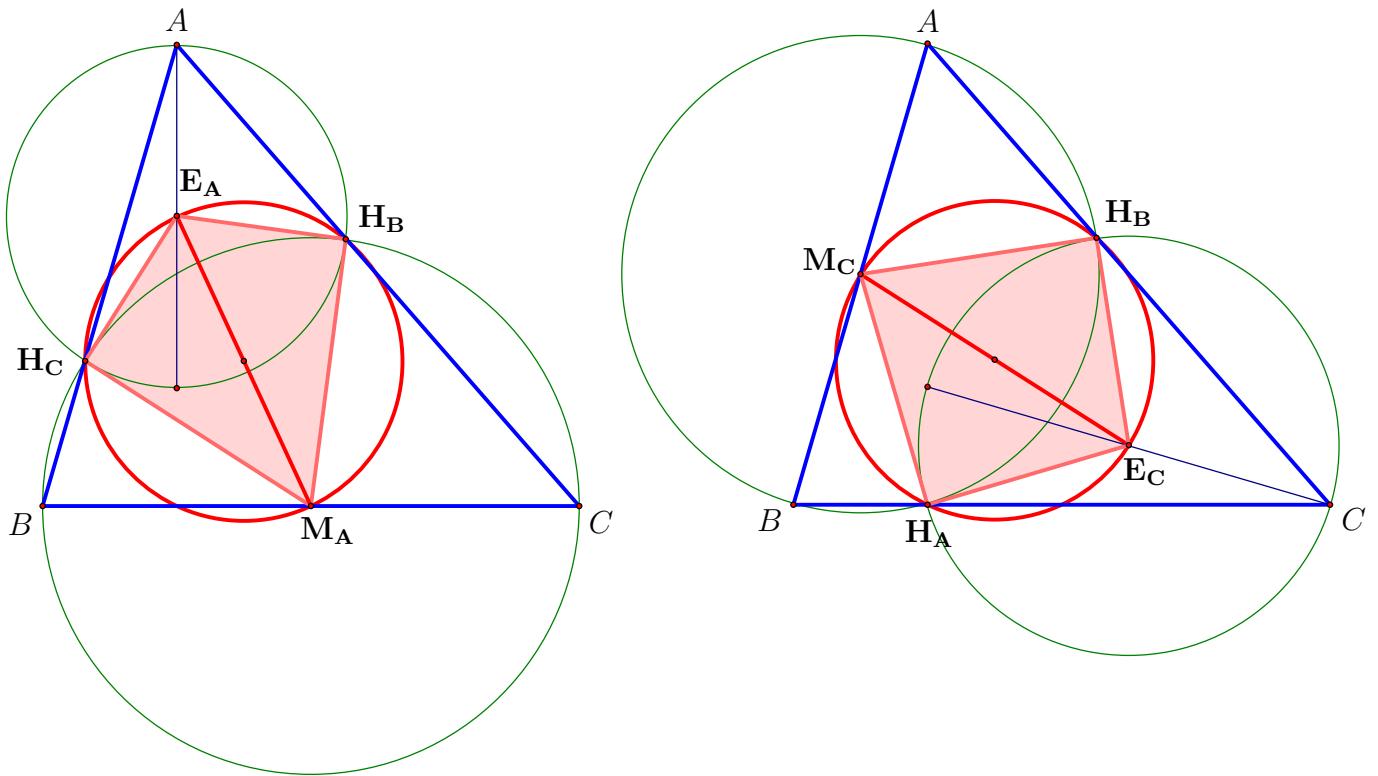


Рис. 1.12: Окружности с диаметром $E_A M_A$ и $E_C M_C$

Тем самым, гипотеза 1.4 доказана (см. рис. 1.18).

Второй путь окажется чуть длиннее, но взамен приведет нас к некоторым замечательным конструкциям. Кроме того, как и в предыдущем разделе, нам не понадобится теорема об описанной окружности.

1.3.2 Средние линии и прямые углы

Каким образом можно «посадить» оставшиеся точки на окружность? Искать прямые углы, смотрящие на диаметр $E_A M_A$! Начнем с точки E_C .

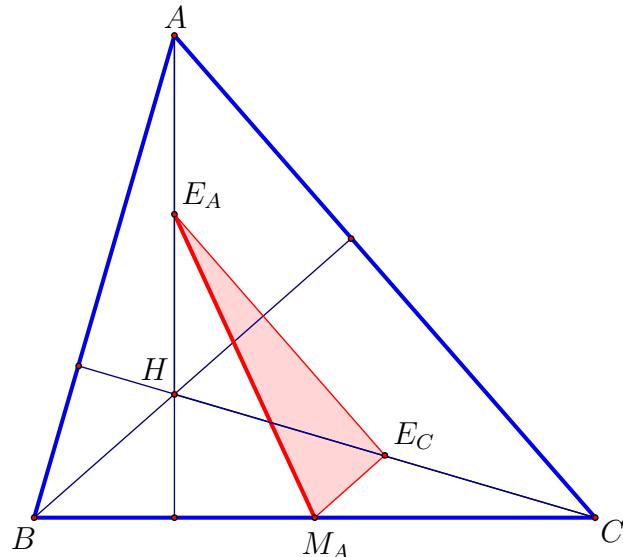


Рис. 1.13: $\angle E_A E_C M_A$

Как доказать, что угол $\angle E_A E_C M_A$ прямой? На этом рисунке много прямых углов: высоты перпендикулярны сторонам треугольника ABC . Попробуем перебросить один из этих углов на $\angle E_A E_C M_A$. Давайте задумаемся, какие у нас вообще есть способы это сделать? Во-первых, используя свойство равнобедренного треугольника, а именно равенство углов при основании. Во-вторых, с помощью параллельных прямых.

Задача 1.10. Докажите, что углы между попарно параллельными прямыми равны.

Можем ли мы заметить на рисунке 1.13 параллельные прямые? Да! Видно, что $E_A E_C \parallel AC$ и $M_A E_C \parallel BH$. Как связаны между собой эти точки? Заметим, что точки E_A , E_C и M_A — это середины отрезков AH , CH и BC соответственно. Отрезки, соединяющие середины сторон треугольника, называются *средними линиями*.

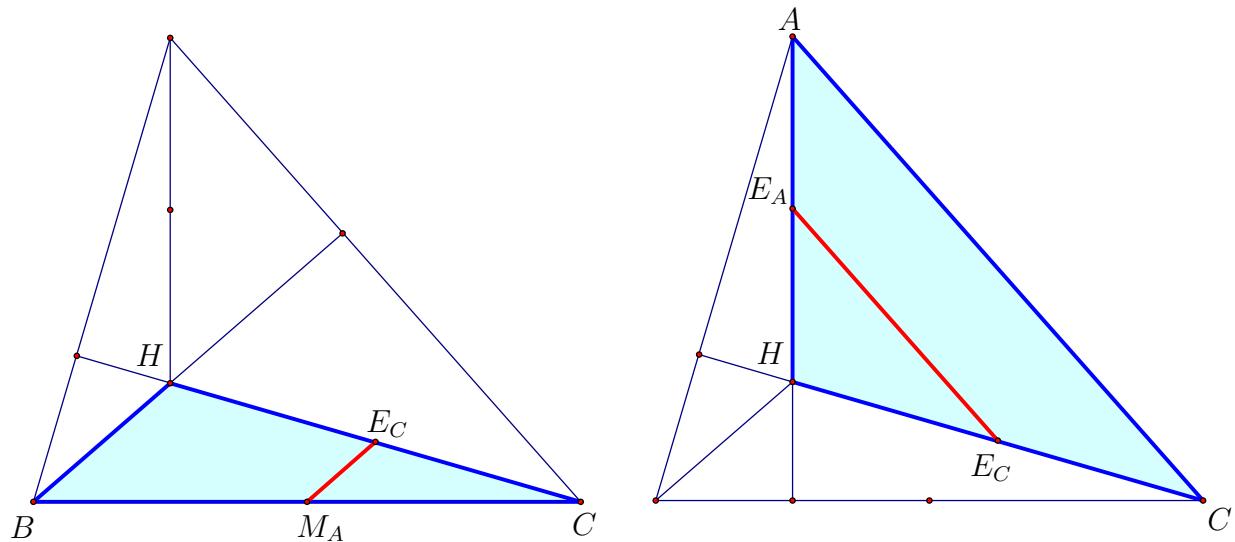


Рис. 1.14: Средняя линия в треугольниках BHC и ACH

Таким образом, наше наблюдение превращается в гипотезу.

Гипотеза 1.5. В треугольнике средняя линия параллельная основанию.

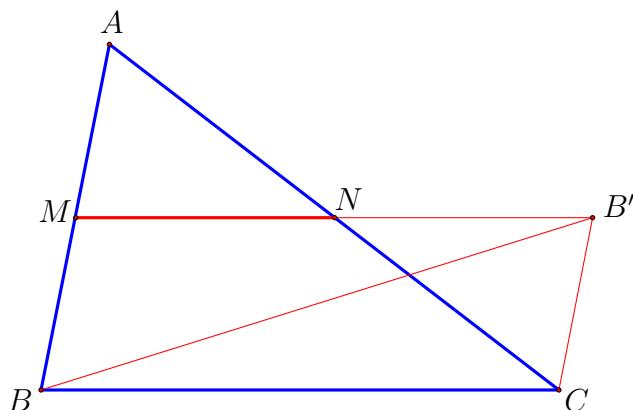


Рис. 1.15: Средняя линия в треугольнике

Задача 1.11. Докажите гипотезу 1.5, используя рисунок 1.15. Докажите, что средняя линия равна половине основания.

Задача 1.12. Докажите, что $\angle E_A E_C M_A = 90^\circ$ (см. рис. 1.16).

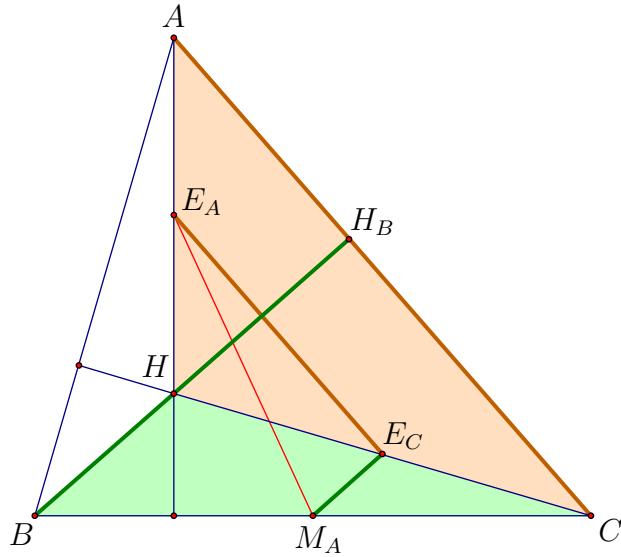


Рис. 1.16: $\angle E_A E_C M_A$ и средний линии

Абсолютно аналогично доказывается, что угол $\angle E_A E_B M_A$ прямой. Так мы заключаем, что точки E_B и E_C лежат на окружности Ω_ε .

От доказательства гипотезы 1.4 нас отделяет всего один шаг: осталось разобраться с точками M_B и M_C . Эти точки являются серединами сторон AC и AB треугольника ABC , поэтому есть все основания надеяться, что рассуждения со средними линиями помогут и здесь. Посмотрим, например, на точку M_B .

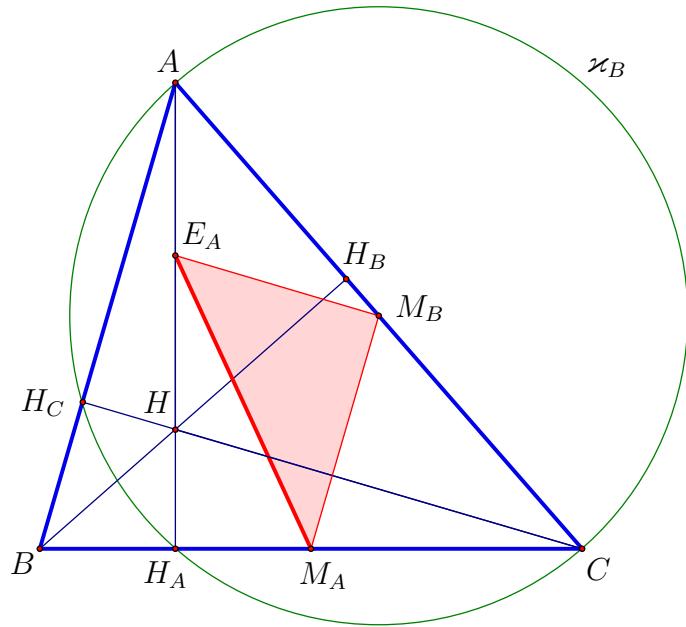


Рис. 1.17: Точка M_B — середина AC и центр окружности

Задача 1.13. Докажите, что $\angle E_A M_B M_A = 90^\circ$ (см. рис. 1.17) и, тем самым, что точка M_B лежит на окружности Ω_ε .

Абсолютно аналогично доказывается, что угол $\angle E_A M_C M_A$ прямой и что M_C лежит на окружности Ω_ϵ . Гипотеза 1.4 доказана! Окружность Ω_ϵ называется *окружностью Эйлера*⁷ или окружностью девяти точек (см. рис. 1.18).

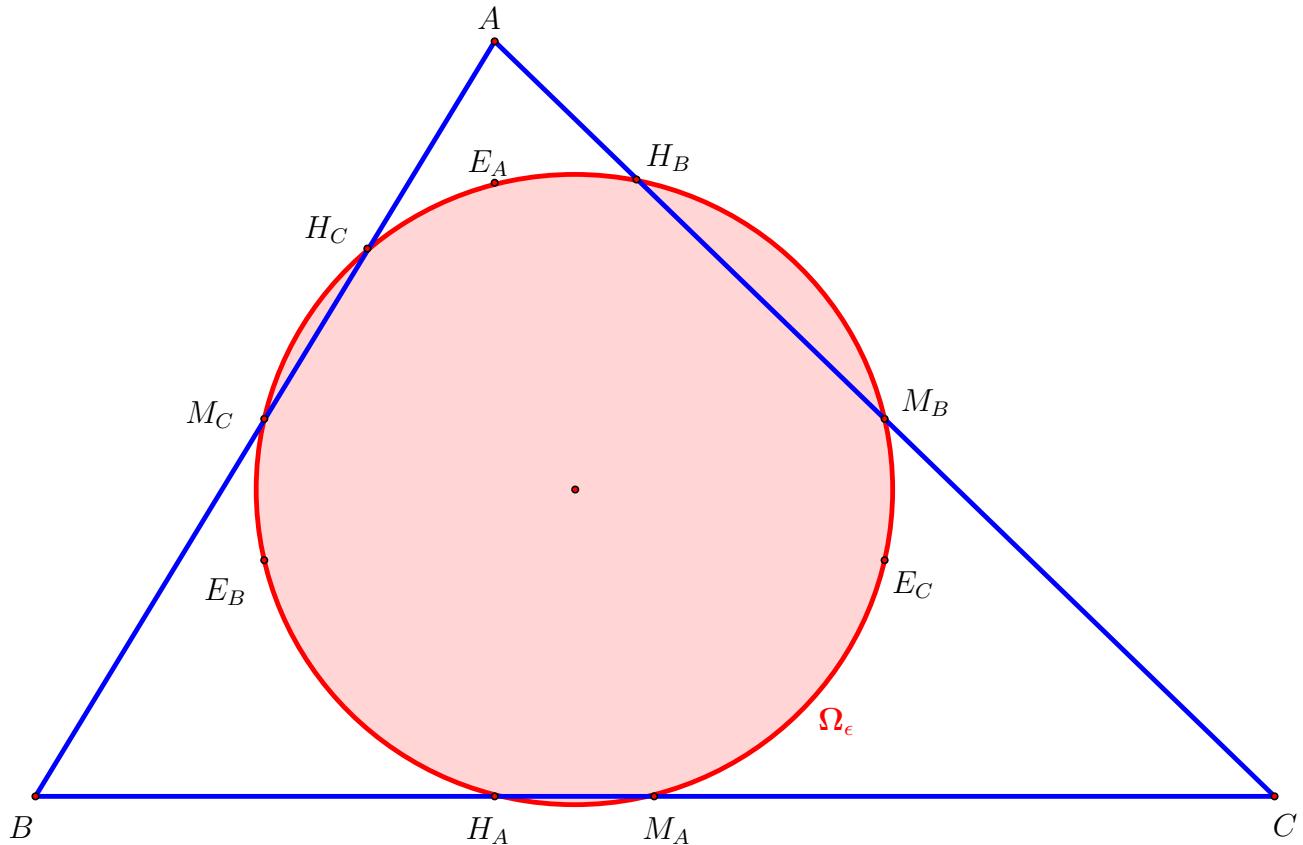


Рис. 1.18: Окружность девяти точек

⁷По всей видимости, Эйлер не имел отношения к открытию этого замечательного факта. В истории науки существует огромное количество открытий, которые названы не в честь своих первооткрывателей: теорема Пифагора была известна задолго до него в Древнем Вавилоне, ряды Тейлора изобрел Ньютон, дзета-функцию Римана открыл Эйлер, даже Америка не называется Колумбией.

Возвращаясь к окружности Эйлера, скажем, что она появилась независимо в серии работ. Отметим следующих авторов: Benjamin Bevan (1804), Charles Brianchon and Jean-Victor Poncelet (1821), Karl Feuerbach (1822) и Olry Terquem (1842). Заинтересованный читатель может отыскать подробности в статье «History of the nine-point circle» (автор J.S. MacKay).

1.4 Некоторые замечания и наблюдения

1.4.1 Прямоугольники Эйлера

Сканируем результаты задач предыдущего раздела. А именно, будем рассматривать прямые углы не по одному, а парами. Тогда можно заметить, что с окружностью девяти точек связаны замечательные прямоугольники.

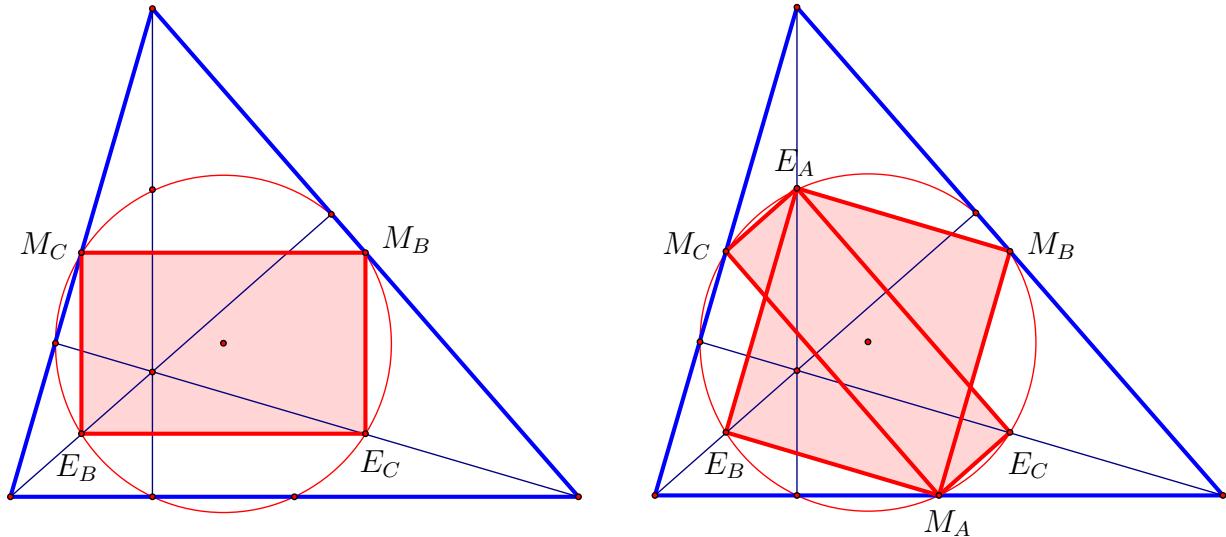


Рис. 1.19: Прямоугольники Эйлера

1.4.2 Острый и тупой углы

На всех картинках выше были изображены остроугольные треугольники, но все утверждения формулировались таким образом, будто они верны для произвольного (в том числе тупоугольного треугольника). Нет ли тут обмана? Выдержат ли наши конструкции тупой угол? Вполне. Все остается по-прежнему, только теперь основания высот лежат не на сторонах, а на их продолжениях (см. рис. 1.20).

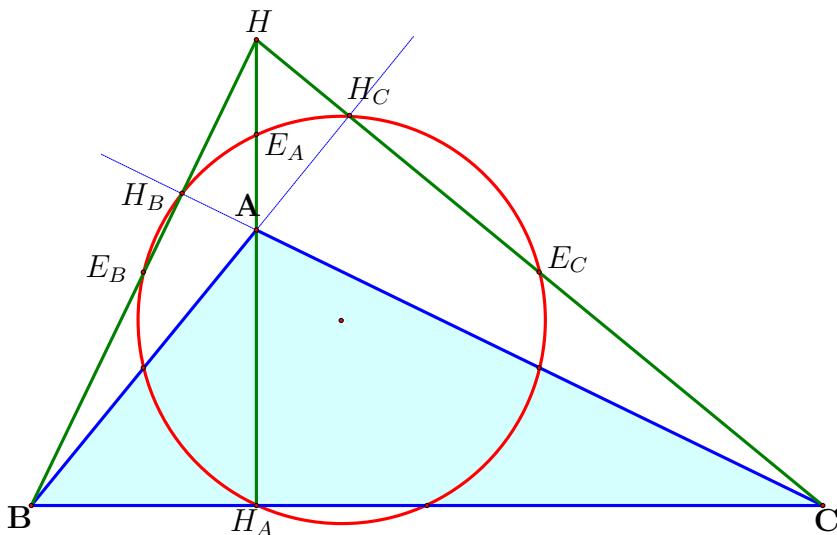


Рис. 1.20: Окружность Эйлера тупоугольного треугольника

Посмотрим на две картинки ниже (рис. 1.21). И справа, и слева нарисованы окружности Эйлера треугольника ABC . Только треугольники разные: тупоугольный ABC слева и остроугольный ABC справа. Треугольники разные, а окружность Эйлера одна и та же! Можно считать, что точки A и H поменялись местами, но окружность Эйлера при этом обмене осталась на прежнем месте.

Задача 1.14. Докажите, что окружности Эйлера треугольников BAC и BHC совпадают⁸.

Доказанный результат также означает, что эта же окружность является окружностью Эйлера и треугольника AHC , и треугольника AHB . На рисунке 1.22 изображена окружность Эйлера сразу четырех треугольников!

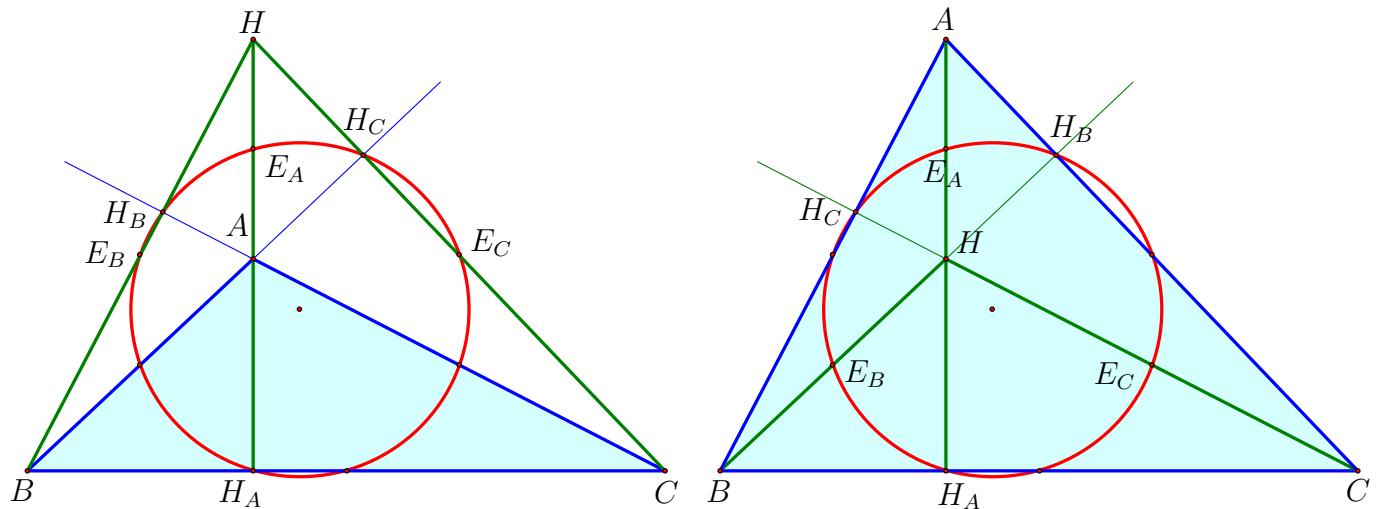


Рис. 1.21: Меняем местами A и H

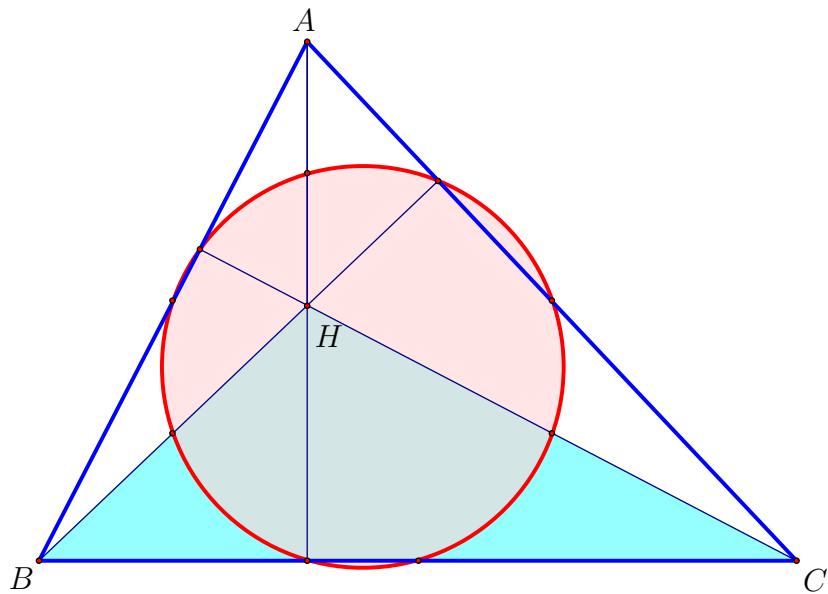


Рис. 1.22: Окружность Эйлера: BAC и BHC

⁸По всей видимости, это утверждение было впервые доказано в 1861 году Уильямом Гамильтоном (1805–1865) — одним из ярчайших математиков XIX столетия. Ему также принадлежат основополагающие работы в области физики и механики.

1.4.3 Серединные треугольники

Обратим внимание на треугольники $E_A E_B E_C$ и $M_A M_B M_C$. Мы назвали их серединными, поскольку их вершины являются серединами соответствующих отрезков. Заметим, что окружность Эйлера треугольника ABC является описанной окружностью серединных треугольников.

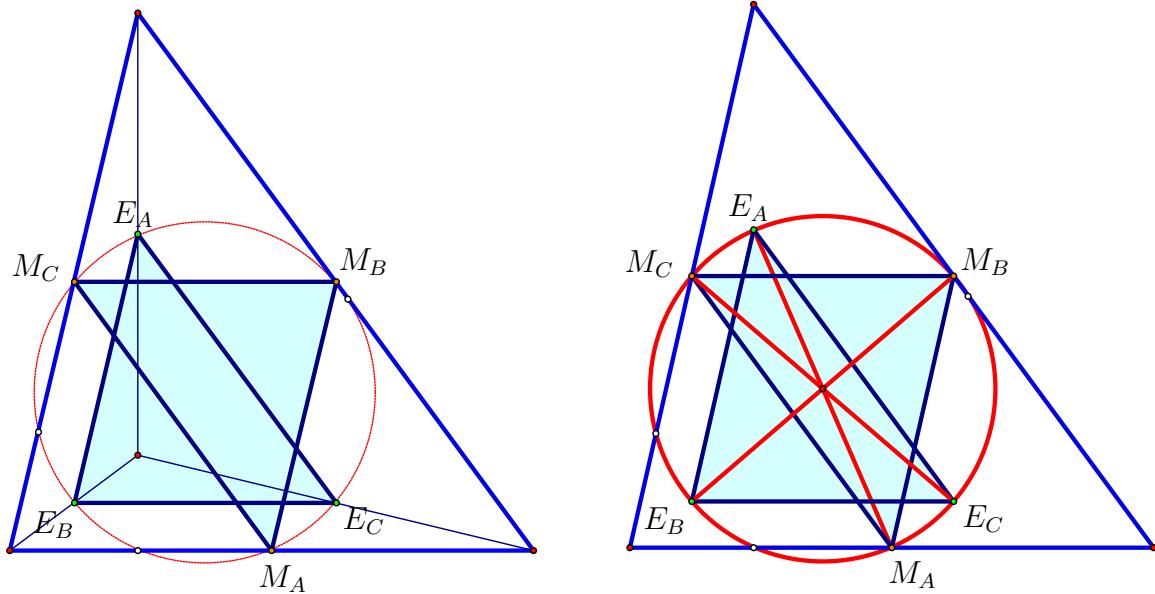


Рис. 1.23: Окружность Эйлера: $E_A E_B E_C$ и $M_A M_B M_C$

Задача 1.15. Докажите, что у треугольников $E_A E_B E_C$ и $M_A M_B M_C$ соответствующие стороны параллельны.

Задача 1.16. Докажите, что треугольники $E_A E_B E_C$ и $M_A M_B M_C$ равны.

Задача 1.17. Докажите, что отрезки $E_A M_A$, $E_B M_B$ и $E_C M_C$ равны и пересекаются в одной точке. Как эта точка связана с окружностью Эйлера треугольника ABC ?⁹

⁹Наблюдения, доказанные в этих задачах, позволяют утверждать, что треугольники $E_A E_B E_C$ и $M_A M_B M_C$ центрально-симметричны.

Глава 2

Биссектрисы и точки W

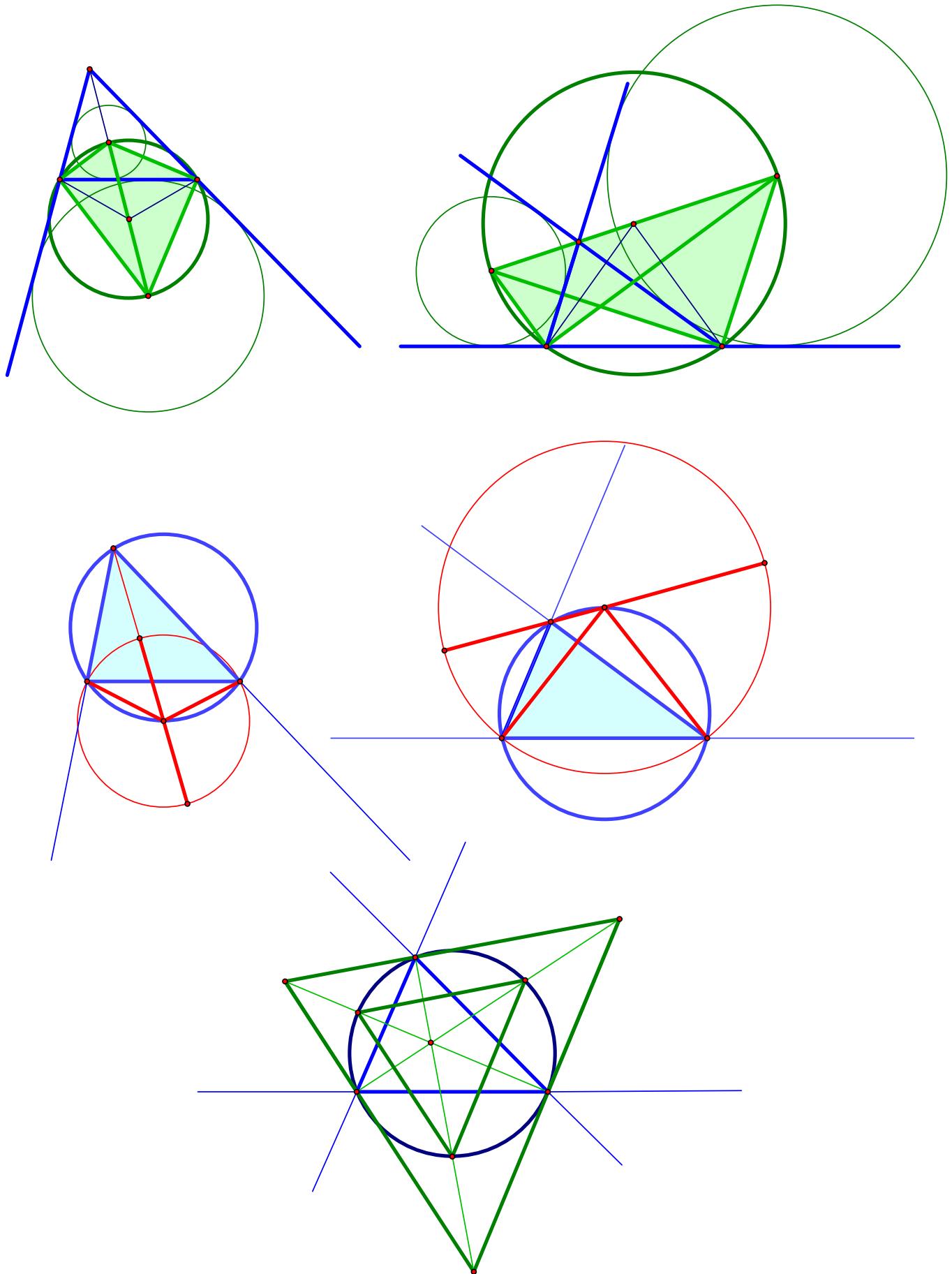
Данный сюжет будет с одной стороны естественным продолжением предыдущего, а с другой — раскроет далеко не очевидные связи между высотами и биссектрисами в треугольнике. Конструкции, рассматриваемые в этой главе, будут регулярно встречаться в процессе наших дальнейших исследований.

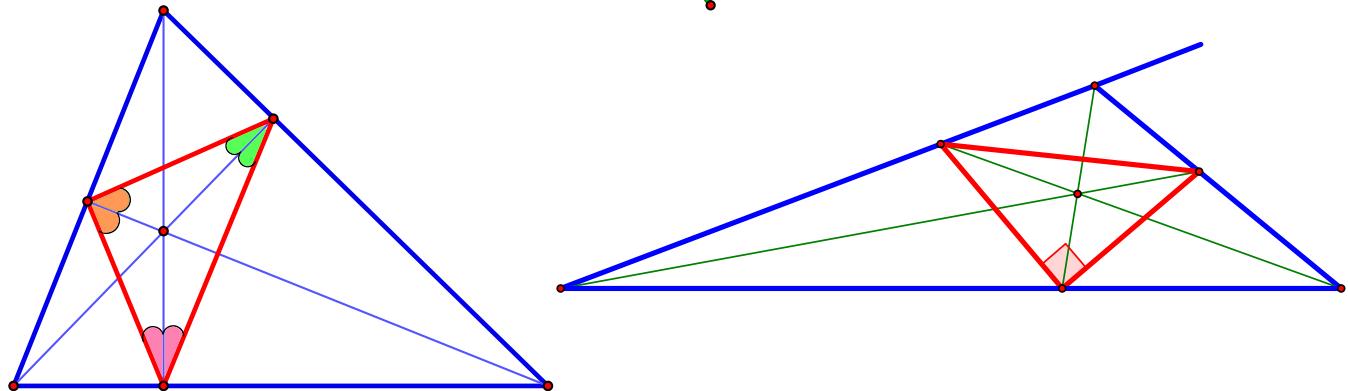
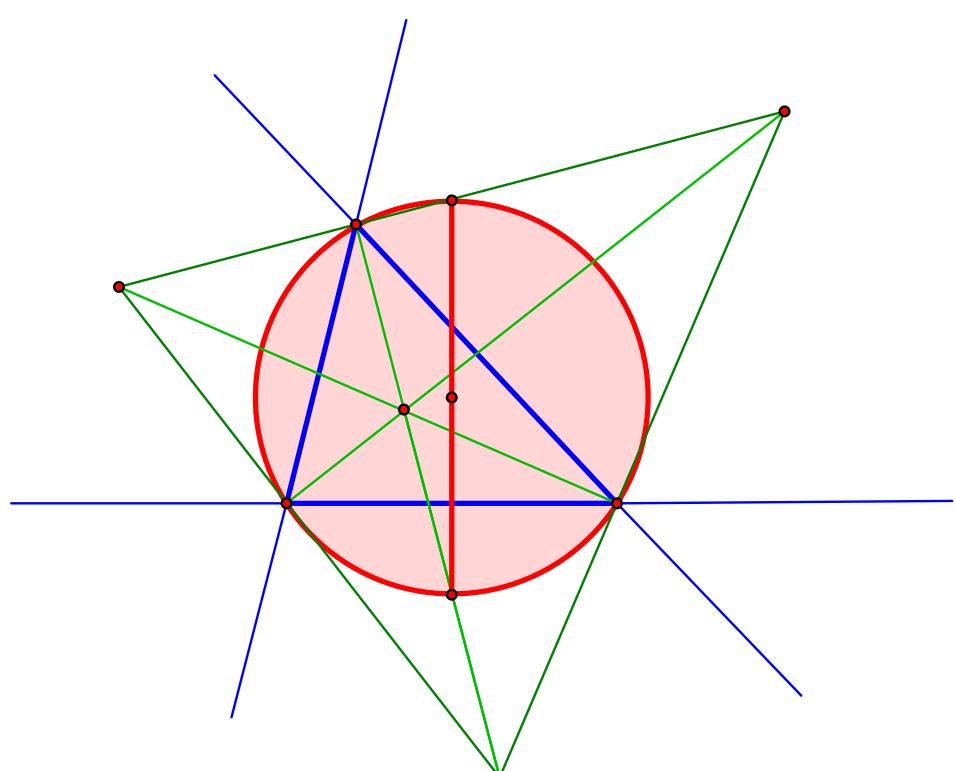
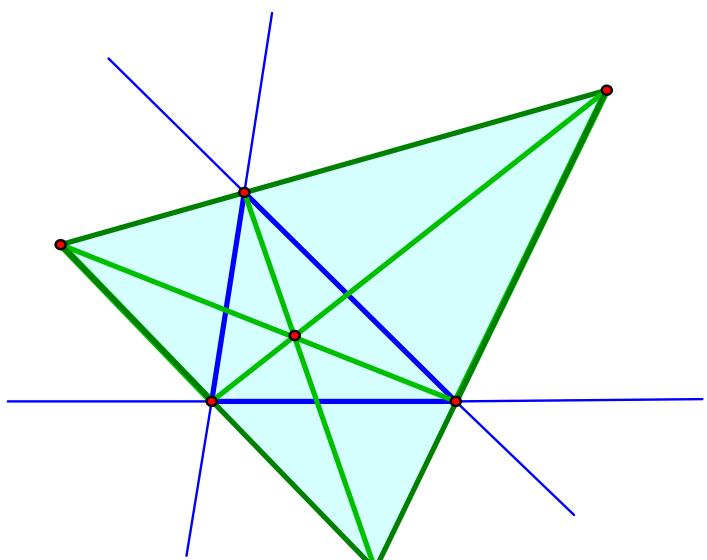
Для освоения материала этой главы достаточно знания первых пяти параграфов учебника Погорелова, включая

- геометрические места точек;
- теоремы об описанной, вписанной и вневписанных окружностях треугольника.

В главе 1 ведущую роль играли высоты треугольника. Более того, поскольку нам также встретились середины сторон, можно ожидать, что серединные перпендикуляры и медианы тоже будут как-то участвовать в наших конструкциях из главы 1. Эти ожидания вполне оправданы — в главе 4 мы увидим почему. Но среди всех этих замечательных объектов, связанных с треугольником, нам не встретились биссектрисы. И совершенно не видно, как они могут появиться!

С чем связано это обстоятельство? Если вы посмотрите школьные учебники, то обнаружите, что биссектрисы треугольника двойственны серединным перпендикулярам. В самом деле, вспомним, например, геометрические места точек «серединный перпендикуляр к отрезку» и «биссектриса угла», или теоремы об описанной окружности треугольника и вписанной окружности... Но все же биссектрисы среди конструкций, связанных с окружностью Эйлера, не видно. Однако не будем торопиться ...





2.1 Биссектрисы и высоты

Рассмотрим треугольник ABC и отметим для него центр I вписанной окружности и центры I_A, I_B, I_C вневписанных окружностей. Напомним, что эти точки лежат на пересечении соответствующих биссектрис внутренних и внешних углов треугольника ABC .

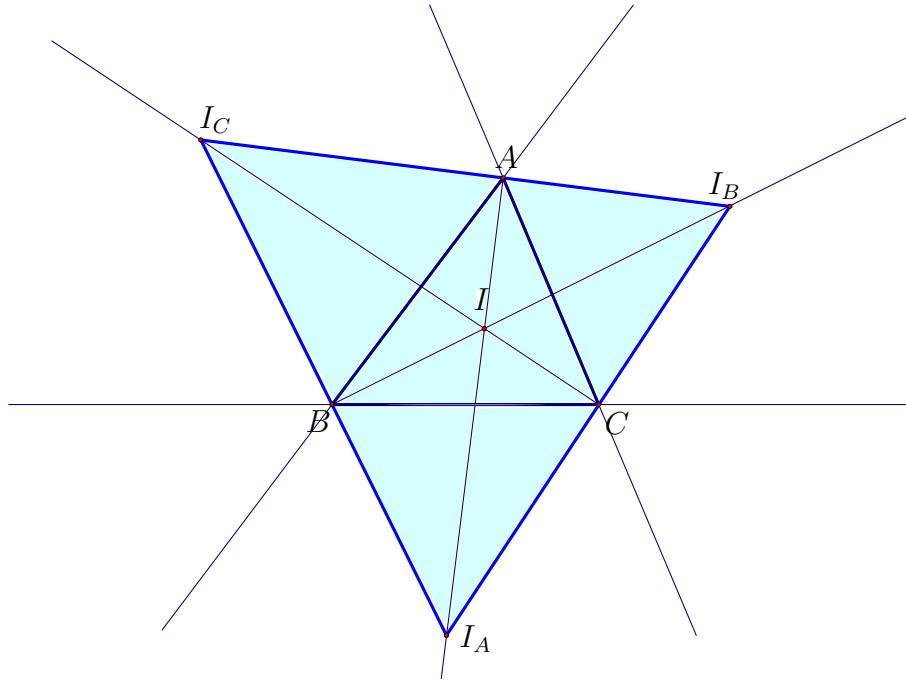


Рис. 2.1: $\triangle IAI_BI_C$

Что можно заметить на рисунке 2.1? Как связаны треугольники ABC и IAI_BI_C ?

Гипотеза 2.1.

- a) Вершины A, B, C исходного треугольника лежат на сторонах треугольника IAI_BI_C .*
- б) Биссектрисы треугольника ABC являются высотами треугольника IAI_BI_C .*

Задача 2.1. Докажите гипотезу 2.1.

Замечание. Таким образом, мы можем сделать вывод, что точка пересечения биссектрис треугольника ABC является ортоцентром треугольника IAI_BI_C !

Предыдущая глава научила нас искать окружность там, где есть прямые углы. Что ж, только что мы отыскали целых три прямых угла (заметьте, на рисунке с биссектрисами!).

Задача 2.2. Докажите, что каждая из четверок точек (I_A, I, B, C) и (I_B, I_C, B, C) лежит на окружности (см. рис. 2.2).

Центры этих окружностей обозначаются через W_A и W^A соответственно. Они являются серединами отрезков I_AI и I_BI_C . Что мы можем сказать об этих точках? Как они связаны с остальными точками?

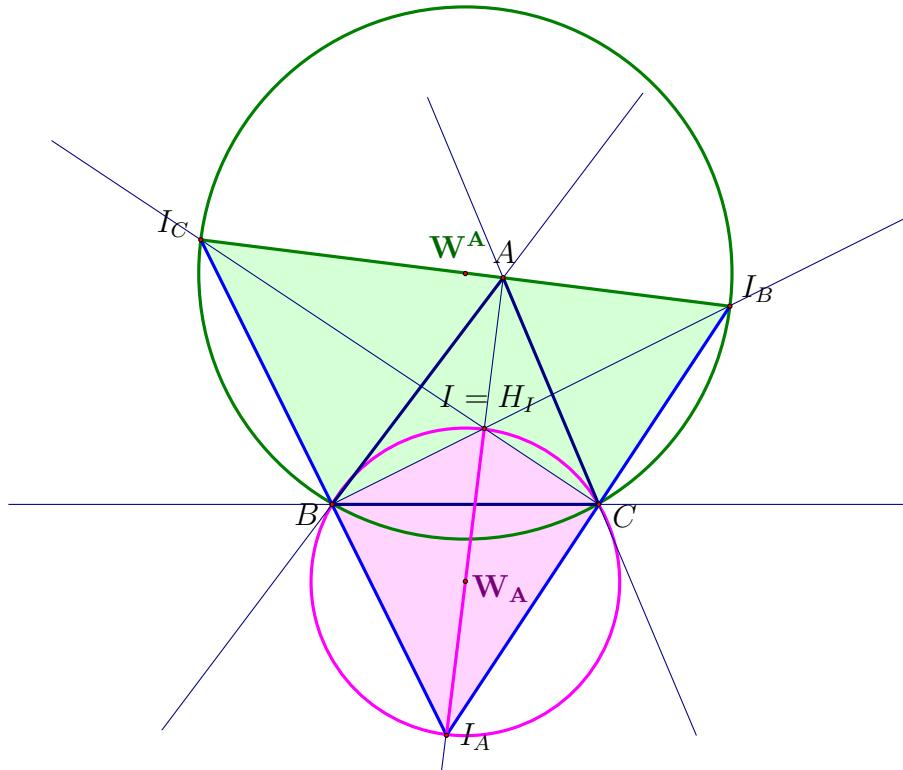


Рис. 2.2: $\triangle I_A I_B I_C$: четверки точек на окружности

2.2 Точки W_A и W^A

Отвечая на этот вопрос, нельзя не заметить, что данная цепочка фактов очень похожа на ту, которую мы построили в начале предыдущей главы. Разумеется, такая похожесть не может не иметь определенной причины! Аналогии в науке играют очень важную роль. Наблюдение и анализ аналогий часто приводили к значительным открытиям¹. Вообще, если вы сталкиваетесь с похожестями и аналогиями, стоит попытаться отыскать, в чем кроется породившая их причина (она, как правило, есть, даже если и отыскать ее очень трудно).

Если вы, дорогой читатель, уже увидели причину аналогии между картинками из этой и предыдущей глав, то честь вам и хвала! В таком случае для вас следующее наблюдение не покажется удивительным. А читателя, который еще теряется в догадках, мы рассчитываем удивить.

Наблюдение показывает, что должна быть верна следующая гипотеза.

¹Когда вы едете в лифте, который ускоряется, ваш вес меняется. Ощущения такие, будто гравитационные силы изменили свою величину (а если вы окажетесь в лифте, который свободно падает, вы сами окажетесь в состоянии невесомости: силы инерции полностью скомпенсируют гравитационные силы). И что можно вывести из такого наблюдения?! Альберт Эйнштейн обобщил его в виде принципа эквивалентности, который в конечном счете привел к пониманию того, что гравитационные эффекты обусловлены искривлением пространства-времени, что заложило основы общей теории относительности.

В 1973 году Яков Бекенштейн обратил внимание на аналогию между законами термодинамики и поведением некоторых характеристик черных дыр. В результате усилиями Бекенштейна, Хокинга, Зельдовича и Старобинского была сформулирована теория излучения черных дыр, которая явилась первым открытием, объединяющим общую теорию относительности и квантовую механику. Этот результат стал первым продвижением на еще далеко не оконченном пути создания квантовой гравитации — теории, которая смогла бы объяснить самые фундаментальные законы природы.

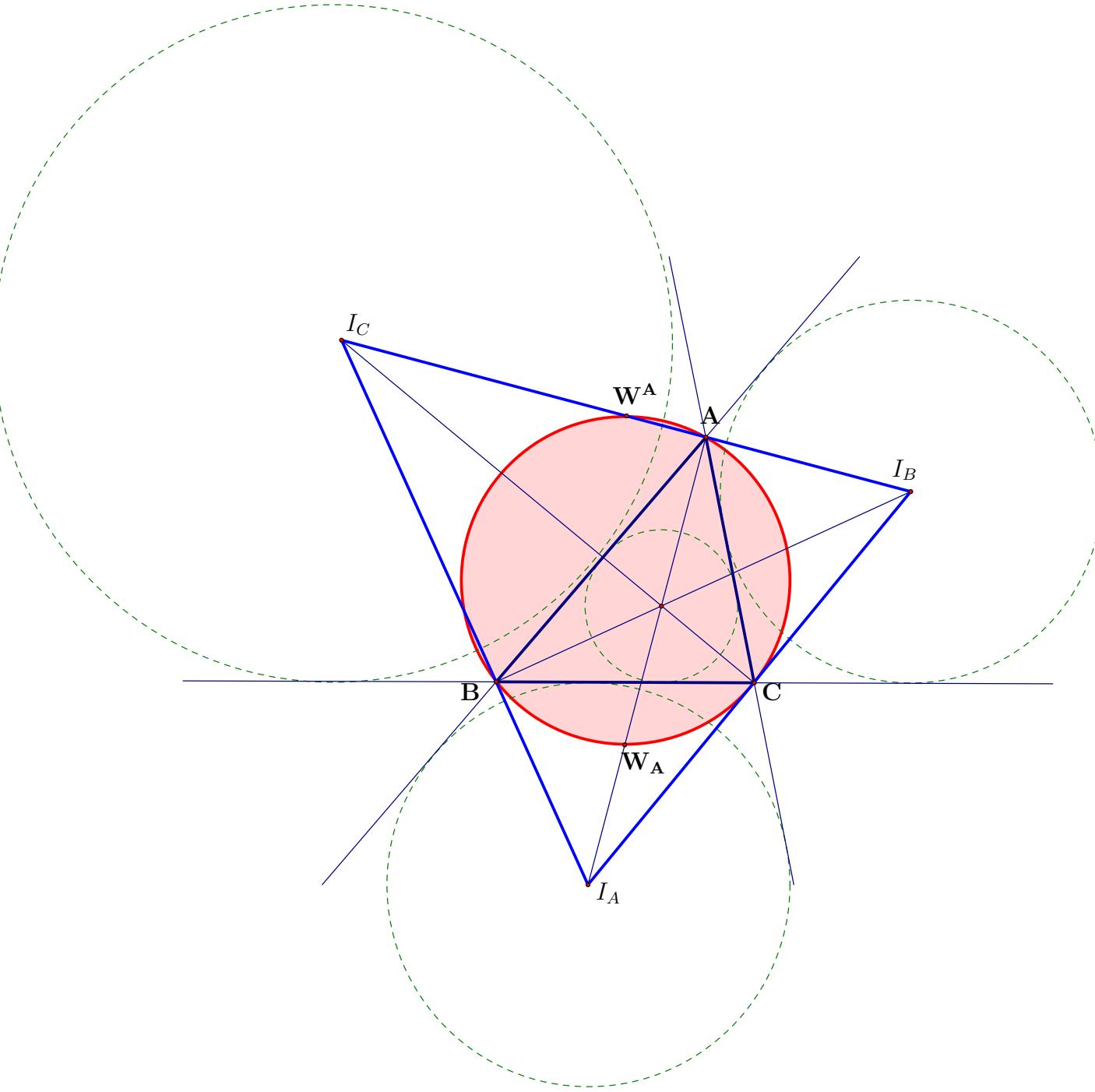


Рис. 2.3: Точки W на описанной окружности

Гипотеза 2.2. Точки W_A и W^A лежат на описанной окружности треугольника ABC .

Задача 2.3. Докажите гипотезу 2.2.

Четверку равных отрезков $W_AB = W_AC = W_AI = W_AI_A$ называют *первой лапкой*, а четверку равных отрезков $W^AB = W^AC = W^AI_B = W^AI_C$ – *второй лапкой* (см. рис. 2.4).

На самом деле связь точек W_A и W^A с описанной окружностью оказывается еще более регулярной.

Задача 2.4. Докажите, что $W_A W^A$ является диаметром описанной окружности треугольника ABC .

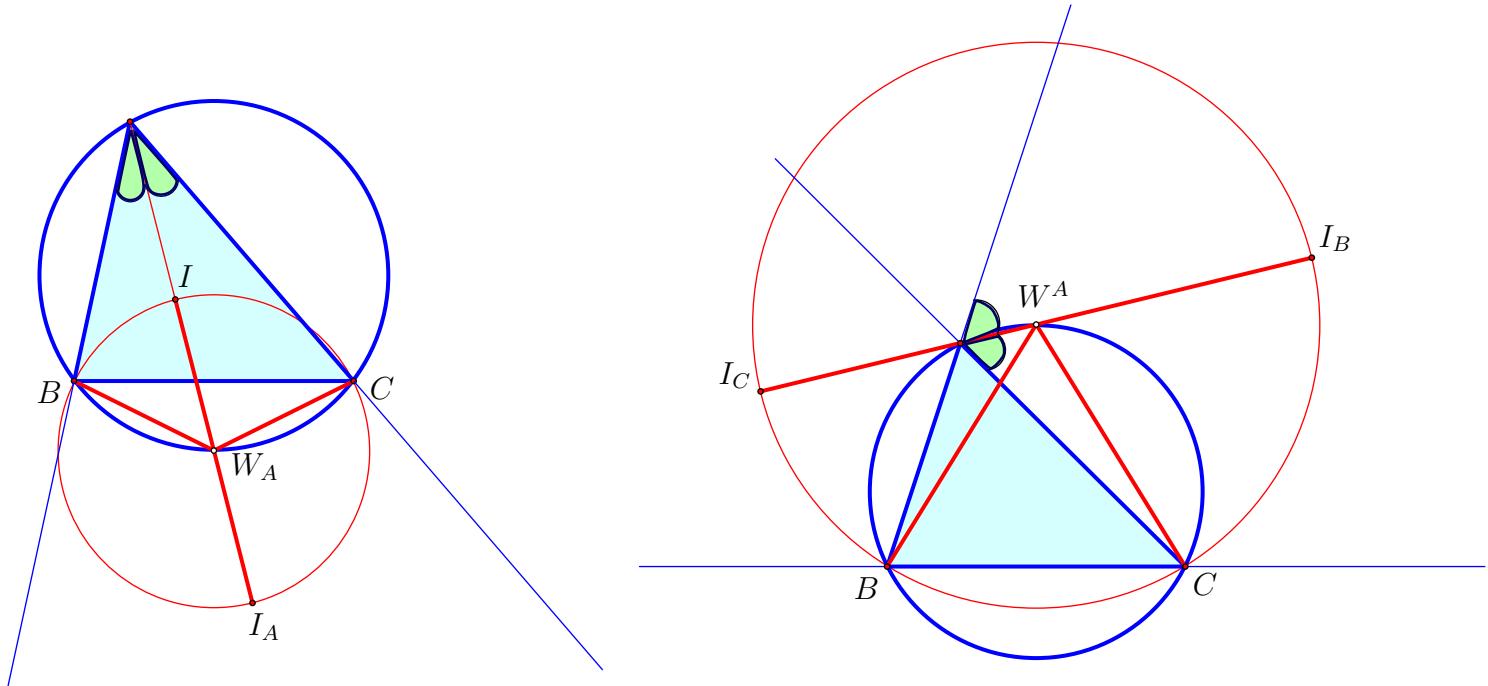


Рис. 2.4: Первая и вторая «лапки»

Задача 2.5. Докажите, что прямая $W_A W^A$ является серединным перпендикуляром к отрезку BC .

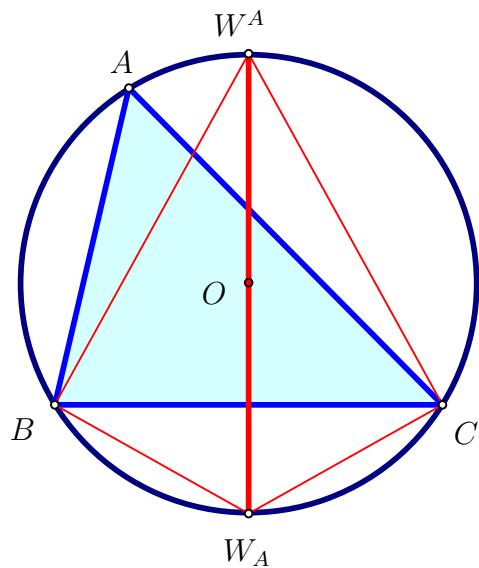


Рис. 2.5: Серединный перпендикуляр $W_A W^A$

Таким образом мы заключаем, что точки W_A и W^A лежат на пересечении описанной окружности треугольника ABC и серединного перпендикуляра к отрезку BC . Подводя промежуточный итог, представляем ниже три эквивалентных определения точек W .

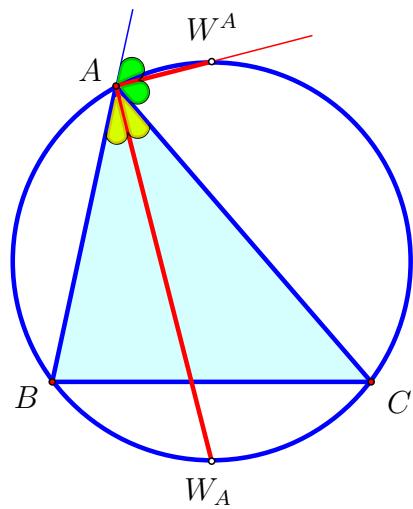


Рис. 2.6: Точки W как пересечения биссектрис с описанной окружностью

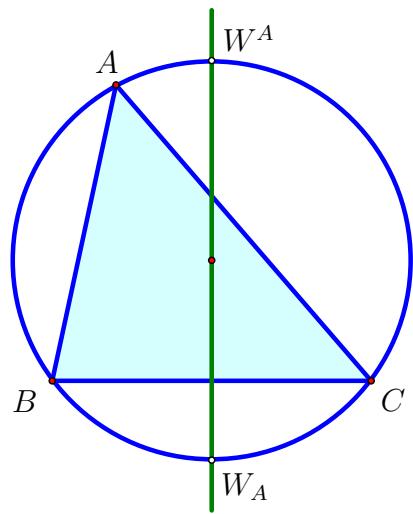


Рис. 2.7: Точки W как пересечения серединного перпендикуляра с описанной окружностью

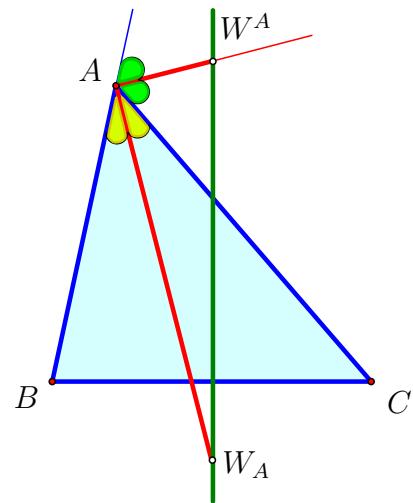


Рис. 2.8: Точки W как пересечения биссектрис с серединным перпендикуляром

Прежде чем двигаться дальше, отметим важные соотношения между углами, которые возникли у нас при исследовании треугольника $I_A I_B I_C$.

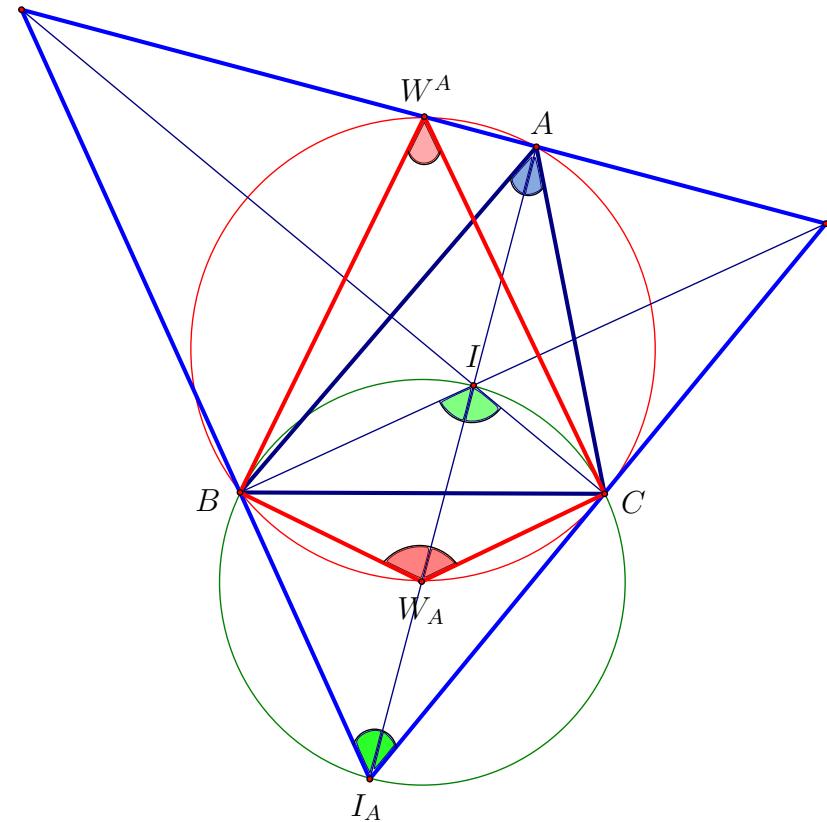


Рис. 2.9: Треугольники ABC и $I_A I_B I_C$: пять углов

Задача 2.6. Пусть $\angle BAC = \alpha$. Вычислите углы $\angle BIC, \angle BI_A C, \angle BW_A C, \angle BW^A C$.

2.3 Высоты и биссектрисы

В предыдущих разделах мы обозначили связь между биссектрисами и высотами. А именно, оказалось, что биссектрисы треугольника ABC являются не чем иным, как высотами треугольника $I_AI_BI_C$.

Если обратиться к высотам треугольника ABC , то можно ли утверждать, что они окажутся биссектрисами некоторого треугольника? Такие ожидания вполне оправданы, ведь если обозначенная нами связь о двойственности биссектрис и высот верна, то она должна работать в обе стороны. Для удобства будем считать, что треугольник ABC – остроугольный.

Какой треугольник будет естественным претендентом на то, чтобы высоты треугольника ABC оказались его биссектрисами? Обращаясь к картинкам выше, ясно, что он должен быть как-то связан с высотами треугольника ABC (как треугольник $I_A I_B I_C$ напрямую связан с биссектрисами треугольника ABC).

Гипотеза 2.3. Высоты треугольника ABC являются биссектрисами треугольника $H_AH_BH_C$.

Как подобраться к доказательству этой гипотезы? Можно попробовать доказать это с помощью прямых вычислений. Но даже если это и удастся, причина

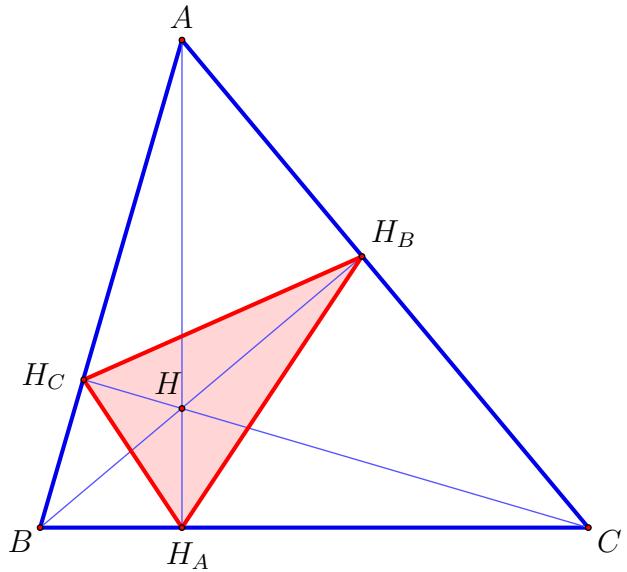


Рис. 2.10: Высоты – биссектрисы ортотреугольника?

явления останется непонятой, поэтому попытаемся найти геометрическое доказательство.

В предыдущем разделе мы провели достаточно серьезное исследование биссектрис произвольного треугольника. В частности, мы обнаружили связь между биссектрисами и описанной окружностью. Посмотрим на описанную окружность треугольника $H_AH_BH_C$.

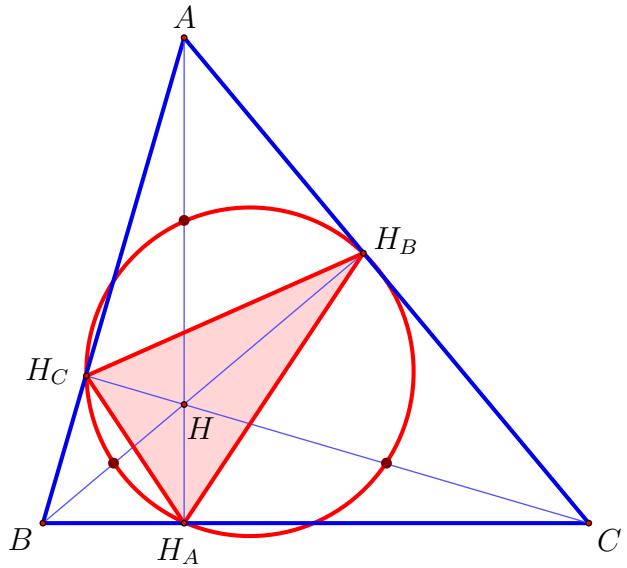


Рис. 2.11: Описанная окружность треугольника $H_AH_BH_C$

Это же окружность девяти точек треугольника ABC ! Мы знаем, что она вторично пересекает высоты треугольника ABC в точках E_A, E_B, E_C .

Задача 2.7. Какими точками будут E_A, E_B, E_C для треугольника $H_AH_BH_C$? Какими точками будут M_A, M_B, M_C для треугольника $H_AH_BH_C$?

Задача 2.8. Докажите гипотезу 2.3.

Таким образом, ортотреугольник обладает следующим замечательным свойством: отрезки, соединяющие его вершины с вершинами исходного треугольника, являются биссектрисами.

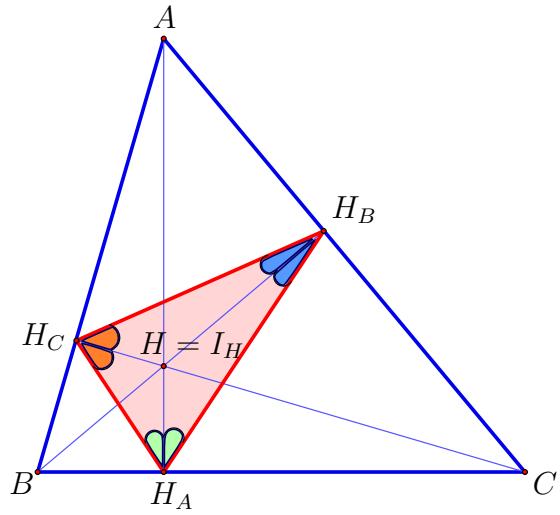


Рис. 2.12: Высоты – биссектрисы ортотреугольника.

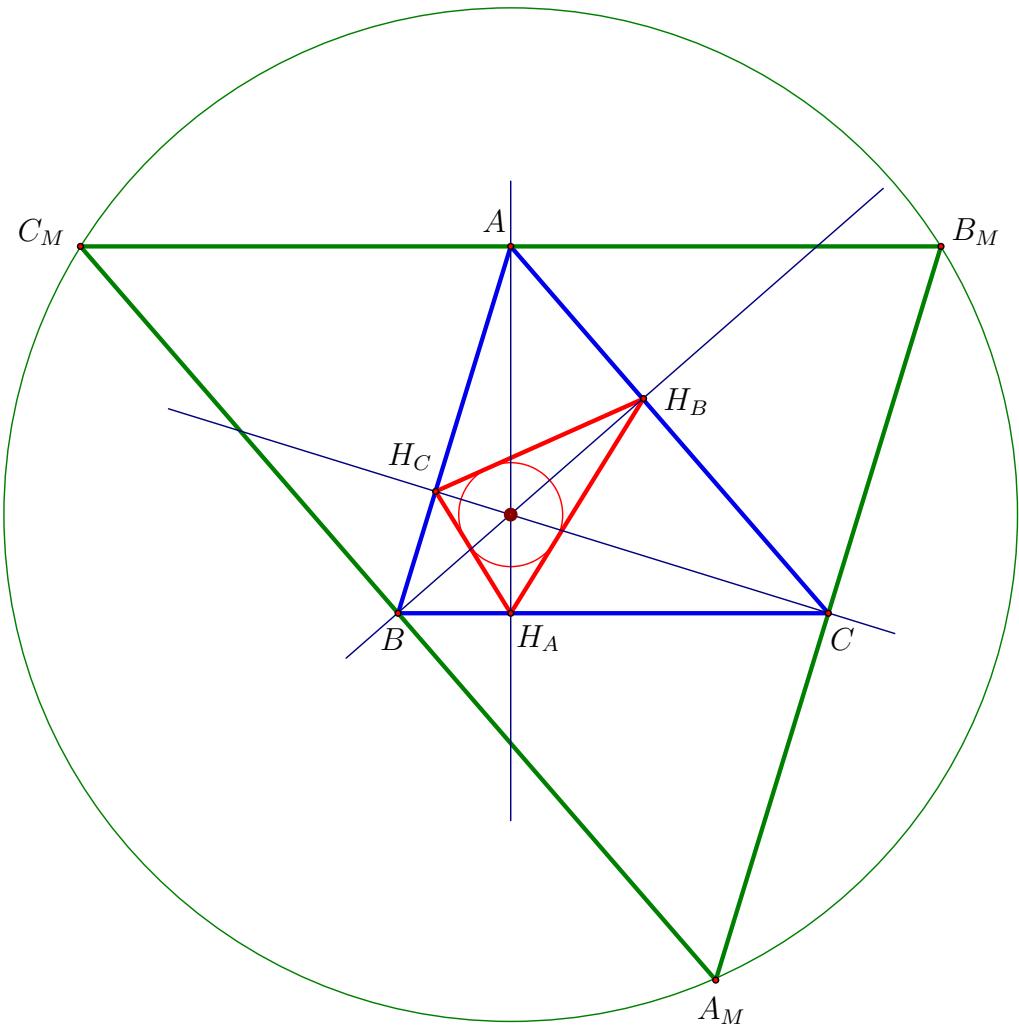


Рис. 2.13: Точка H как центр описанной ($\triangle A_M B_M C_M$) и вписанной ($\triangle H_A H_B H_C$) окружностей.

Из равенства отмеченных выше углов сразу же следует равенство углов между сторонами ортотреугольника и исходного треугольника.

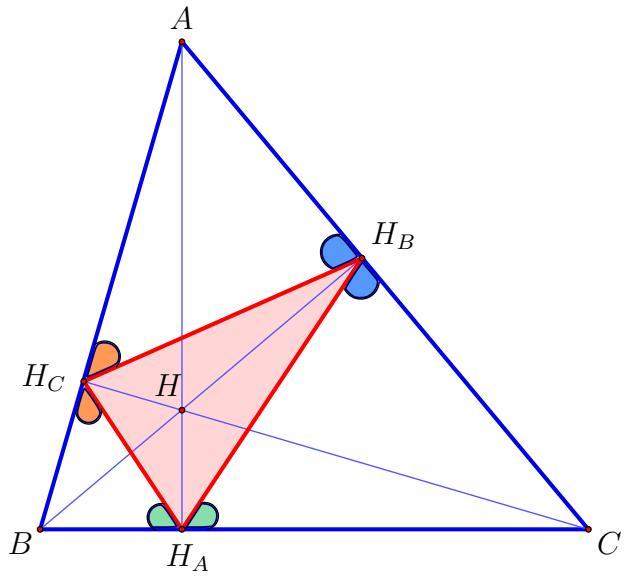


Рис. 2.14: Стороны исходного треугольника — биссектрисы внешних углов ортотреугольника.

Более того, аналогия с предыдущими конструкциями может быть продолжена.

Задача 2.9. Докажите, что точки A, B, C являются центрами вневписанных окружностей треугольника $H_AH_BH_C$.

Равенства углов, отмеченные на рисунке 2.14, позволяют отыскать еще одну важную связь между треугольниками ABC и $H_AH_BH_C$.

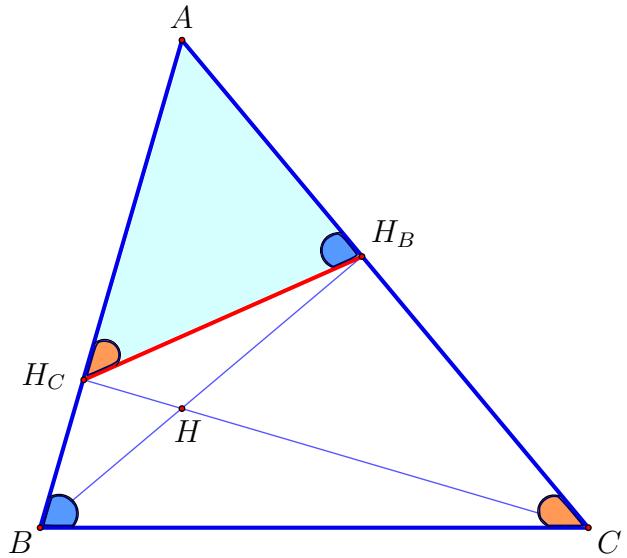


Рис. 2.15: Треугольник AH_BH_C

Задача 2.10. Докажите, что $\angle AH_BH_C = \angle B$. Объясните, как эта задача связана с задачей 2.6.

Аналогично, разумеется, верно для углов при вершинах A и C . А это означает, что стороны ортотреугольника отсекают от ABC треугольники, углы которых равны углам треугольника ABC !

После исследования замечательных свойств ортотреугольника возникает естественный вопрос²: верны ли обратные теоремы? В частности, обратим внимание на рисунок 2.16. Верно ли, что если треугольник KLM с вершинами на сторонах треугольника ABC таков, что лучи KA, LB, MC являются биссектрисами треугольника KLM , то точки K, L, M — основания высот треугольника ABC ? Если провести эксперимент, то появляется

Гипотеза 2.4. *Обратная теорема (к 2.8) верна (см. рис. 2.16).*

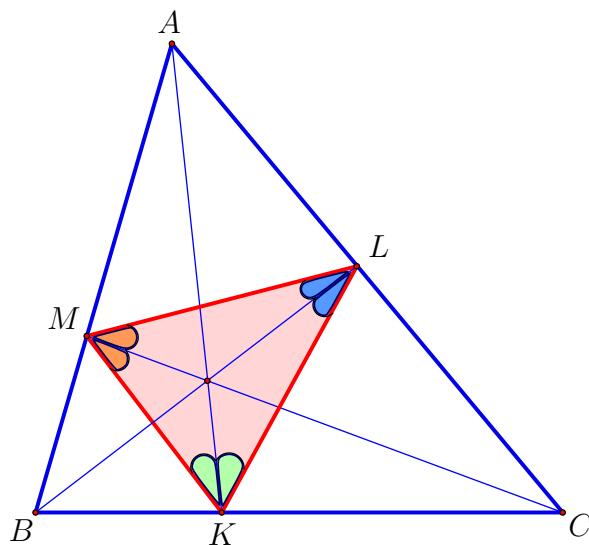


Рис. 2.16: Обратная теорема верна?

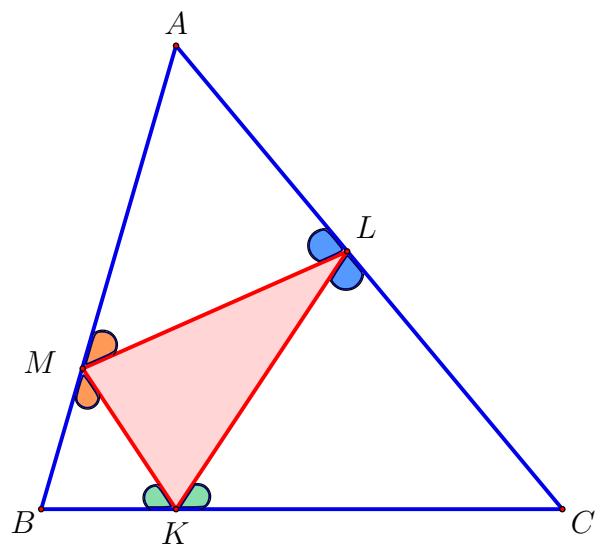


Рис. 2.17: Почти обратная теорема

Задача 2.11 (*).³ Докажите гипотезу 2.4

Простых подходов к решению этой задачи не видно. Тем не менее, если обратиться к рисунку 2.14, то можно попробовать доказать «почти обратную» теорему (см. рис. 2.17).

Задача 2.12. Докажите, что если треугольник KLM с вершинами на сторонах треугольника ABC таков, что отмеченные на рисунке 2.17 углы равны, то точки K, L, M — основания высот треугольника ABC ⁴.

²Любая наука, а значит и геометрия в том числе, строится на вопросах. Вопросы важнее ответов! Да, многие потрясающие открытия были сделаны в попытках дать ответ, но ответ на заданный ранее вопрос! Математика, быть может, даже более, чем другие науки, может считаться искусством задавать вопросы.

³Здесь и далее звездочкой будут помечены задачи, которые естественно возникли в ходе нашего исследования, но решить которые вам, возможно, пока не удастся в силу нехватки знаний. Мы будем регулярно возвращаться к таким задачам после освоения новой техники.

⁴На первый взгляд эта задача почти не отличается от задачи 2.11. Однако в отличие от нее задача 2.12 может быть решена с использованием развитой нами техники.

2.4 Основания биссектрис

С биссектрисами естественным образом связан еще один треугольник. А именно, треугольник, образованный основаниями биссектрис исходного.

Если треугольник ABC — произвольный, то никаких замечательных свойств треугольника, образованного основаниями биссектрис, не видно⁵ (см. рис. 2.18).

В таком случае рассмотрим исходный треугольник, который обладает каким-то регулярным свойством. Например, является равнобедренным (см. рис. 2.19).

Задача 2.13. Докажите, что если треугольник ABC является равнобедренным, то треугольник $L_A L_B L_C$ также будет равнобедренным.

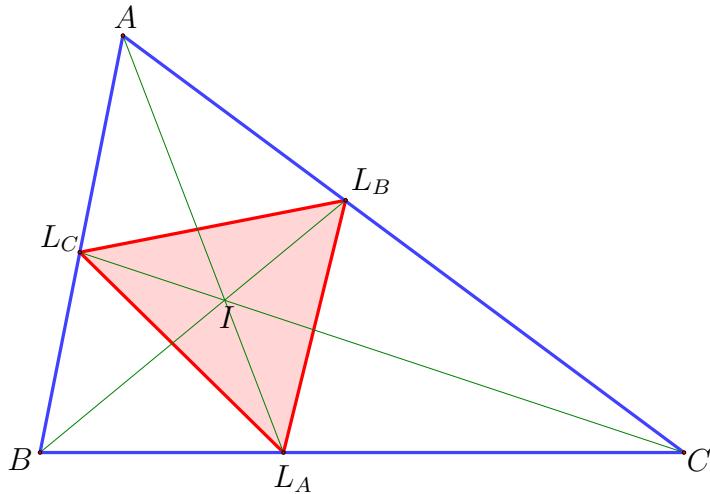


Рис. 2.18: Треугольник $L_A L_B L_C$

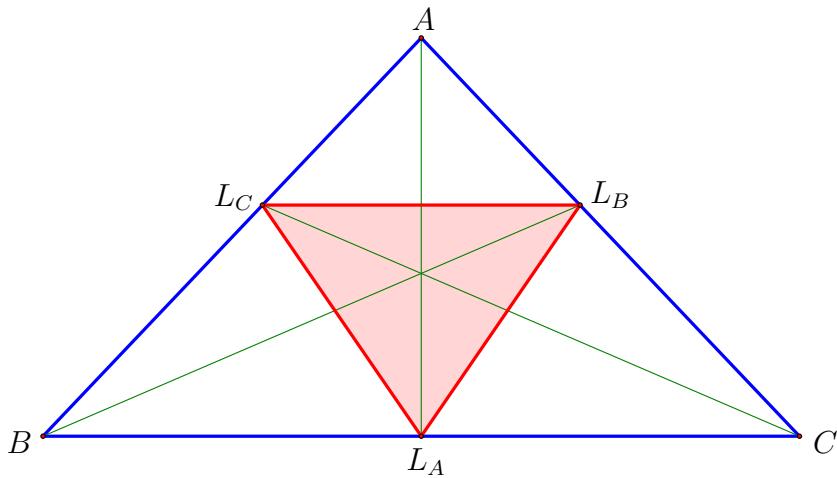


Рис. 2.19: Равнобедренные треугольники ABC и $L_A L_B L_C$

Продолжая следовать нашей традиции задавать вопросы, нельзя не спросить, верно ли обратное утверждение? Оказывается, что нет! Если треугольник $L_A L_B L_C$ равнобедренный, то у треугольника ABC может не быть равных сторон, как показано на рисунке 2.20!

Еще более удивительное наблюдение можно сделать, если слегка «пошевелить» треугольник ABC на рисунке 2.20. При малом шевелении треугольник

⁵Пока не видно... В главе 10 мы восполним этот пробел.

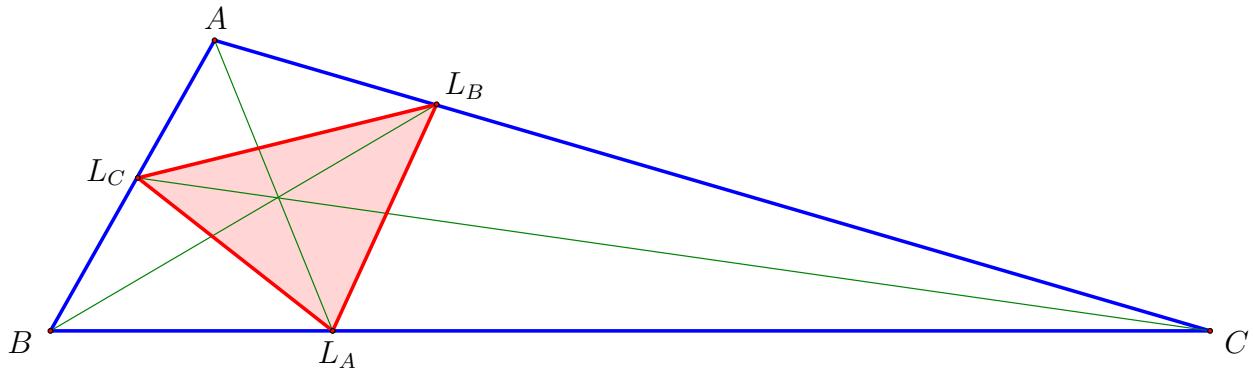


Рис. 2.20: Треугольник $L_AL_BL_C$ — равнобедренный!

$L_AL_BL_C$ останется равнобедренным! Дело в том, что треугольник $L_AL_BL_C$ будет равнобедренным, если угол $\angle BAC$ находится в интервале приблизительно $(102^\circ 40'; 104^\circ 28')$ ⁶. Среди треугольников, обладающих этим свойством, есть замечательный треугольник с углами $4\pi/7, 2\pi/7$ и $\pi/7$.

Приведенные рассуждения подсказывают направление дальнейшего исследования: давайте попробуем менять градусную меру угла $\angle BAC$ и смотреть, что будет происходить с треугольником $L_AL_BL_C$. Естественно начать с «хороших» углов. Это приводит нас к такому наблюдению: *если у треугольника ABC один из углов равен 120° , то треугольник, образованный основаниями его биссектрис, будет прямоугольным!*

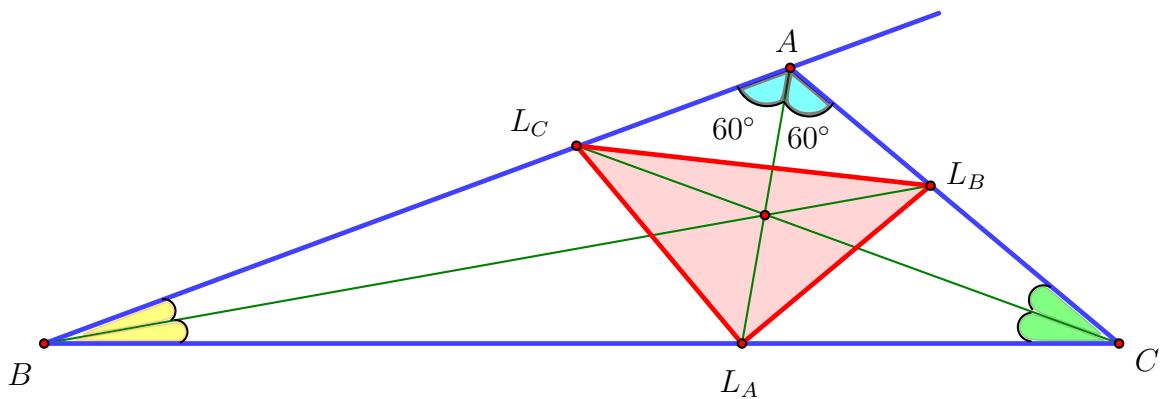


Рис. 2.21: Треугольник $L_AL_BL_C$ — прямоугольный?

Задача 2.14. Докажите, что если $\angle BAC = 120^\circ$ треугольник $L_AL_BL_C$ — прямоугольный.

Теперь вновь возникает *естественный* вопрос: верно ли обратное утверждение? Верно ли, что если в треугольнике ABC треугольник, образованный основаниями биссектрис прямоугольный, то один из углов треугольника ABC равен 120° ?

⁶Более точное утверждение звучит так: треугольник ABC может быть неравнобедренным, но это может быть только в том случае, когда косинус одного из его углов находится в интервале $\left(-\frac{1}{4}; \frac{\sqrt{17}-5}{4}\right)$. Такой результат получается, поскольку вопрос описания треугольника ABC сводится к условиям разрешимости некоторого уравнения.

Задача 2.15 (*). Докажите, что утверждение, обратное к утверждению задачи 2.14, верно.

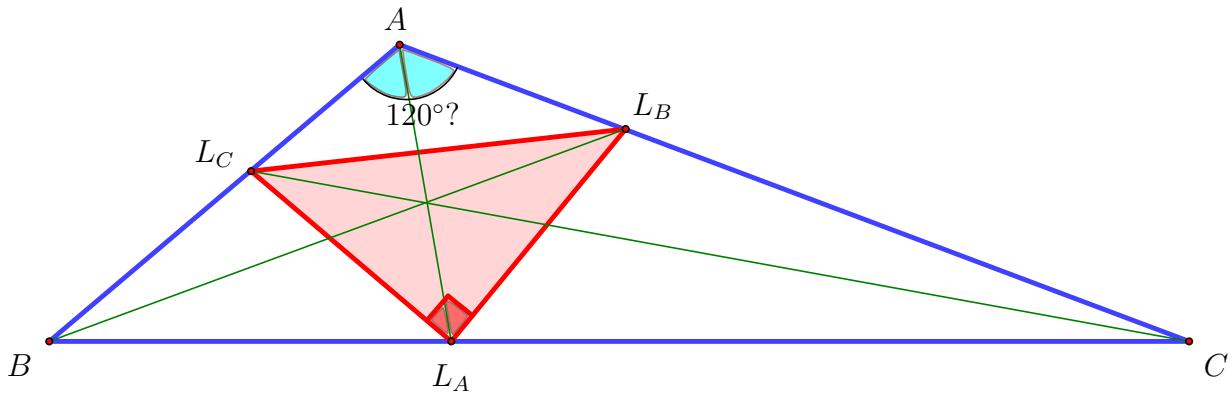


Рис. 2.22: $\angle BAC = 120^\circ?$

2.5 W -треугольники

До этого мы рассматривали точки W по отдельности. Теперь давайте обратимся к треугольнику $W_A W_B W_C$.

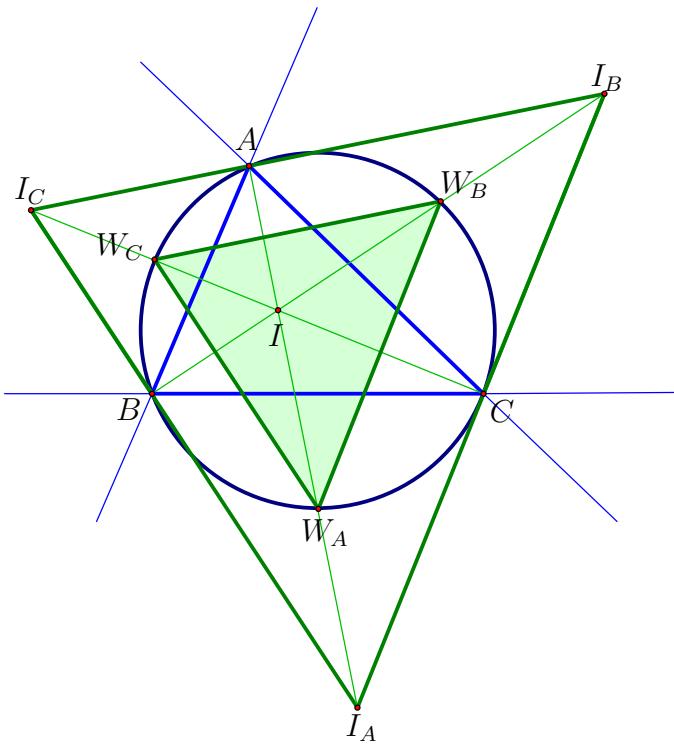


Рис. 2.23: Треугольник $W_A W_B W_C$

Задача 2.16. Докажите, что стороны треугольников $W_A W_B W_C$ и $I_A I_B I_C$ параллельны.

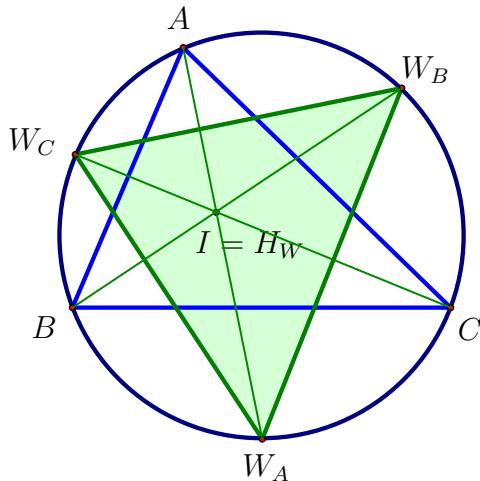


Рис. 2.24: Треугольники ABC и $W_AW_BW_C$

Задача 2.17. Докажите, что точка I треугольника ABC является точкой пересечения высот треугольника $W_AW_BW_C$.

Рассмотрим треугольники $W_AW_BW_C$ и $W^AW^BW^C$. Как они взаимодействуют друг с другом? Рисунок слева подсказывает следующее утверждение

Задача 2.18.

- Докажите, что стороны треугольников $W_AW_BW_C$ и $W^AW^BW^C$ параллельны.
- Докажите, что треугольники $W_AW_BW_C$ и $W^AW^BW^C$ равны (см. рис. 2.25 и 2.23).

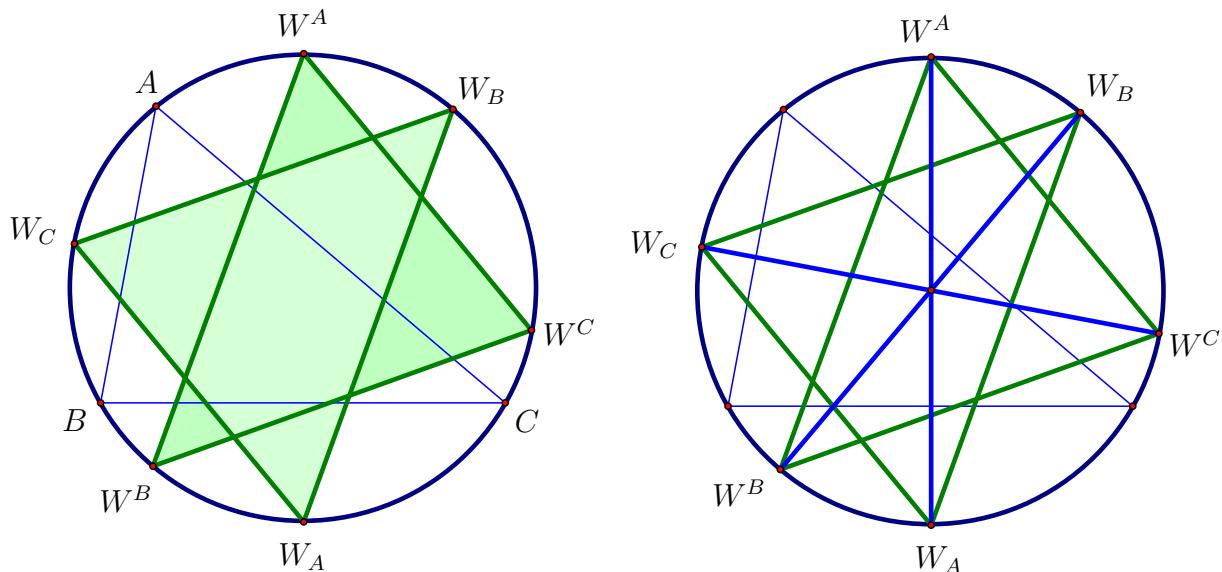


Рис. 2.25: $\triangle W_AW_BW_C$ и $\triangle W^AW^BW^C$

Если посмотреть на рисунок справа, то появляется

Задача 2.19. Докажите, что отрезки W_AW^A , W_BW^B и W_CW^C пересекаются в одной точке. Как эта точка связана с описанной окружностью треугольника ABC ? (Сравните эту задачу с задачей 1.17.)

Глава 3

Треугольники Эйлера

Обратите внимание на рисунки 1.6 и 2.3. Что общего у треугольников $A_M B_M C_M$ и $I_A I_B I_C$? И тот и другой появились при исследовании ключевых объектов исходного треугольника ABC : высот в первом случае, биссектрис во втором. И тот и другой связаны с исходным треугольником через окружность Эйлера: в первом случае вершины исходного треугольника являются серединами сторон, во втором — основаниями высот. Таким образом описанная окружность треугольника ABC является окружностью Эйлера «больших» треугольников. Такие «большие» треугольники мы будем называть треугольниками Эйлера.

В связи с этими наблюдениями возникает естественные вопросы:

- Как устроено множество треугольников Эйлера для заданного треугольника ABC ?
- Помогут ли другие треугольники Эйлера исследовать свойства каких-либо замечательных объектов в треугольнике (как помогли нам треугольники $A_M B_M C_M$ и $I_A I_B I_C$)?

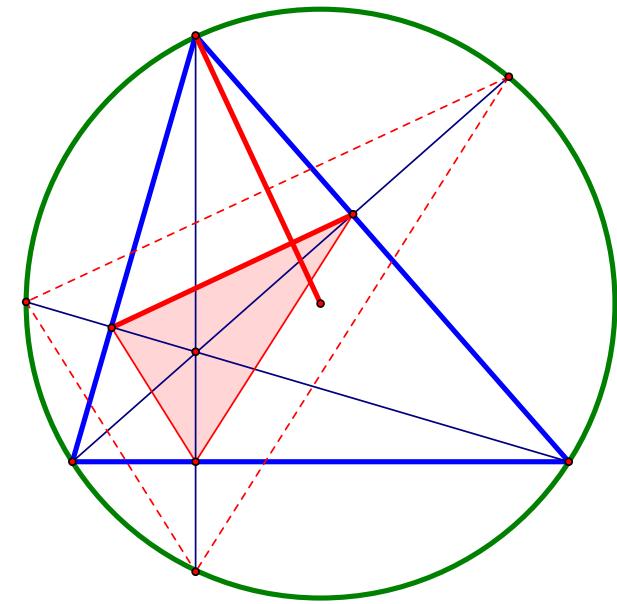
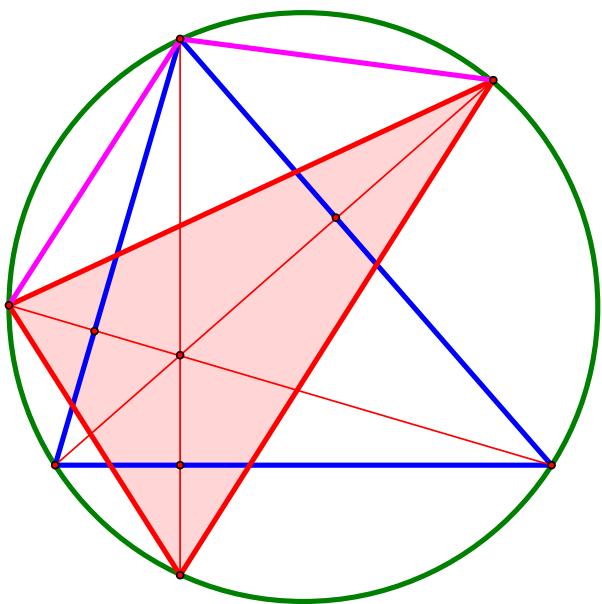
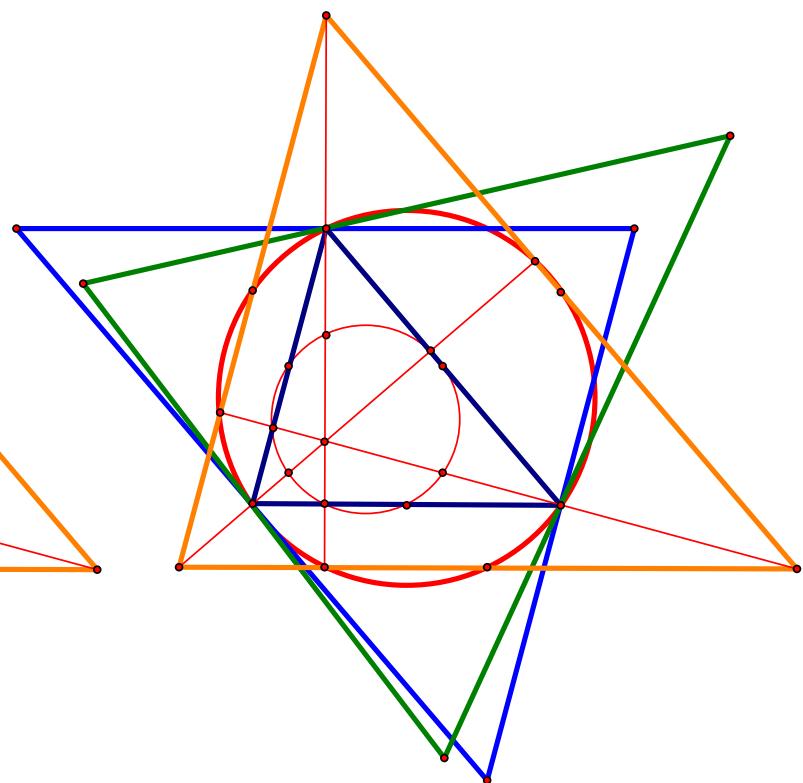
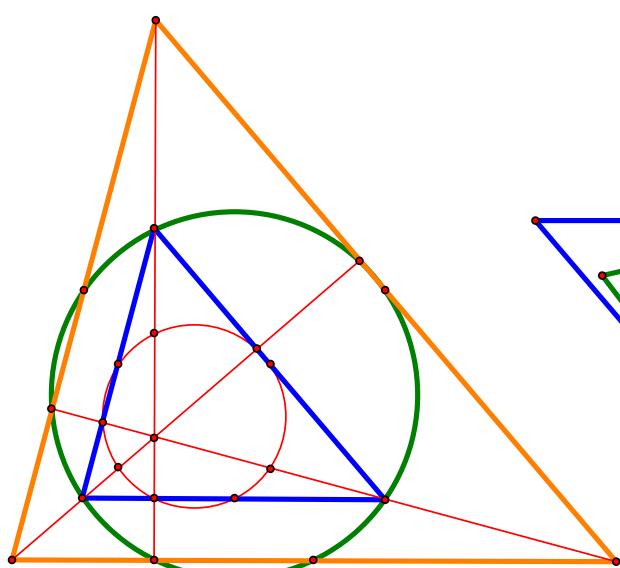
Уточним задачу. Мы знаем, что на окружности Эйлера лежат девять замечательных точек. Выберем любые три из них в качестве вершин исходного треугольника ABC и предпримем попытку ответить на следующие вопросы:

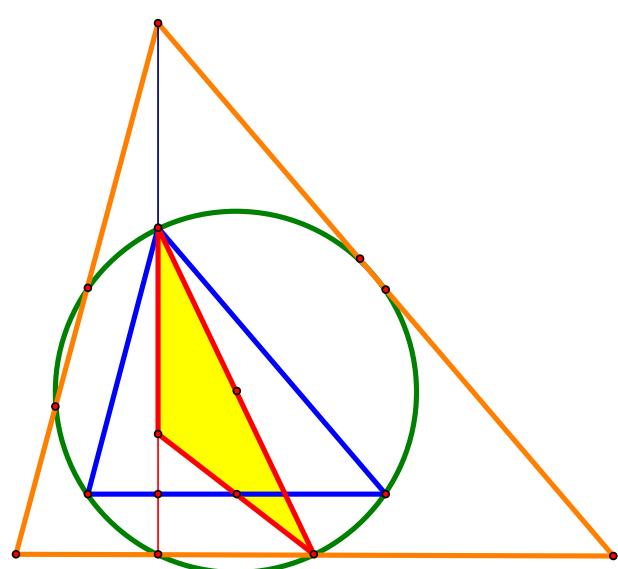
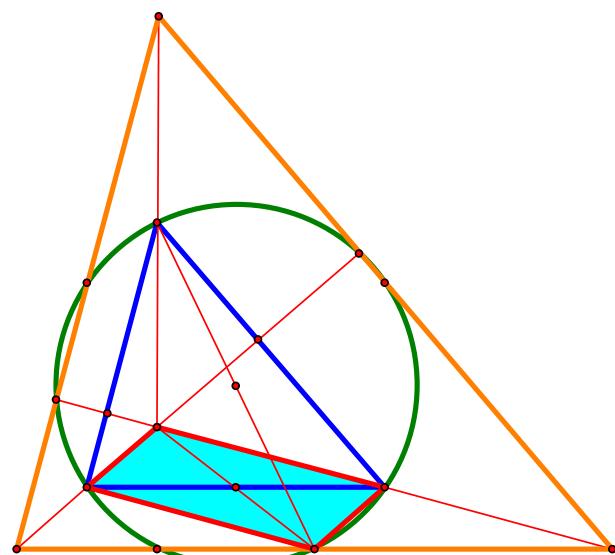
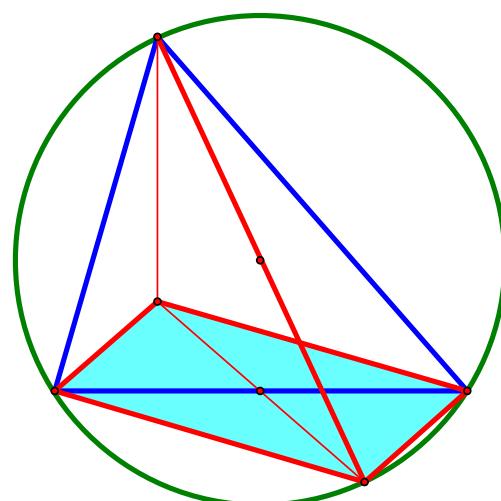
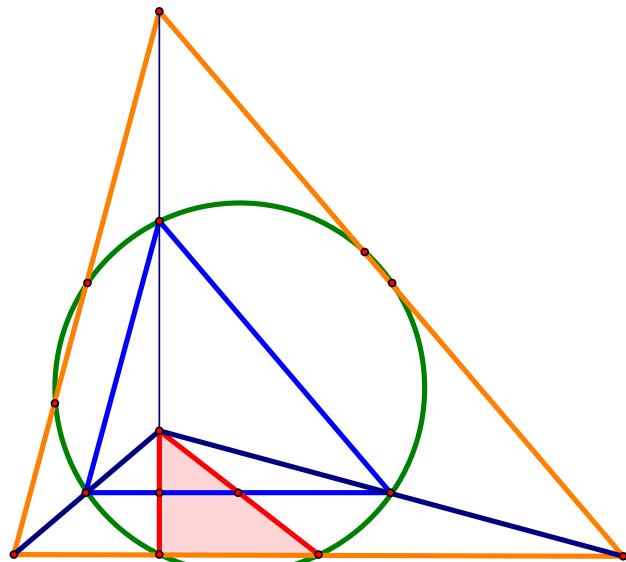
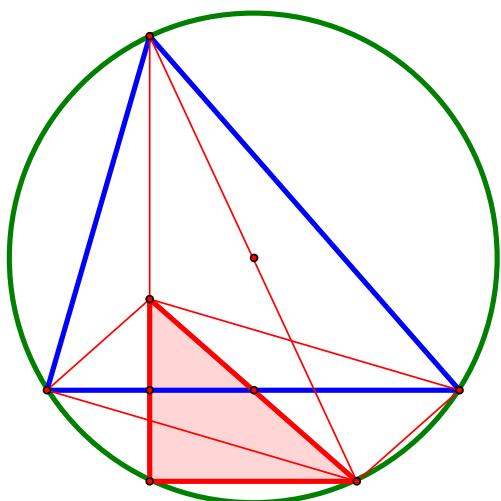
- Всегда ли можно для данной тройки точек построить треугольник Эйлера?
- Как осуществить это построение?
- Сколько существует соответствующих треугольников Эйлера?

Для освоения содержащегося в данной главе материала достаточно знания первых пяти параграфов учебника Погорелова, признаков и свойств параллелограмма и первых двух глав данной книги.

На всем протяжении этой главы сохранены стандартные обозначения.

- M_A, M_B, M_C — середины сторон треугольника;
- H_A, H_B, H_C — основания высот;
- H, O — точка пересечения высот и центр описанной окружности соответственно;
- E_A, E_B, E_C — середины отрезков, соединяющих вершины треугольника с точкой H ;
- κ_A, κ^A — окружности, связанные с высотами в треугольнике.





3.1 H -треугольник и свойства ортоцентра

У нас есть треугольник $A_M B_M C_M$, для которого вершины исходного являются серединами сторон. Также у нас есть треугольник $I_A I_B I_C$, для которого вершины исходного являются основаниями высот. Естественным первым шагом будет рассмотреть треугольник, для которого вершины исходного будут точками E_A, E_B, E_C . Такой треугольник мы будем обозначать через $A_H B_H C_H$ (см. рис. 3.1).

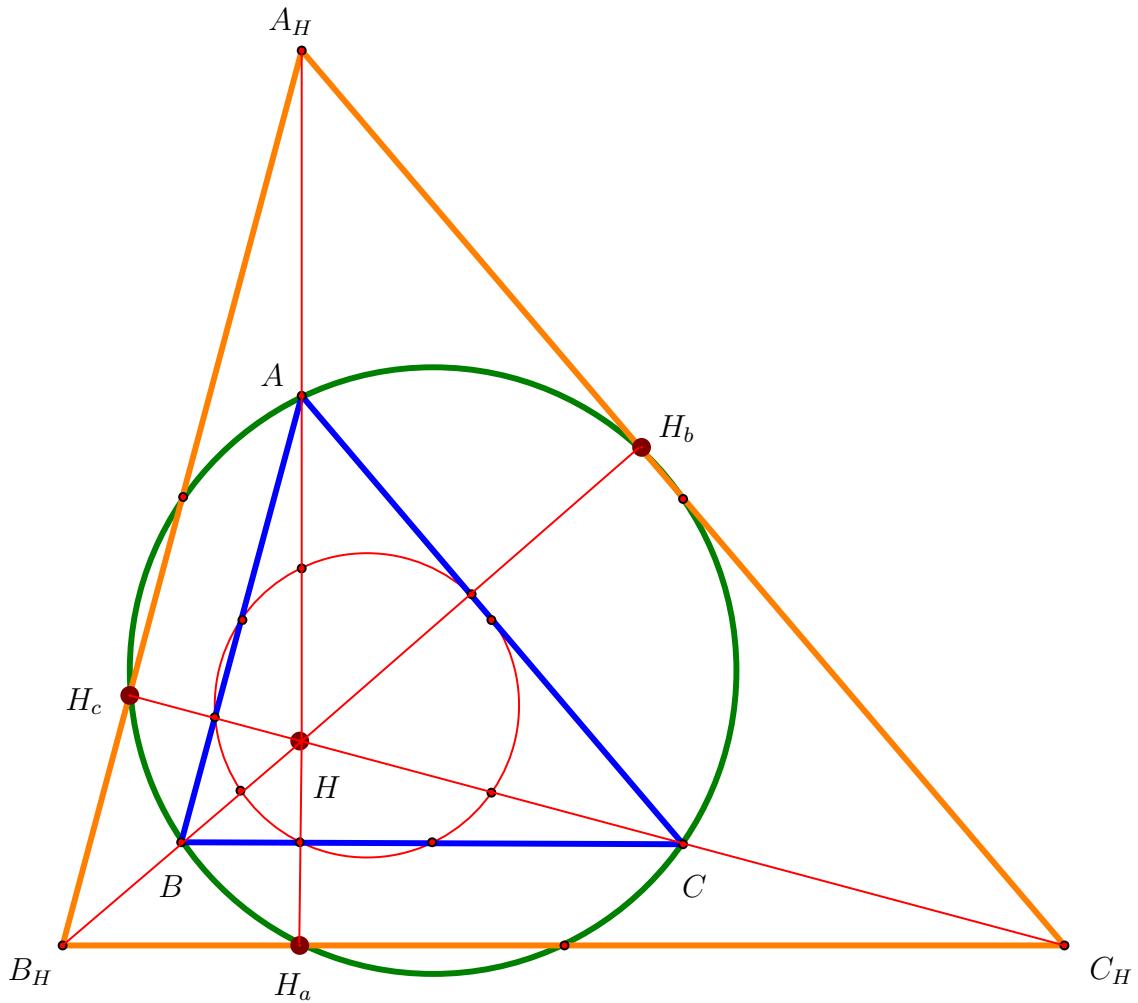


Рис. 3.1: Треугольник $A_H B_H C_H$

Из очевидных наблюдений сразу отметим, что у треугольников ABC и $A_H B_H C_H$ совпадают ортоцентры. В таком случае можно ожидать, что треугольник $A_H B_H C_H$ поможет исследовать свойства ортоцентра исходного треугольника ABC .

Легко заметить, что основания высот треугольника $A_H B_H C_H$, которые мы будем обозначать через H_a, H_b и H_c , лежат на описанной окружности треугольника ABC , поскольку она является окружностью Эйлера треугольника $A_H B_H C_H$. Можно ли построить точки H_a, H_b, H_c только с помощью треугольника ABC ? Оказывается, да!

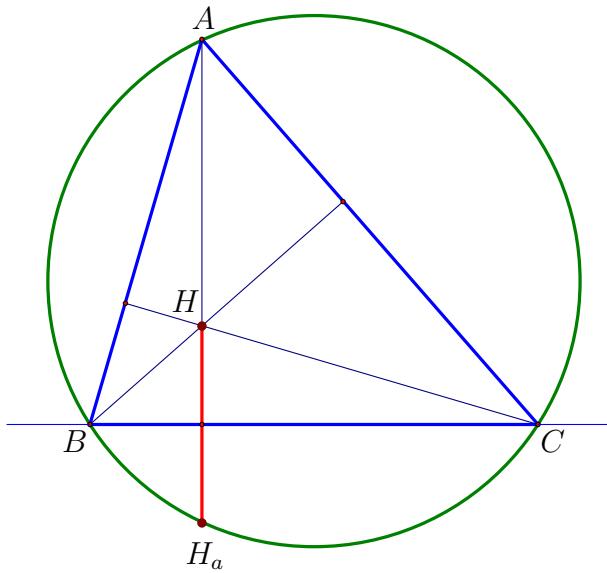


Рис. 3.2: Точка H_a

Задача 3.1. Докажите, что точки H и H_a симметричны относительно прямой BC . (см. рис. 3.2 и 3.3).

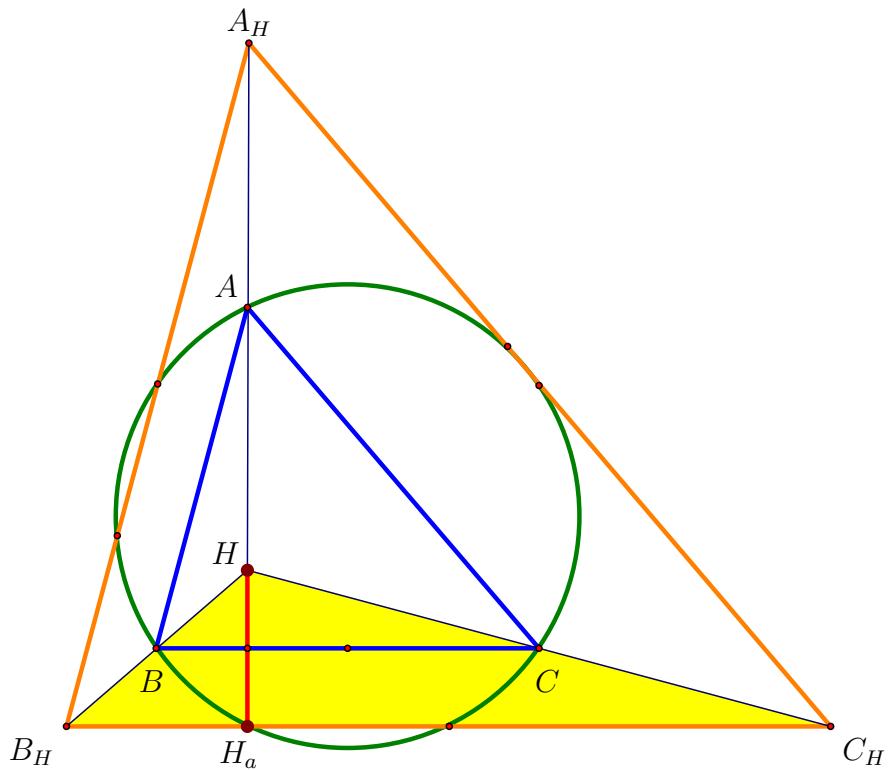


Рис. 3.3: Точка H_a в треугольнике $A_H B_H C_H$

Середины сторон треугольника $A_H B_H C_H$, которые мы будем обозначать через A', B', C' (причина использования таких обозначений прояснится в задаче 3.4), также лежат на описанной окружности треугольника ABC . Связаны ли как-то эти точки с ортоцентром треугольника ABC ? Да!

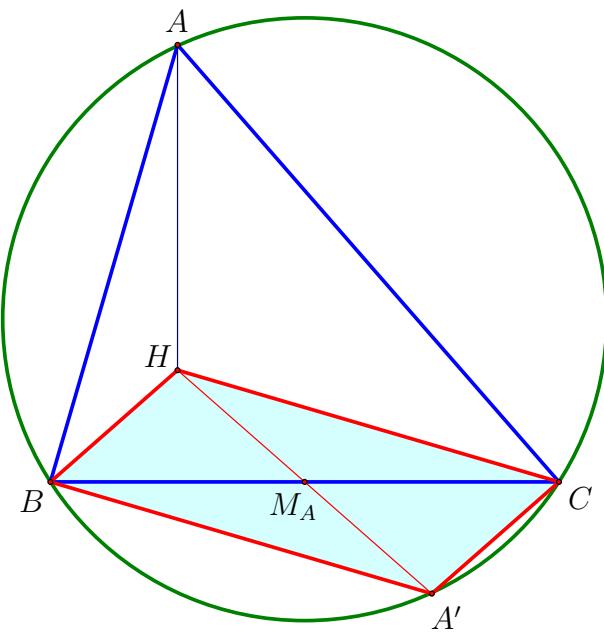


Рис. 3.4: Параллелограмм $BHCA'$

Задача 3.2. Докажите, что четырехугольник $BHCA'$ является параллелограммом (см. рис. 3.4 и 3.5).

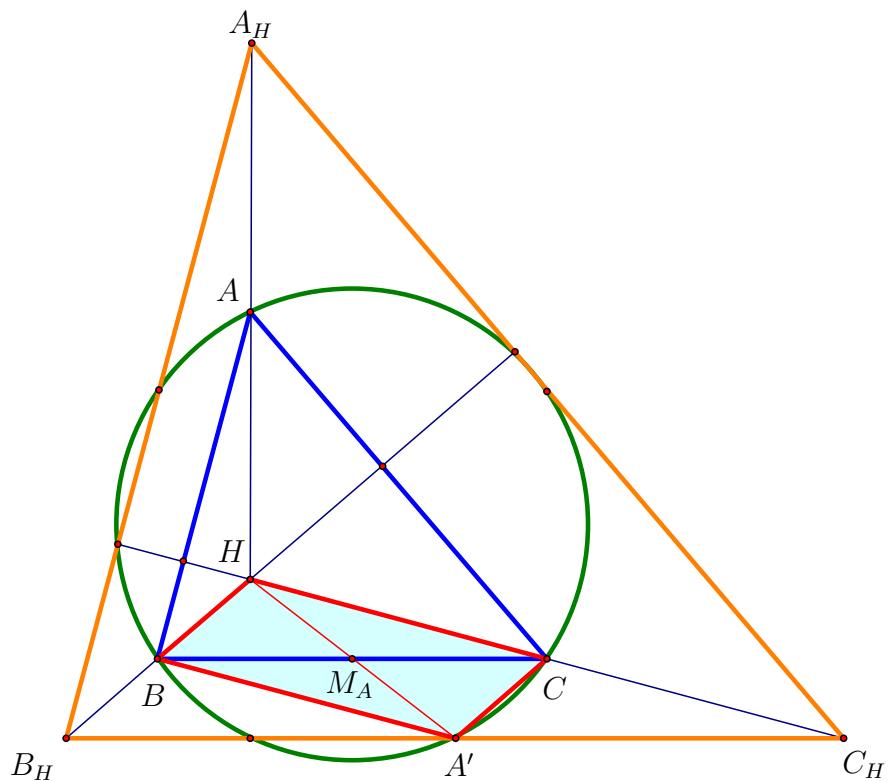


Рис. 3.5: Параллелограмм $BHCA'$ в треугольнике $A_H B_H C_H$

Это наблюдение позволяет установить замечательную связь между точками H и A' .

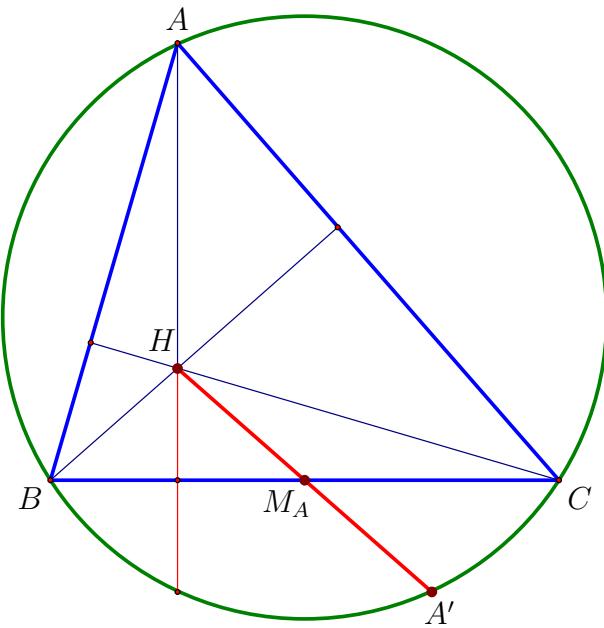


Рис. 3.6: Точка A'

Задача 3.3. Докажите, что точки H и A' центрально-симметричны относительно середины стороны BC , т.е. точки M_A ¹ (см. рис. 3.6 и 3.7).

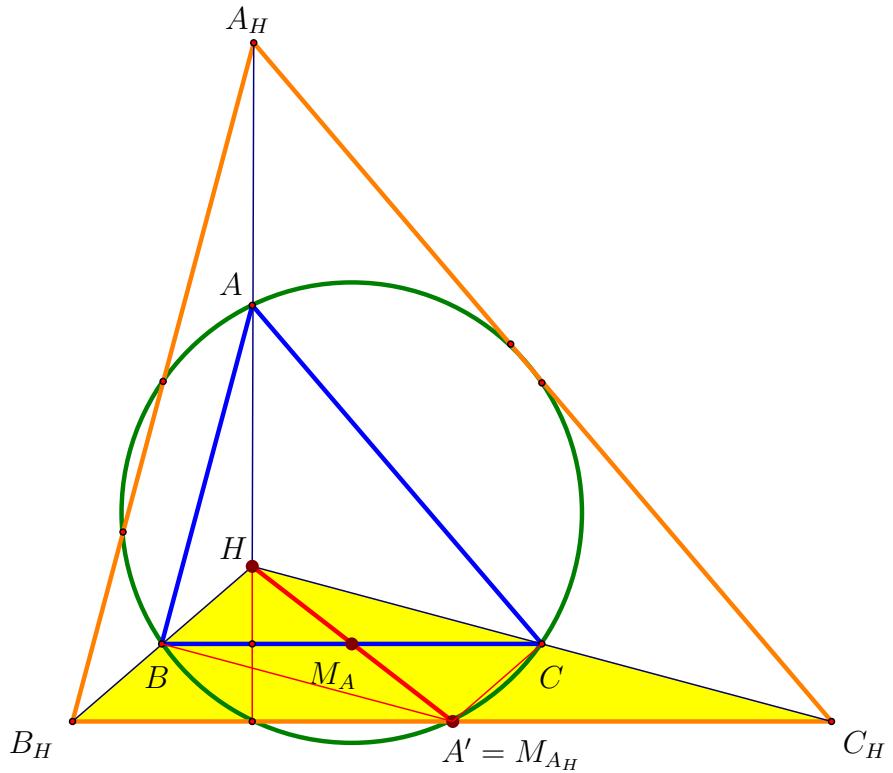


Рис. 3.7: Точка A' в треугольнике $A_H B_H C_H$

Точка A' оказывается естественно связанный не только с ортоцентром треугольника, но также с лежащей напротив вершиной. Рисунки 3.8 и 3.9 демонстрируют замечательную связь между точками A и A' .

¹Это означает, что точки H, M_A, A' лежат на одной прямой и что $HM_A = M_AA'$.

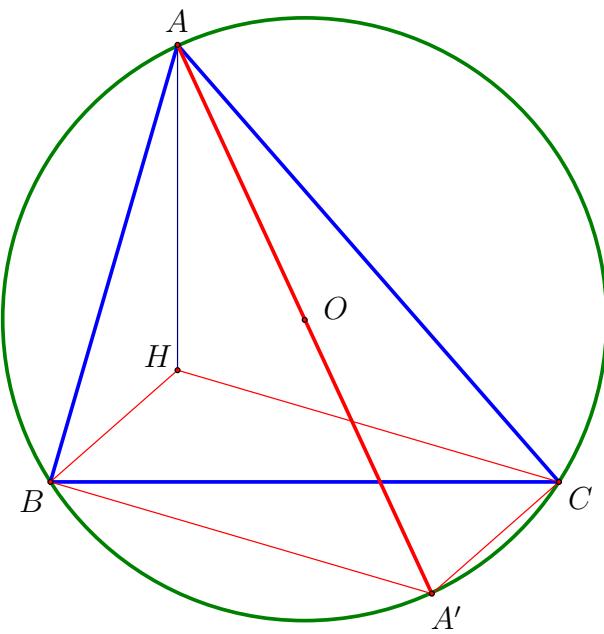


Рис. 3.8: AA' — диаметр описанной окружности

Задача 3.4. Докажите, что отрезок AA' является диаметром описанной окружности треугольника ABC ² (см. рис. 3.8 и 3.9).

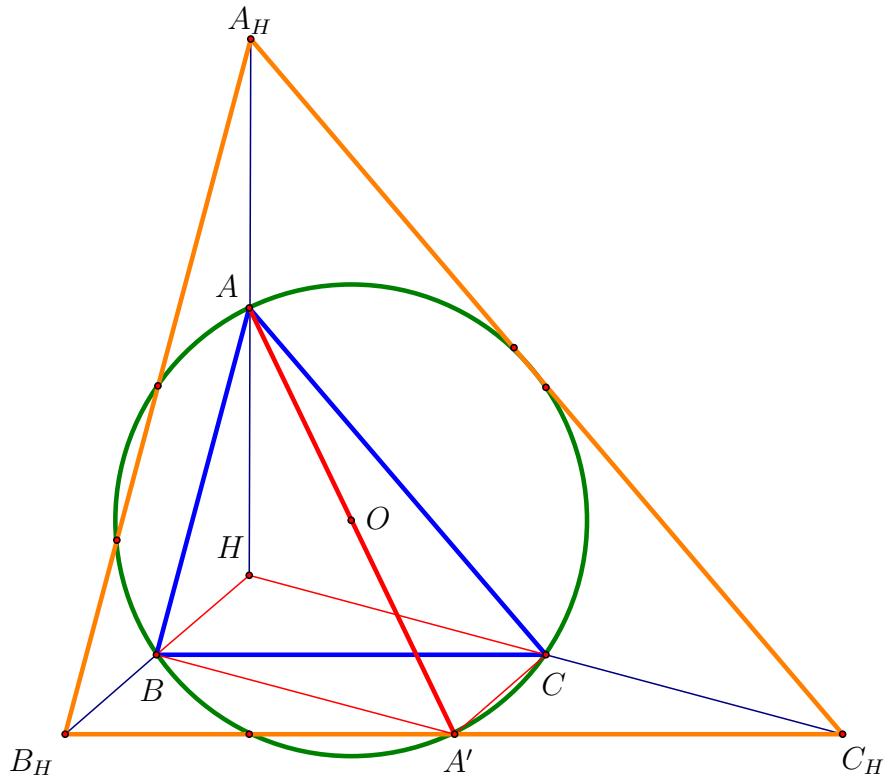


Рис. 3.9: Диаметр AA' в треугольнике $A_H B_H C_H$

Обратим также внимание на треугольник AHA' (см. рис. 3.10), который будет играть ключевую роль в главе 4.

²В свете именно этого факта середины сторон треугольника $A_H B_H C_H$ были обозначены через A', B', C' .

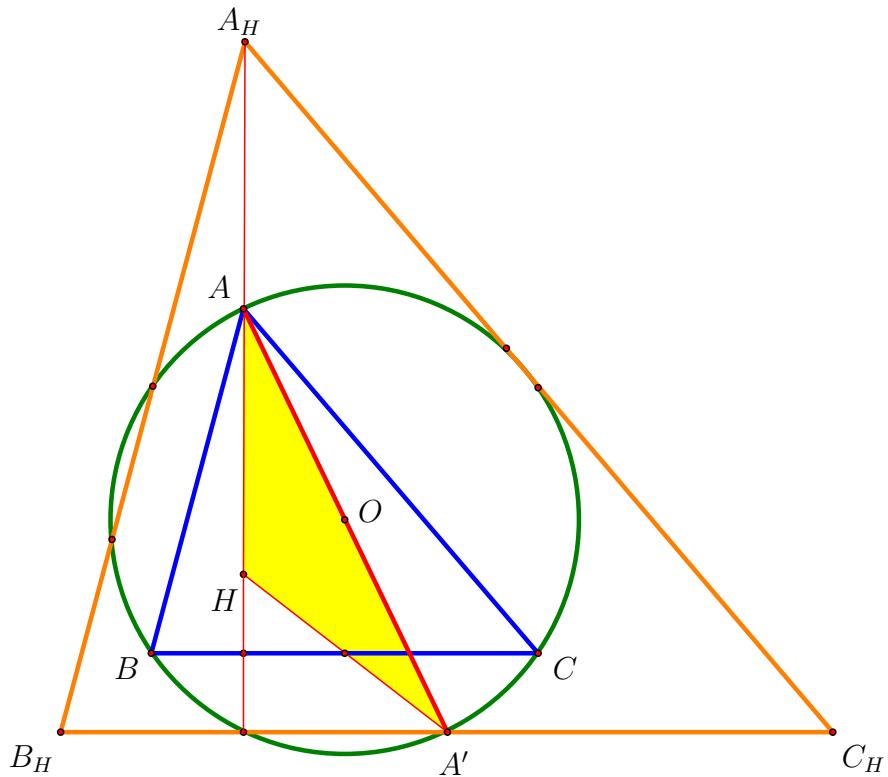


Рис. 3.10: Треугольник AHA'

Теперь рассмотрим точки $H_aH_bH_c$ и образованный ими треугольник. На картинках ниже для удобства опустим индекс S .

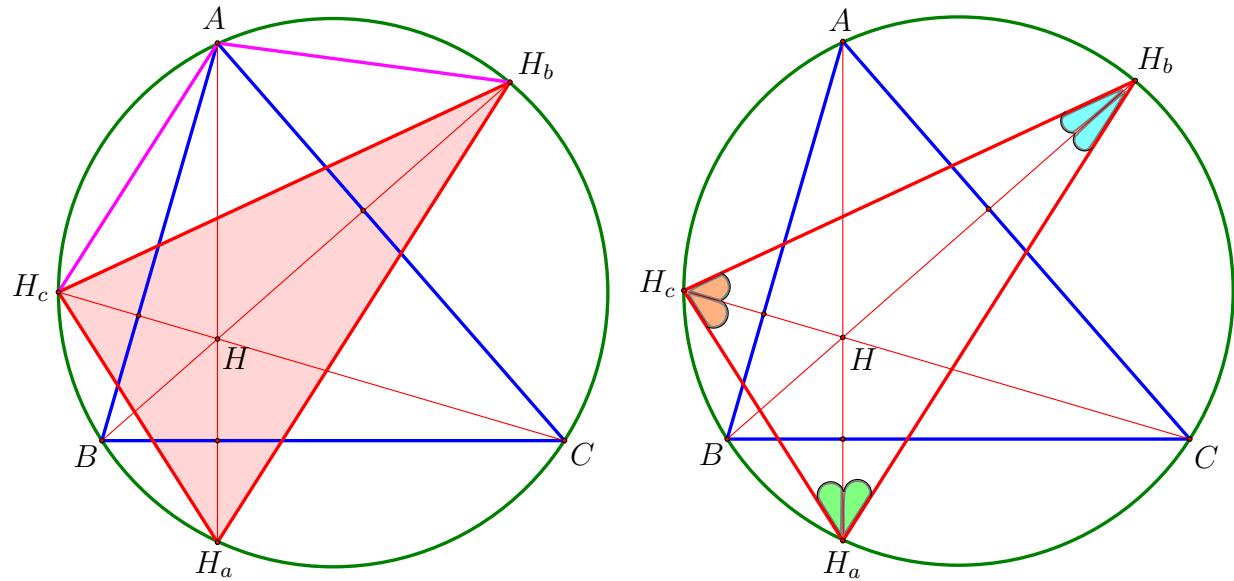


Рис. 3.11: Треугольники ABC и $H_aH_bH_c$

Задача 3.5.

- Докажите, что $H_bA = H_cA$.
- Докажите, что высоты треугольника ABC – биссектрисы треугольника $H_aH_bH_c$.
- Какими точками для треугольника $H_aH_bH_c$ являются точки A, B, C ?
- Докажите, что H – центр вписанной окружности треугольника $H_aH_bH_c$.

Очевидна связь между треугольником $H_aH_bH_c$ и ортотреугольником треугольника ABC . Эта связь позволяет доказать еще одно замечательно свойство орто-треугольника (см. рис. 3.12).

Задача 3.6. Докажите, что прямые AO и H_BH_C перпендикулярны.

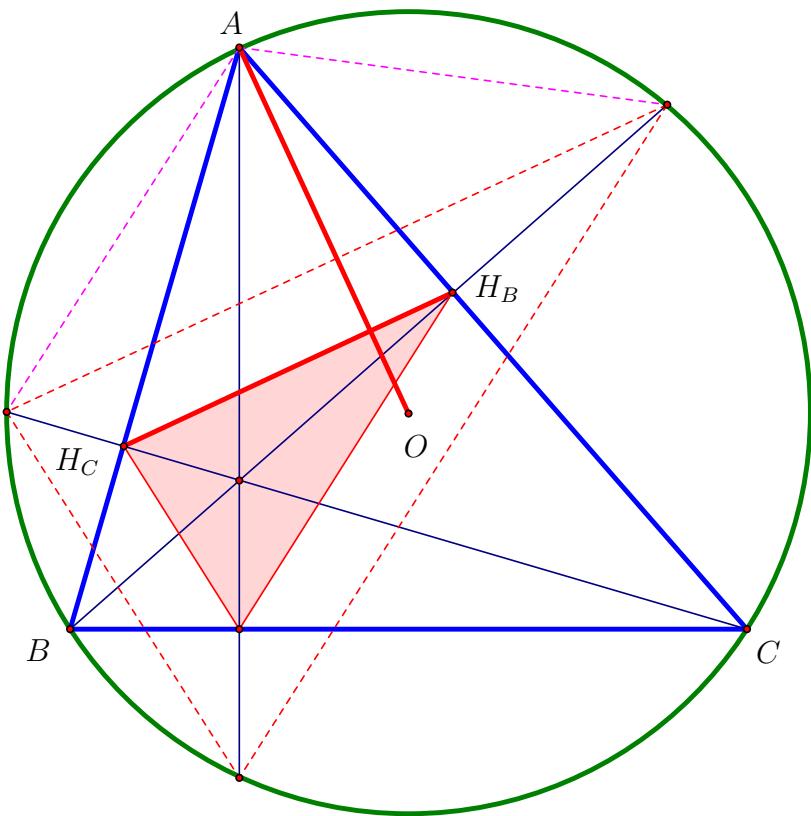


Рис. 3.12: $AO \perp H_BH_C$

В заключение этого раздела на рисунке 3.13 все три треугольника $A_M B_M C_M$, $I_A I_B I_C$ и $A_H B_H C_H$. В следующем разделе мы исследуем аналоги этих треугольников для различных троек точек, лежащих на окружности Эйлера.

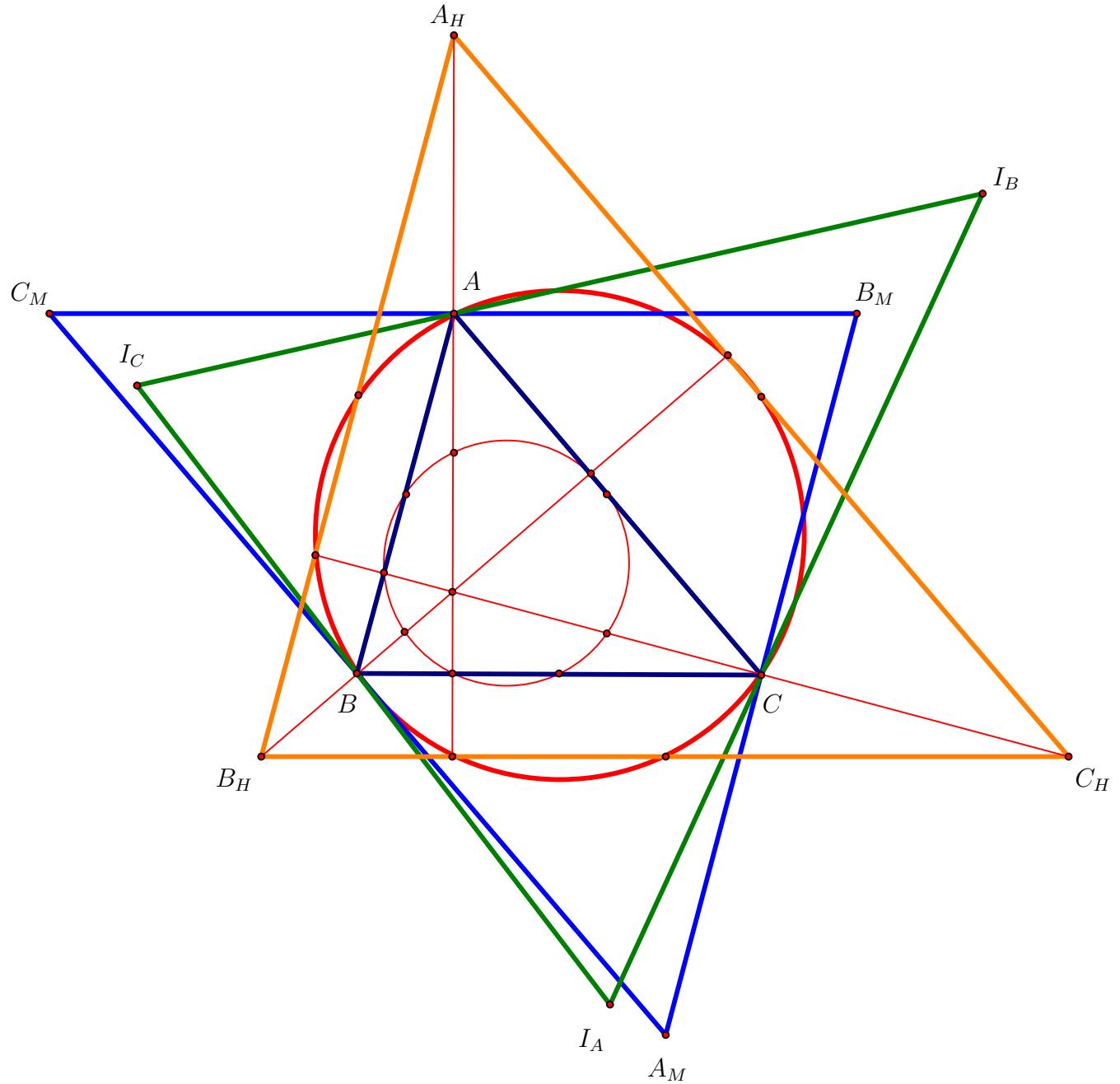


Рис. 3.13: Треугольники $A_M B_M C_M$, $I_A I_B I_C$ и $A_H B_H C_H$

3.2 Степени свободы треугольников Эйлера

В этом разделе мы переходим к задачам построения и исследования треугольников Эйлера. Прямой подсчет показывает, что кроме трех уже упомянутых нами вариантов (в которых вершины исходного треугольника были серединами сторон, основаниями высот и точками E_A, E_B, E_C) остается еще семнадцать. Эти семнадцать вариантов естественным образом разбиваются на несколько групп.

Обратите внимание, что при построении треугольников $A_M B_M C_M, I_A I_B I_C$ и $A_H B_H C_H$ исходный треугольник ABC был произвольным³. Во всех ли случаях исходный треугольник может быть произвольным?

Задача 3.7.

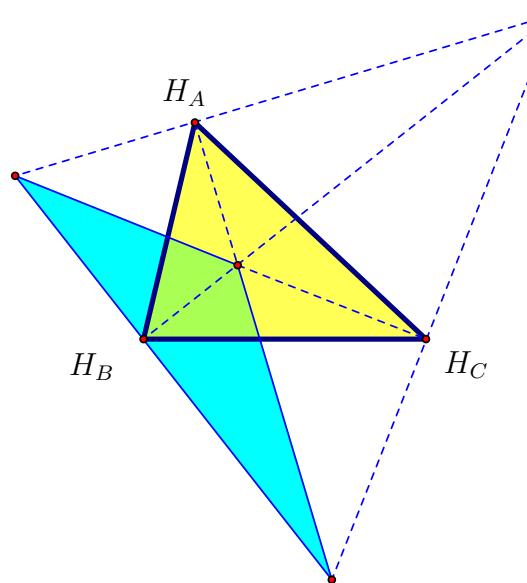
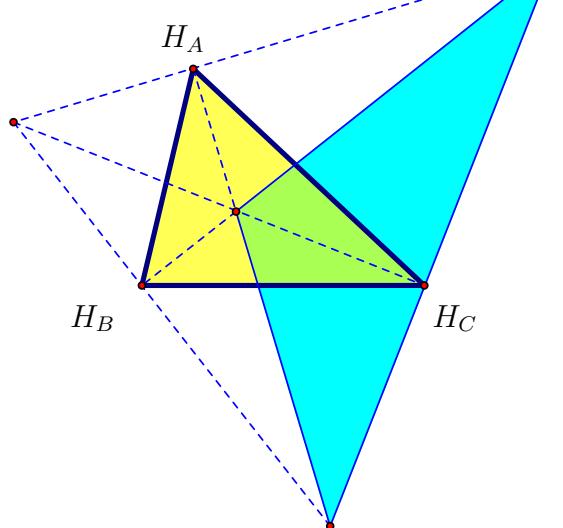
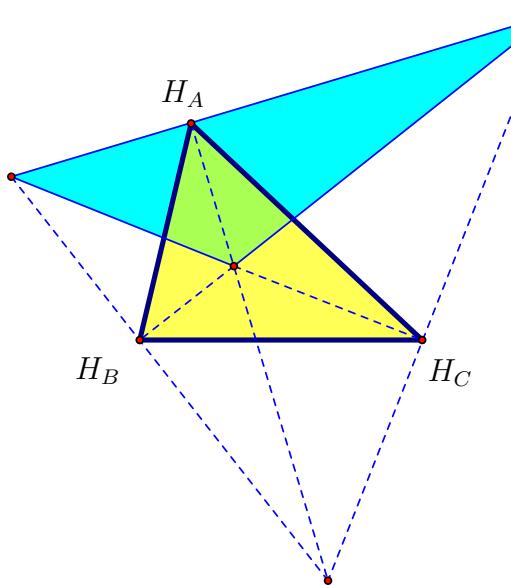
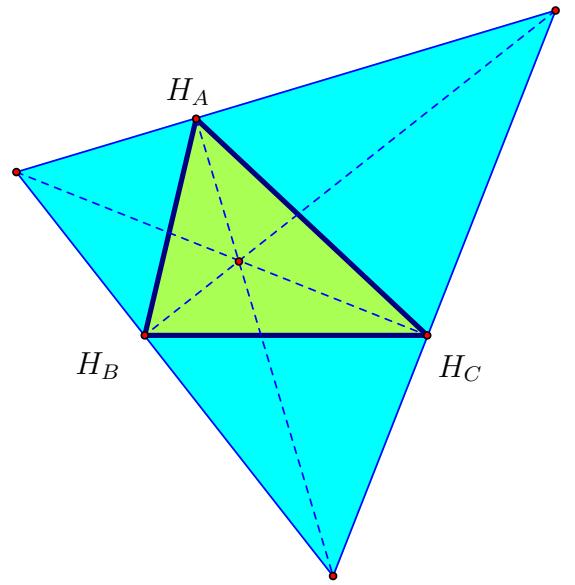
- Докажите, что если среди тройки точек присутствуют M и E с одинаковым индексом, то исходный треугольник обязан быть прямоугольным.
- Докажите, что если тройка точек состоит из двух оснований высот и E или M с различными индексами (например, H_A, H_B, M_C), то исходный треугольник обязан быть равнобедренным.

Случай, перечисленные в этой задаче, мы будем называть вырожденными, и о них речь пойдет позже. Начнем с невырожденных случаев.

Первый из них относится к случаю оснований трех высот, который мы, кажется, уже разобрали. Ведь нам хорошо известно, что в треугольнике $I_A I_B I_C$ вершины исходного являются основаниями высот (см. задачу 2.1). Существуют ли другие такие треугольники?

Задача 3.8. Постройте треугольник, для которого вершины исходного будут точкам H_A, H_B, H_C . Сколько существует таких треугольников?

³Несмотря на то, что мы всегда рисовали его остроугольным, все построения остаются справедливыми и в случае тупоугольного исходного треугольника.



3.2.1 Середины и основание высоты. Невырожденный случай

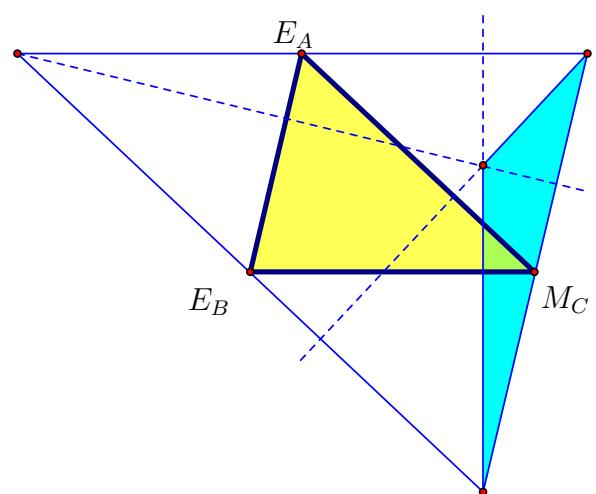
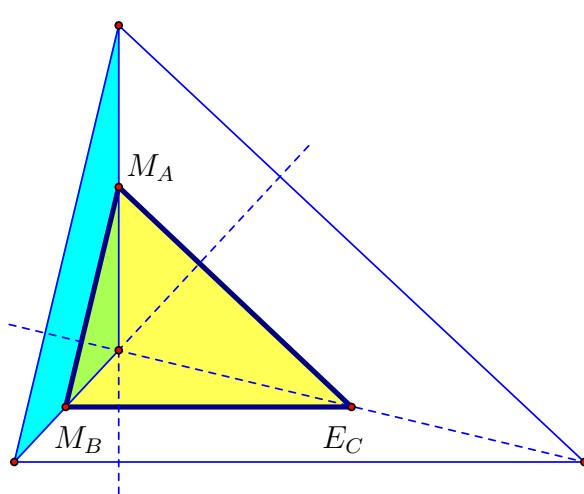
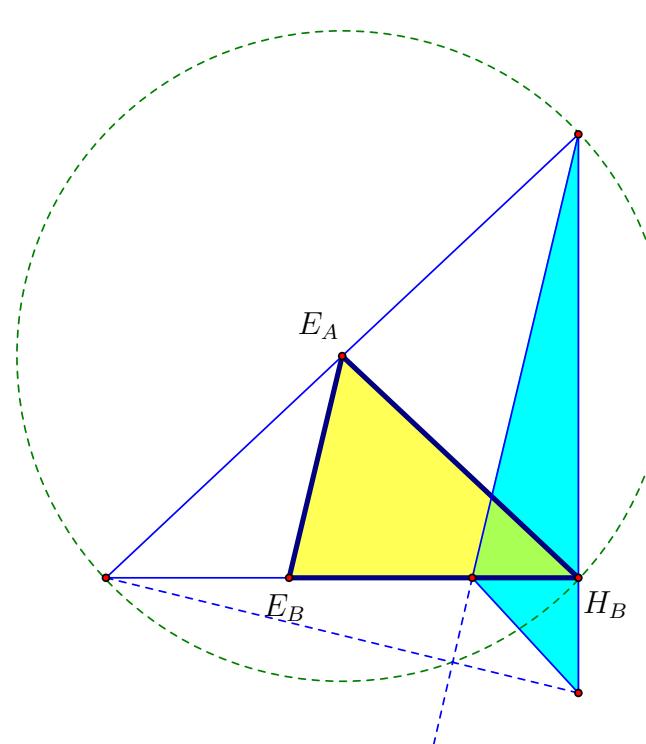
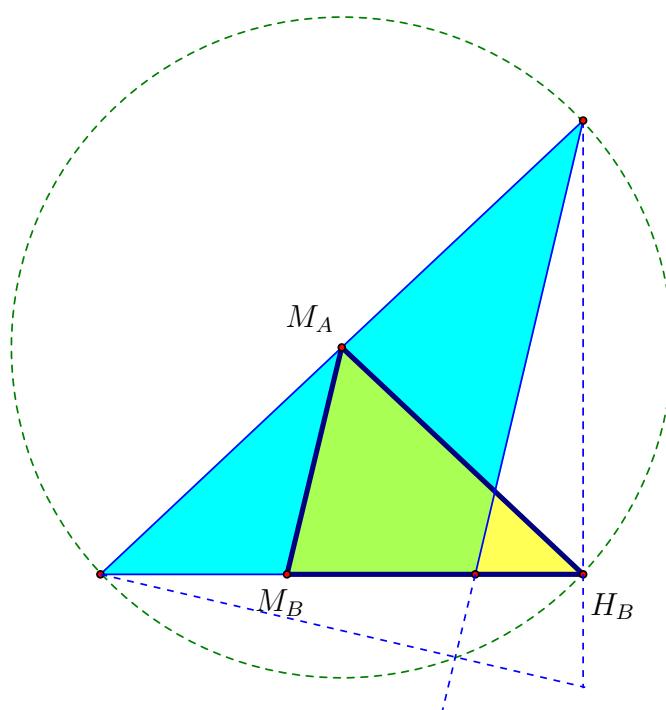
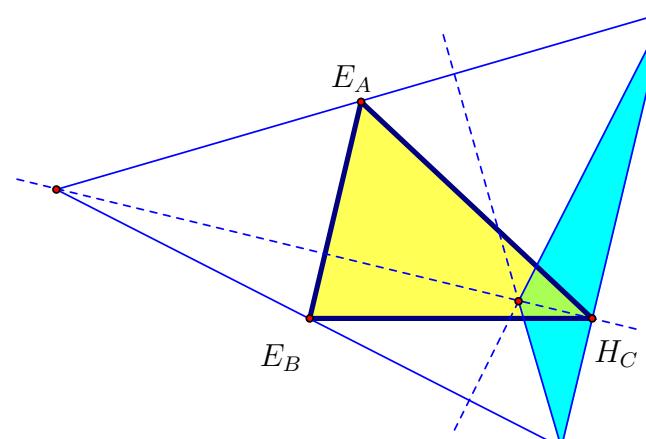
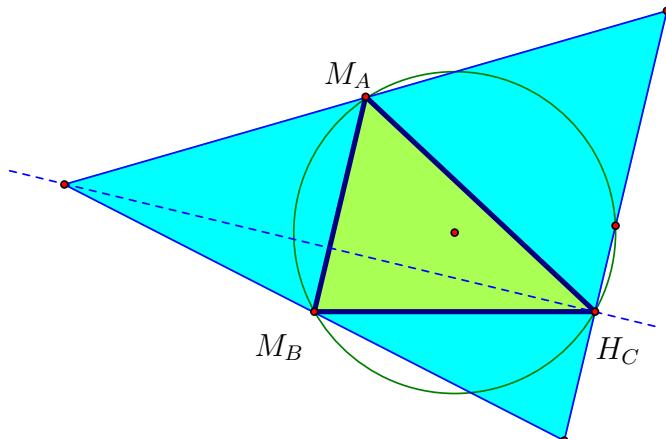
Рассмотрим тройки точек, которые содержат хотя бы две середины.

Задача 3.9. Постройте треугольник, для которого вершины исходного будут точками

- а) M_A, M_B, H_C ;
- б) E_A, E_B, H_C ;
- в) M_A, M_B, H_B ;
- г) E_A, E_B, H_B ;
- д) M_A, M_B, E_C ;
- е) E_A, E_B, M_C .

Сколько треугольников можно построить в каждом из пунктов выше?

Обратите также внимание на связь между рисунками в левой и правой колонках. Что происходит при замене пары M_A, M_B на пару E_A, E_B ?



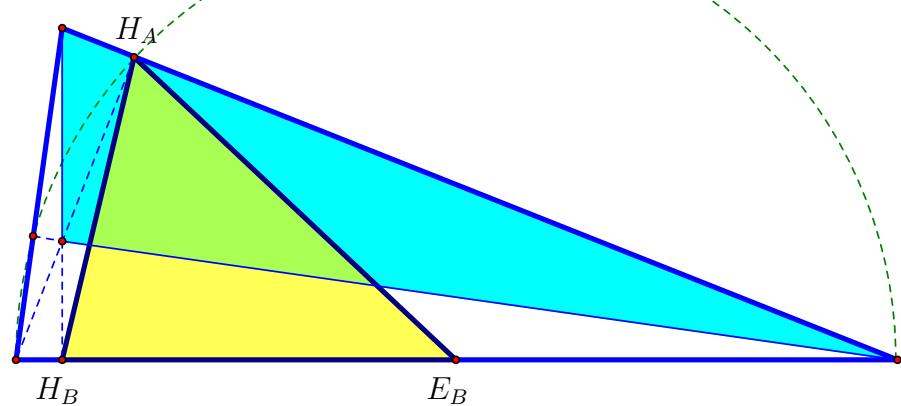
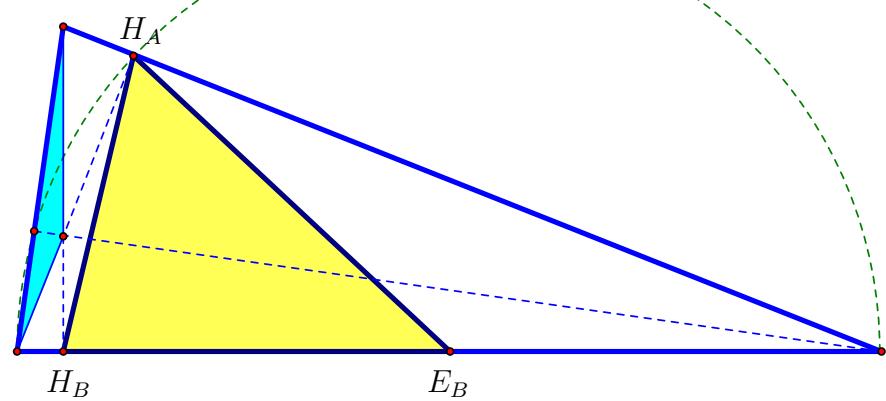
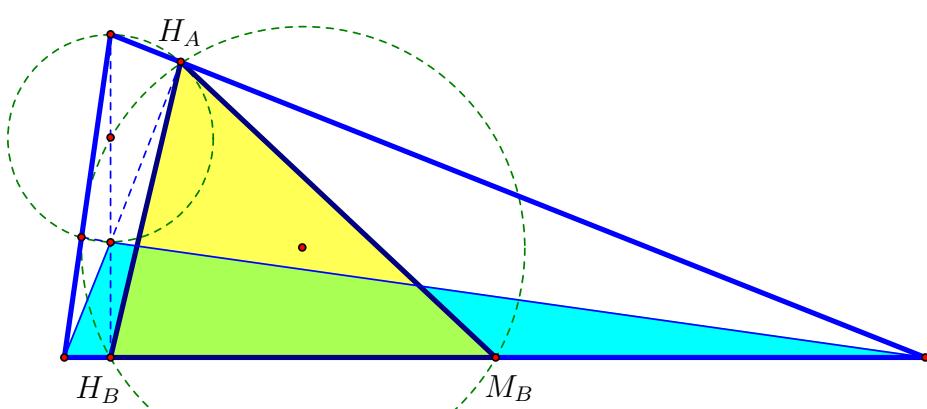
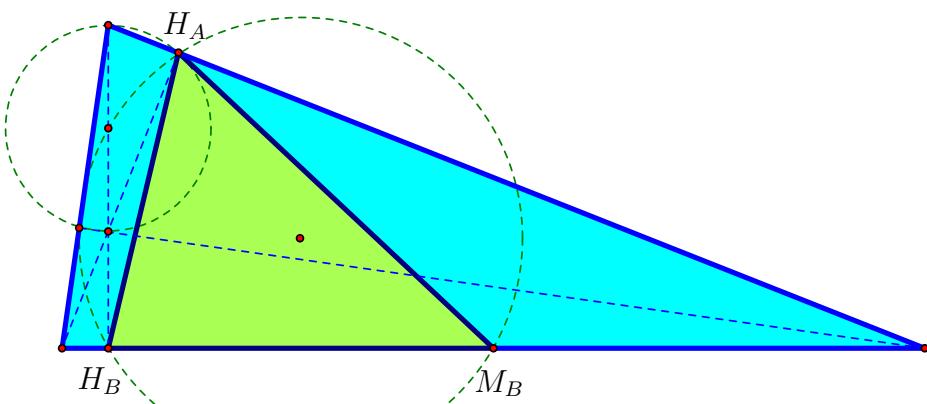
3.2.2 Основания высот и середины. Невырожденный случай

Теперь перейдем к случаю, когда среди выбранных трех точек два основания высоты. Напомним, что тройки точек H_A, H_B, M_C и H_A, H_B, E_C доставляют вырожденные случаи и будут рассмотрены позднее.

Задача 3.10. Постройте треугольник, для которого вершины исходного будут точками

- a) H_A, H_B, M_B ;
- б) H_A, H_B, E_B .

Обратите внимание, что в каждом из пунктов искомый треугольник не единственный! Их два! Как видно из рисунков справа, все четыре треугольника, построенные в задаче выше, образуют естественную конструкцию: большой треугольник на верхнем рисунке и три треугольника, естественно связанные с его ортоцентром.



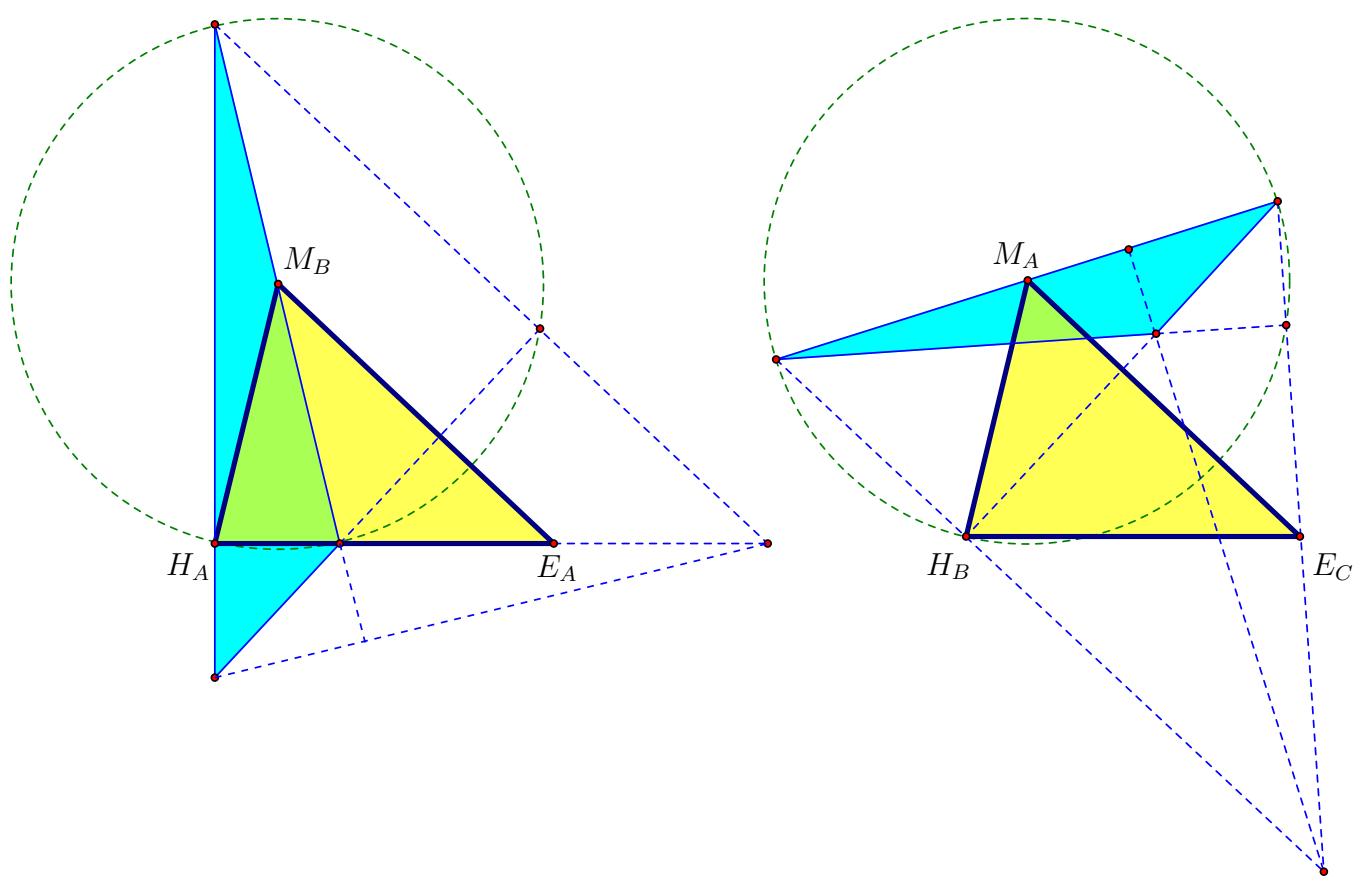
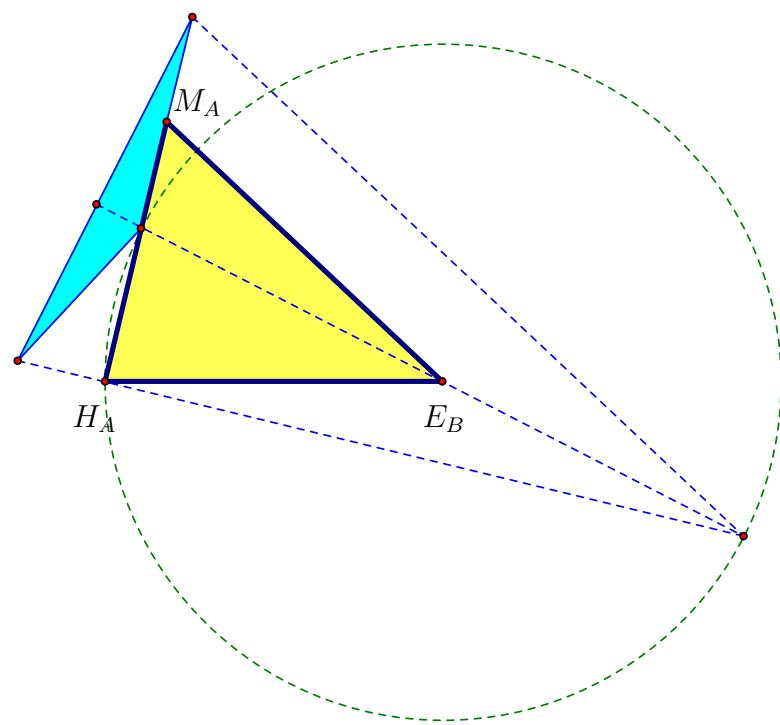
3.2.3 M, H и E . Невырожденный случай

Среди невырожденных случаев остается всего три. В каждом из них тройка точек собрана из одной середины стороны, одного основания высоты и одной точки E .

Задача 3.11. Постройте треугольник, для которого вершины исходного будут точками

- а) M_A, H_A, E_B ;
- б) M_B, H_A, E_A ;
- в) M_A, H_B, E_C .

Сколько треугольников можно построить в каждом из пунктов выше?



3.2.4 Прямоугольники Эйлера. Вырожденный случай

Теперь мы приступаем к вырожденным случаям. Что повлекут за собой ограничения, налагаемые на исходный треугольник?

Если исходный треугольник может быть произвольным, то величины его углов и сторон дают значительную информацию об углах и величинах сторон исскомого треугольника. Трех параметров, как правило, достаточно, чтобы однозначно задать треугольник. Поэтому в невырожденном случае исходный треугольник дает вам три параметра и столько же необходимо для построения искомого треугольника Эйлера.

Если вы рассматриваете вырожденный случай, то исходный треугольник дает вам меньшее число параметров (прямоугольный треугольник задается двумя сторонами, как и равнобедренный и т.п.) Поэтому мы не можем однозначно отыскать три параметра, необходимые для построения искомого треугольника. Таким образом, у искомого треугольника появляется дополнительная степень свободы, что приводит к совершенно неожиданным результатам.

Начнем со случая трех середин.

Задача 3.12. Постройте треугольник, для которого вершины исходного будут точками

- a) M_A, M_B, E_B ;
- б) E_A, E_B, M_B .

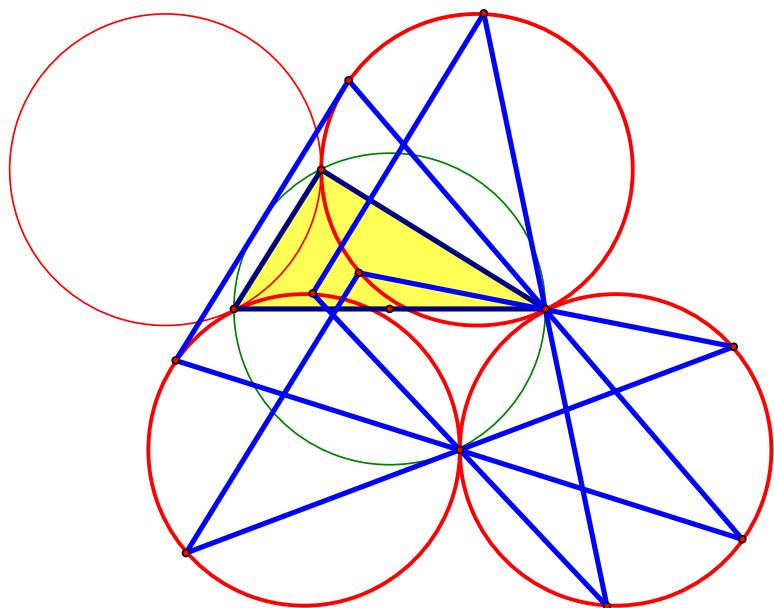
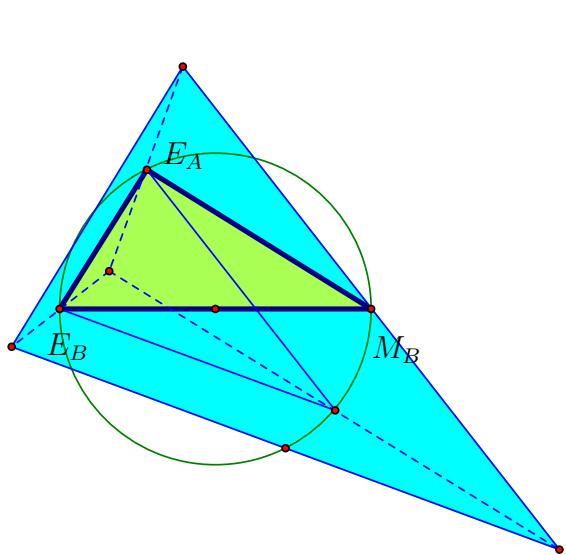
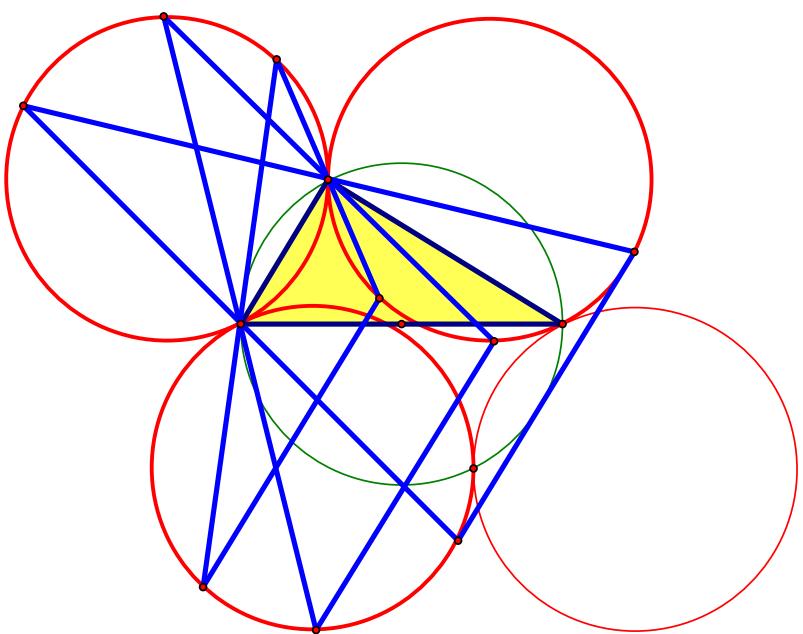
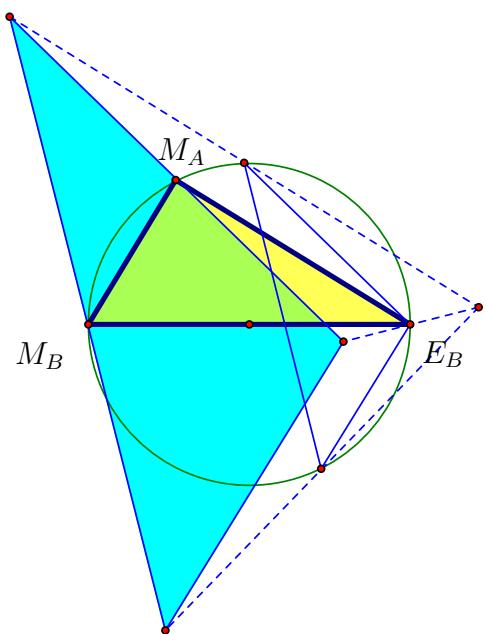
Обратите внимание, что каждая из этих трех точек является тройкой вершин прямоугольника Эйлера (смотрите раздел 1.4.1). Поэтому пункты а) и б) в задаче абсолютно аналогичны: можно считать, что дан прямоугольник Эйлера. Таким образом мы приходим к вопросу

- Как восстановить треугольник по его прямоугольнику Эйлера?

Например, прямоугольник Эйлера доставляет точки E_A, E_B . Если бы у нас была третья точка E_C , то треугольник строился бы мгновенно. Где же ее взять? Ответ очень прост: она может находиться где угодно на окружности Эйлера! А это означает, что каждому выбору точки E_C соответствует свой треугольник. То есть в данном случае может быть построено бесконечно много треугольников! На рисунках в правой колонке красные окружности являются геометрическим местом точек, которому могут принадлежать вершины данного треугольника (тонкая красная окружность — это геометрическое место ортоцентров искомых треугольников).

Гипотеза 3.1. Геометрические места вершин искомого треугольника и его ортоцентра являются касающимися окружностями, причем точка касания лежит на окружности Эйлера треугольника ABC (см. рисунки справа).

Задача 3.13 (*). Докажите гипотезу 3.1.



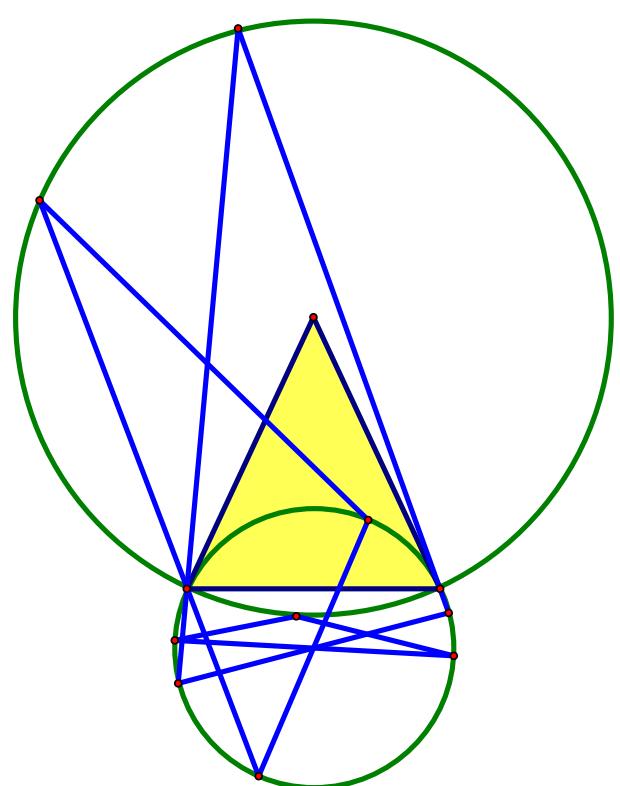
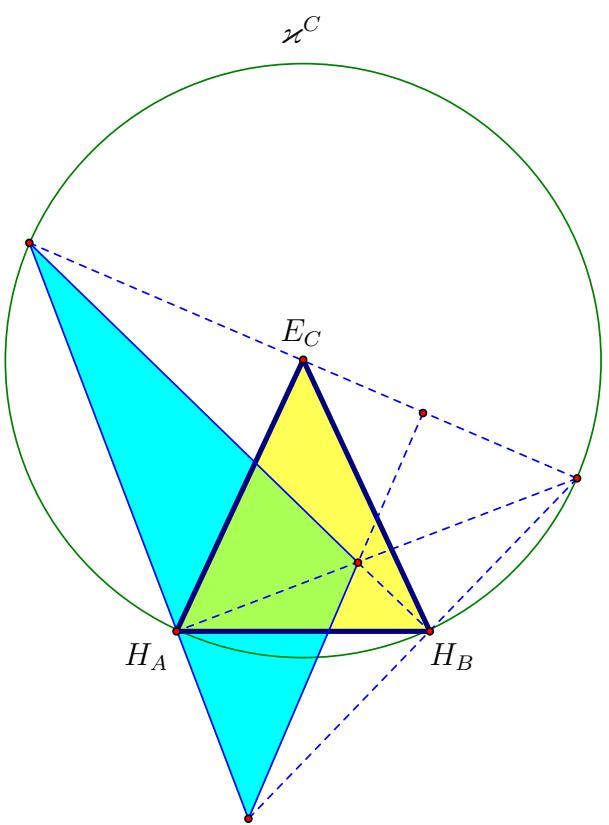
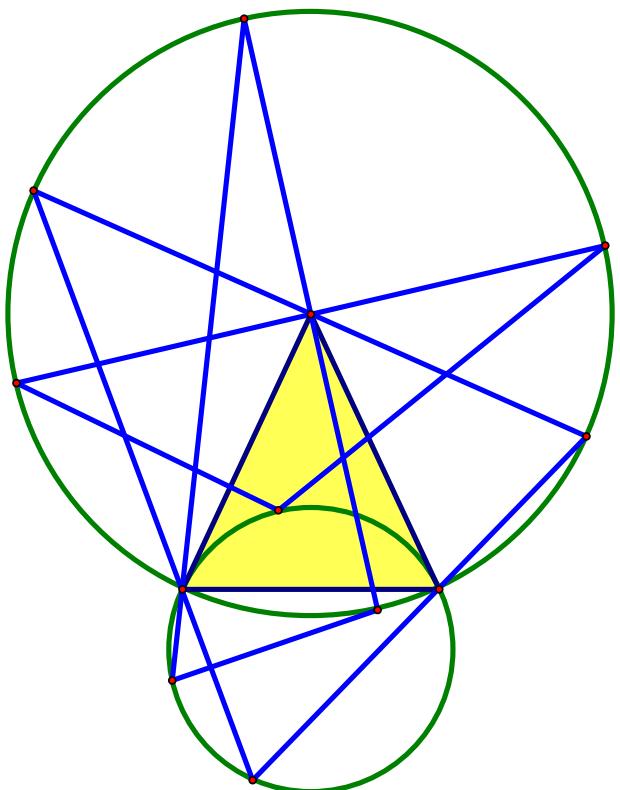
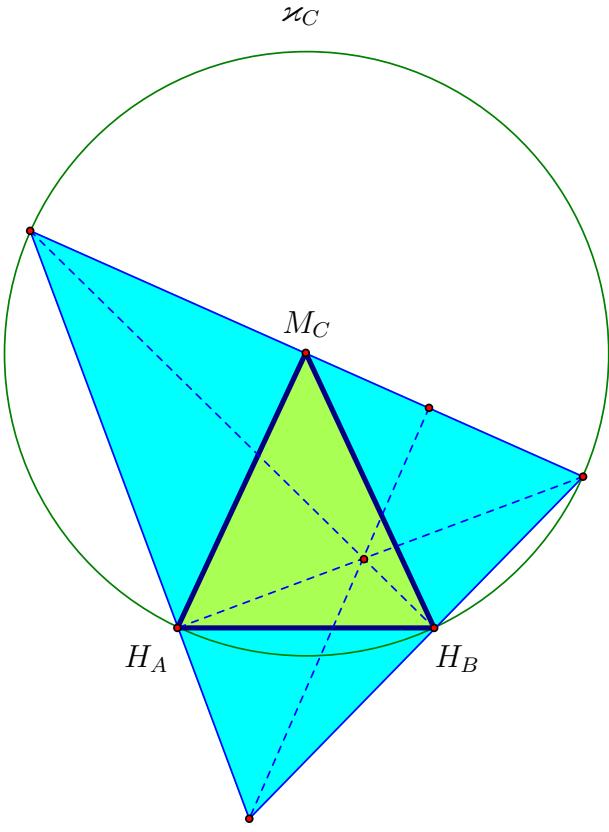
3.2.5 Окружности, связанные с высотами

Следующий вырожденный случай связан с конструкциями, включающими в себя равнобедренные треугольники.

Задача 3.14. Постройте треугольник, для которого вершины исходного будут точками

- а) H_A, H_B, M_C ;
- б) H_A, H_B, E_C .

В данном случае довольно понятно, что можно построить бесконечное множество искомых треугольников. Достаточно выбрать произвольный диаметр окружности κ_C с центром в точке M_C или κ^C с центром в точке E_C и радиусом, равным $M_C H_A$ или $E_C H_A$ соответственно. Тогда точки H_A и H_B будут вершинами прямых углов, смотрящих на выбранный диаметр.



3.2.6 Дельтоид и совпадающие индексы

В этот раздел попали две конструкции. Первая также связана с прямоугольником Эйлера, но ответ несколько отличается от результатов задачи 3.12.

Задача 3.15. Постройте треугольник, для которого вершины исходного будут точками M_A, H_A, E_A .

Вторая конструкция связана с дельтоидом, который впервые попал в поле нашего зрения при исследовании окружности Эйлера (см. раздел 1.2.2).

Задача 3.16. Постройте треугольник, для которого вершины исходного будут точками M_A, H_B, E_A .

Иными словами, мы приходим к вопросу

- Как восстановить треугольник по дельтоиду $E_A H_B M_A H_C$?

Ответ оказывается неожиданным. Дельтоид доставляет две окружности: κ^A и κ_A . На окружности κ^A с центром E_A будет лежать вершина A , а сторона BC будет диаметром κ_A . Опишем алгоритм построения искомого треугольника.

Выбираем произвольный диаметр окружности κ_A . Его концы будут точками B и C . Затем проводим прямые BH_C и CH_B . Удивительный факт состоит в том, что они пересекутся в точке, лежащей на κ^A ! Эта точка и будет третьей вершиной искомого треугольника.

В разделе 1.2.2 мы уже отмечали удивительное свойство дельтоида $E_A H_B M_A H_C$. А именно, его стороны являются касательными к окружностям κ^A и κ_A . При этом эти касательные пересекаются под прямым углом. В таком случае говорят, что сами окружности пересекаются в данной точке под прямым углом (или что они ортогональны: $\kappa^A \perp \kappa_A$).

Имеет место общее утверждение, называемое *леммой о перпендикулярных диаметрах*:

Задача 3.17. (*) Пусть ортогональные окружности пересекаются в точках M и N , AB — диаметр одной из них. Докажите, что тогда прямые AM, AN, BM, BN пересекают вторую окружность в концах диаметра, перпендикулярного AB .

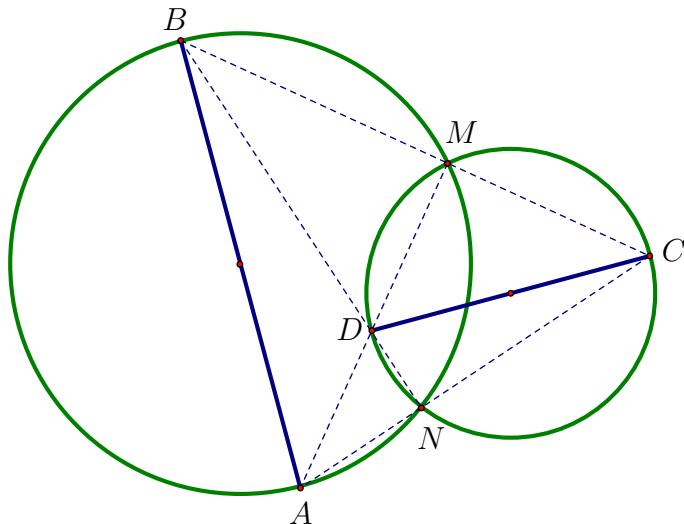
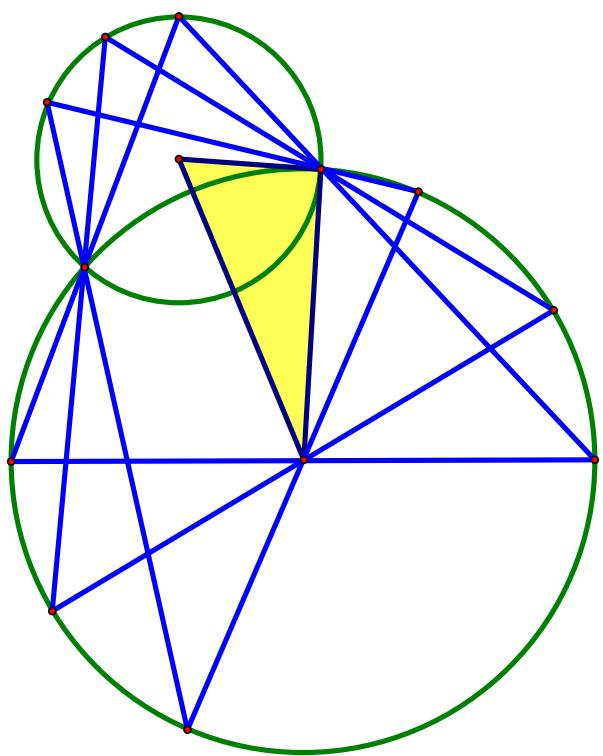
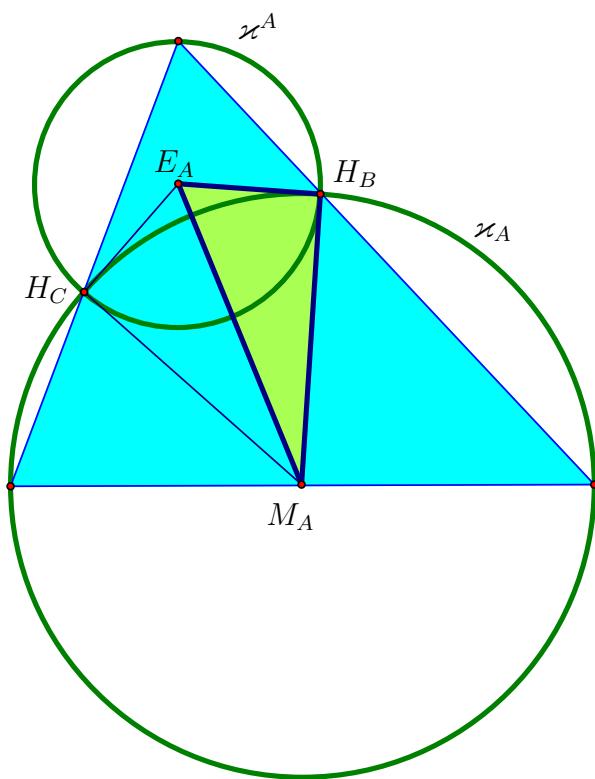
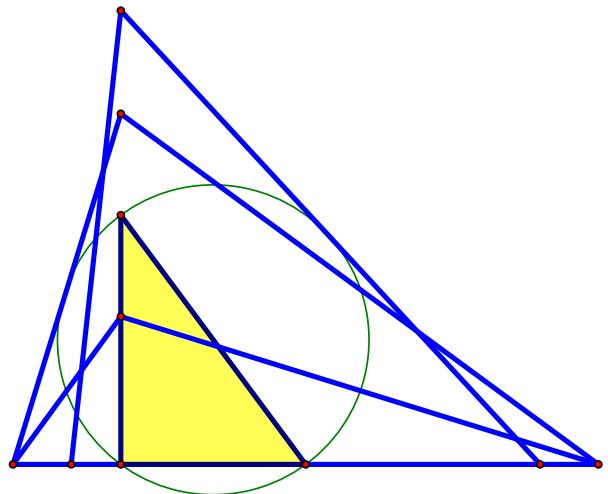
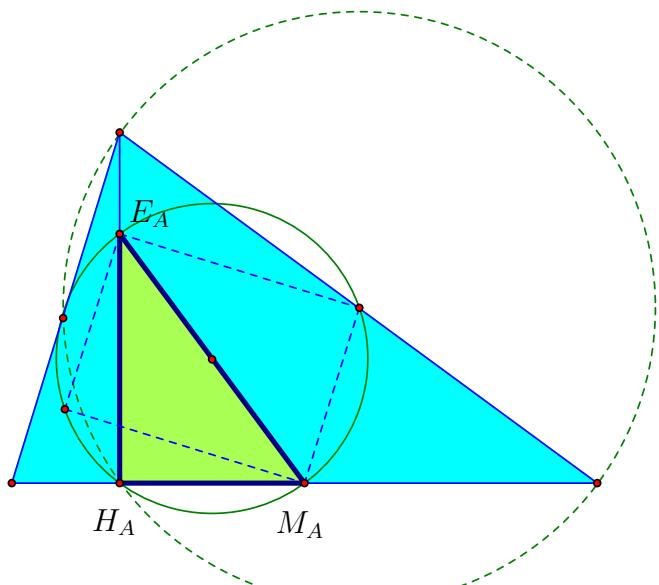


Рис. 3.14: Лемма о перпендикулярных диаметрах



В таблице ниже мы приводим краткую сводку полученных результатов. Отметим, что существует огромное множество способов построить искомый треугольник Эйлера, в графе «построение» мы указываем на лишь один из них.

Обозначения Ω_ε и \varkappa указывают, что в соответствующих случаях множество треугольников Эйлера параметризовано точкой, лежащей на окружности Эйлера или на окружности \varkappa .

Тройка точек	Построение	Кол-во тр-ов
M_A, M_B, M_C	Треугольник $A_M B_M C_M$	1
H_A, H_B, H_C	Треугольники $I_A I_B I_C, II_A I_B, II_B I_C, II_A I_C$	4
E_A, E_B, E_C	Треугольник $A_H B_H C_H$	1
M_A, M_B, H_C	Средняя линия + осевая симметрия	1
M_A, M_B, H_B	Медиана прямоугольного тр-ка	1
M_A, M_B, E_C	Средняя линия + два перпендикуляра	1
M_A, M_B, E_B	Прямоугольник Эйлера	$\infty (\Omega_\varepsilon)$
E_A, E_B, H_C	Средняя линия + осевая симметрия	1
E_A, E_B, H_B	Медиана прямоугольного тр-ка	1
E_A, E_B, M_C	Средние линии	1
E_A, E_B, M_B	Прямоугольник Эйлера	$\infty (\Omega_\varepsilon)$
H_A, H_B, M_C	\varkappa_A + произвольный диаметр	$\infty (\varkappa)$
H_A, H_B, M_B	Окружность Эйлера + \varkappa^A	2
H_A, H_B, E_C	\varkappa^A + произвольный диаметр	$\infty (\varkappa)$
H_A, H_B, E_B	Медиана прямоугольного тр-ка	2
M_A, H_A, E_A	Окружность Эйлера	$\infty (\Omega_\varepsilon)$
M_A, H_A, E_B	Медиана прямоугольного тр-ка	1
M_A, H_B, E_A	Дельтоид + перпендикулярные диаметры	$\infty (\varkappa)$
M_B, H_A, E_A	Медиана прямоугольного тр-ка	1
M_A, H_B, E_C	Медиана прямоугольного тр-ка	1

Глава 4

Прямая Эйлера

Данный сюжет является естественным развитием результатов, полученных нами в предыдущих главах. Главным героем этой главы будет прямая HO , проходящая через ортоцентр и центр описанной окружности произвольного треугольника. Как мы увидим, на эту прямую попадут и другие замечательные точки в треугольнике, связанные не только с высотами и серединными перпендикулярами, но и с окружностью девяти точек, с медианами и с биссектрисами. Тем самым мы задействуем все ключевые отрезки в треугольнике: высоты, биссектрисы, серединные перпендикуляры, медианы, средние линии.

Прямая Эйлера наряду с окружностью девяти точек является одним из фундаментальных объектов в геометрии, поэтому входит в обязательную программу физико-математических школ и кружков. Однако, как и в случае с окружностью девяти точек, прямая Эйлера изучается уже после того, как пройдена основная программа по геометрии, с привлечением мощной техники. В то же время с прямой Эйлера естественно связан ряд конструкций геометрии 7 класса.

Мы предлагаем подход, при котором знакомство с прямой Эйлера происходит в конце 7 класса после освоения первых шести параграфов учебника Погорелова. В том числе предполагаются известными

- признаки и свойства параллелограмма;
- теорема Фалеса и теорема о пропорциональных отрезках;
- теорема о пересечении медиан в треугольнике.

Отметим также, что предлагаемый нами путь отнюдь не искусственный! Представленные ниже конструкции вскрывают связь между фундаментальными объектами в треугольнике, причем делают это с неожиданной стороны.

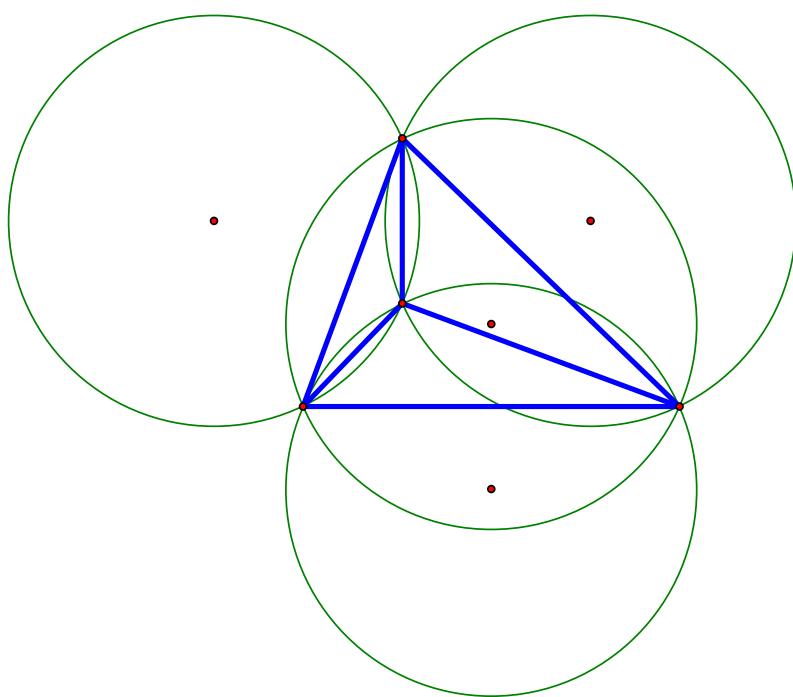
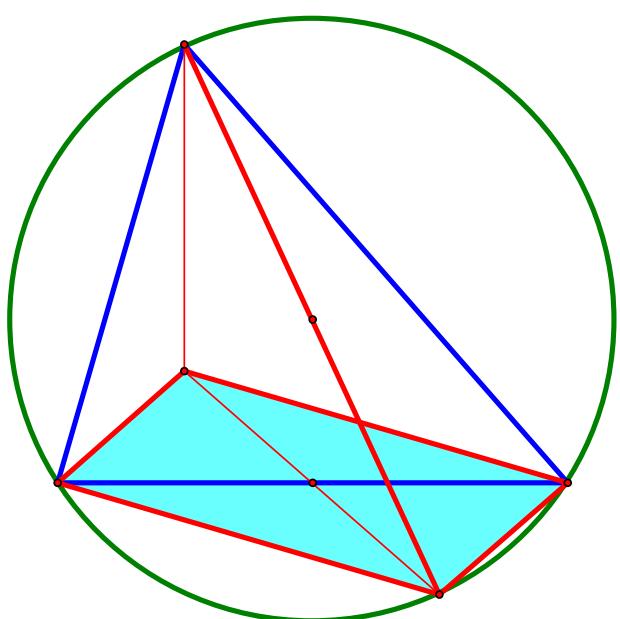
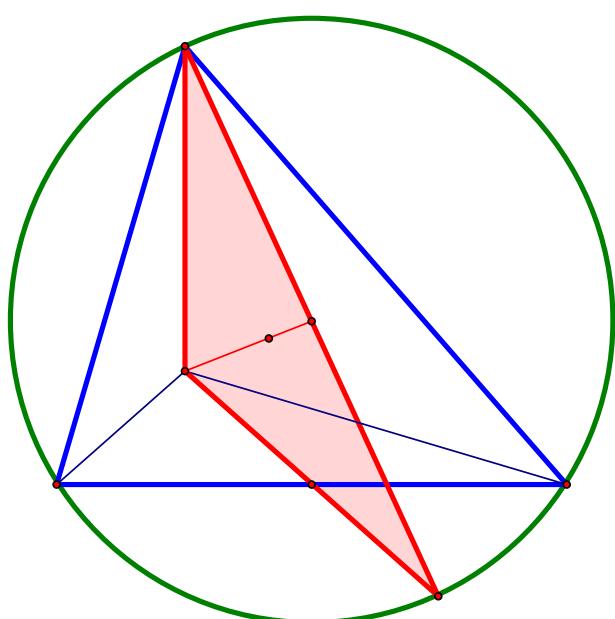
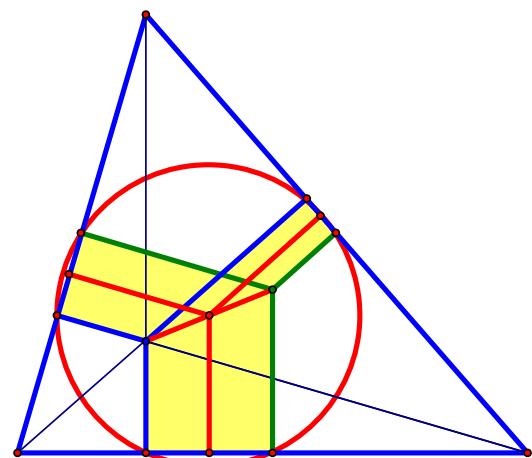
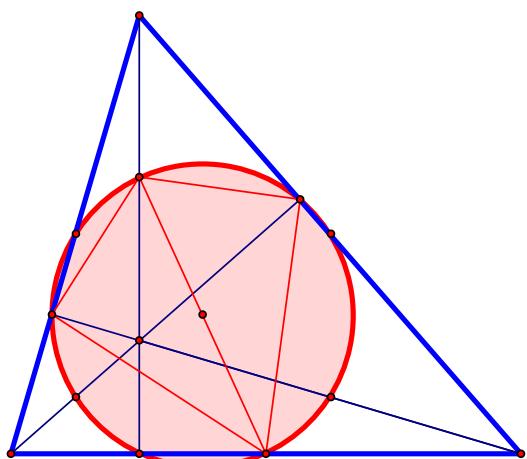
Скажем также несколько слов об истории открытия прямой Эйлера. Это было сделано самим Эйлером в 1765 году в работе под названием «*Solutio facilis problematum quorundam geometricorum difficillimorum*»¹. Нельзя не упомянуть о стиле рассуждений Эйлера. Мы с вами привыкли к рассуждениям геометрического характера: для доказательства утверждений используются фундаментальные свойства геометрических фигур. Эйлер же использовал аналитический подход². По всей видимости, его целью была демонстрация мощи и универсальности такого подхода.

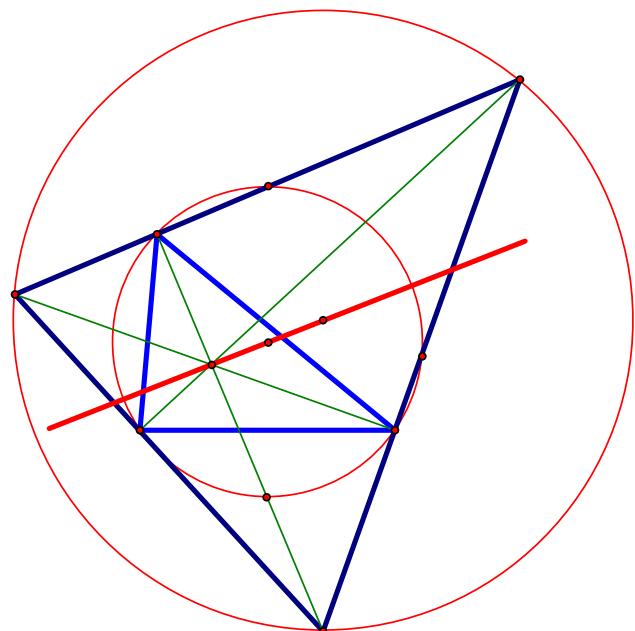
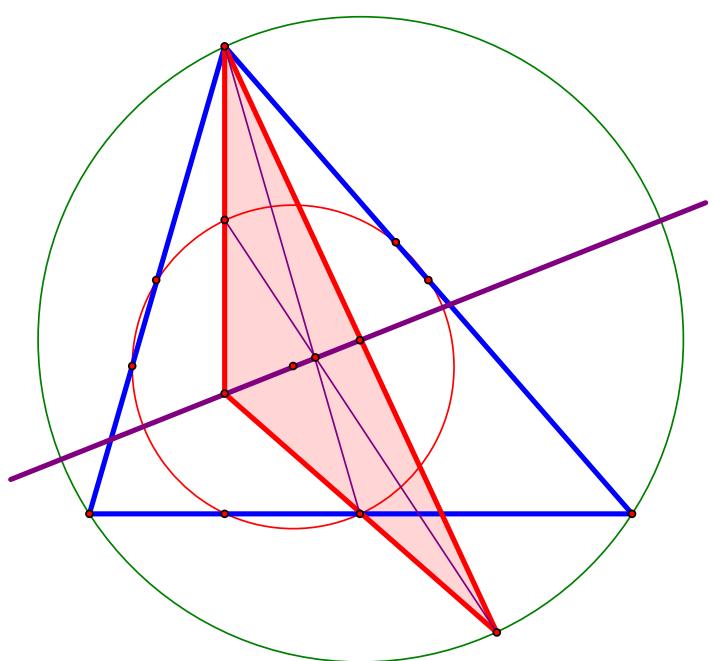
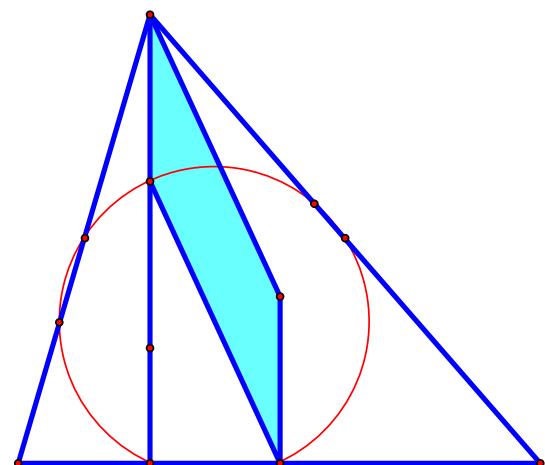
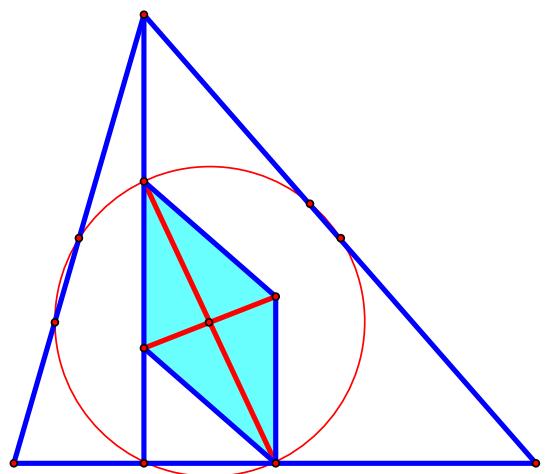
¹ В вольном переводе с латыни получается «О простом решении сложных геометрических задач». В свободном доступе имеется перевод этой статьи на английский.

² Грубо говоря, он явно вычислил, что несколько замечательных точек попадают на одну прямую, используя в основном алгебраический аппарат.

На всем протяжении этой главы сохранены стандартные обозначения, принятые нами ранее. Напомним их и введем несколько новых.

- M_A, M_B, M_C — середины сторон треугольника;
- H_A, H_B, H_C — основания высот;
- H, M, E, O — точки пересечения высот, медиан и центры окружности Эйлера и описанной окружности соответственно;
- E_A, E_B, E_C — середины отрезков, соединяющих вершины треугольника с точкой H .





4.1 Центр окружности Эйлера

Получив в главе 1 замечательный результат о существовании окружности девяти точек, мы вправе задать естественный вопрос: что можно сказать о центре этой окружности? Его мы будем обозначать через E .

Начнем с эксперимента. Заметим, что окружность Эйлера проходит через середины сторон треугольника, а с этими точками естественным образом связан центр описанной окружности треугольника. Поэтому имеет смысл включить его в наше рассмотрение.

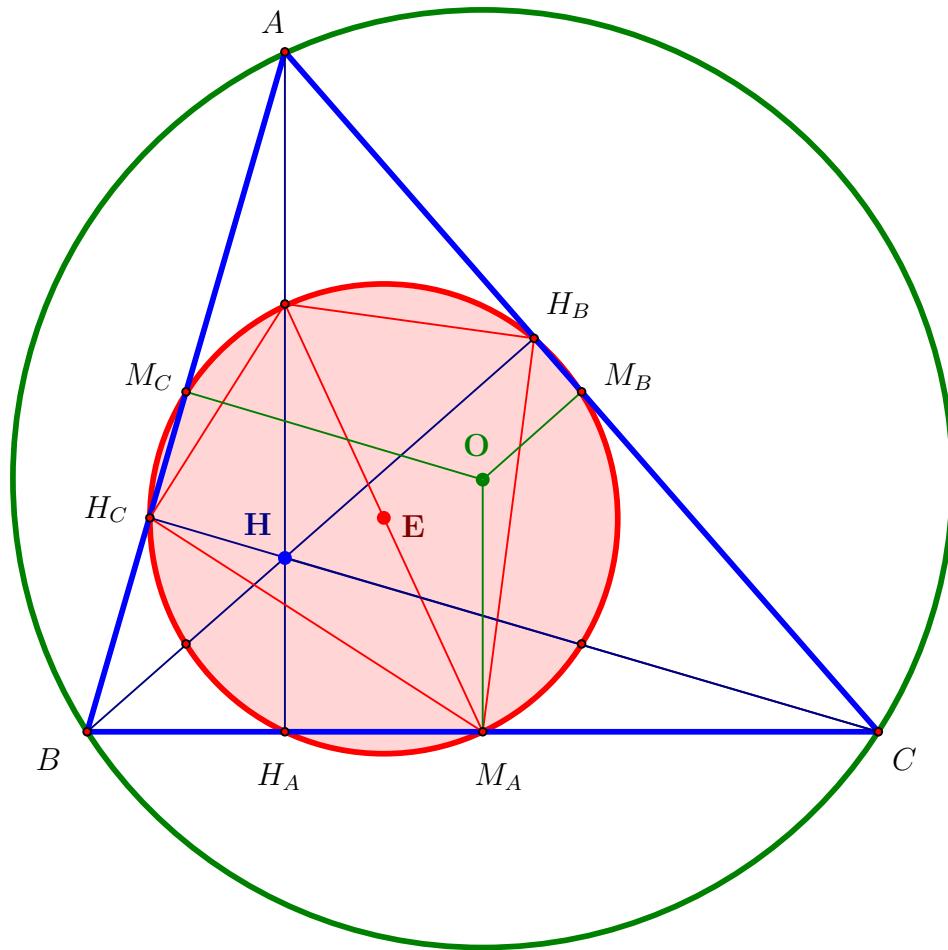


Рис. 4.1: Точки E , H и O

Что можно сказать о взаимном расположении точек H , E и O ?

Гипотеза 4.1.

- a) Точки H , E , O лежат на одной прямой.
- б) Точка E является серединой отрезка HO .

Как доказать эту гипотезу? Нужно как-то связать точки H и O с окружностью Эйлера и ее центром. O есть точка пересечения перпендикуляров к сторонам треугольника, проведенных через их середины. Высоты, пересекающиеся в точке H , также перпендикулярны сторонам треугольника, а отрезки $H_A M_A$, $H_B M_B$ и $H_C M_C$ — хорды окружности Эйлера (см. рис. 4.2).

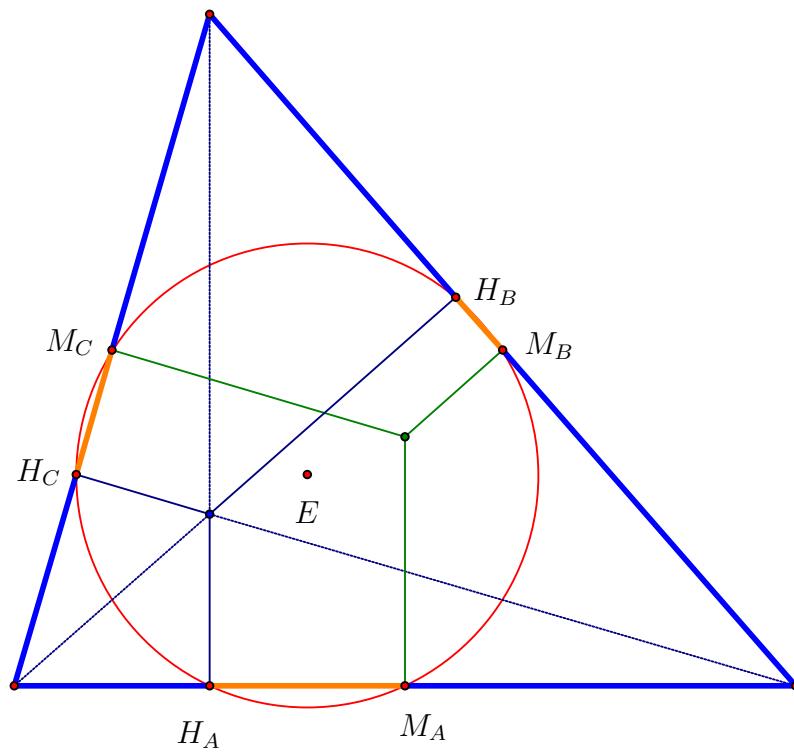


Рис. 4.2: Хорды окружности девяти точек

Задача 4.1. Докажите гипотезу 4.1 (см. рис. 4.3).

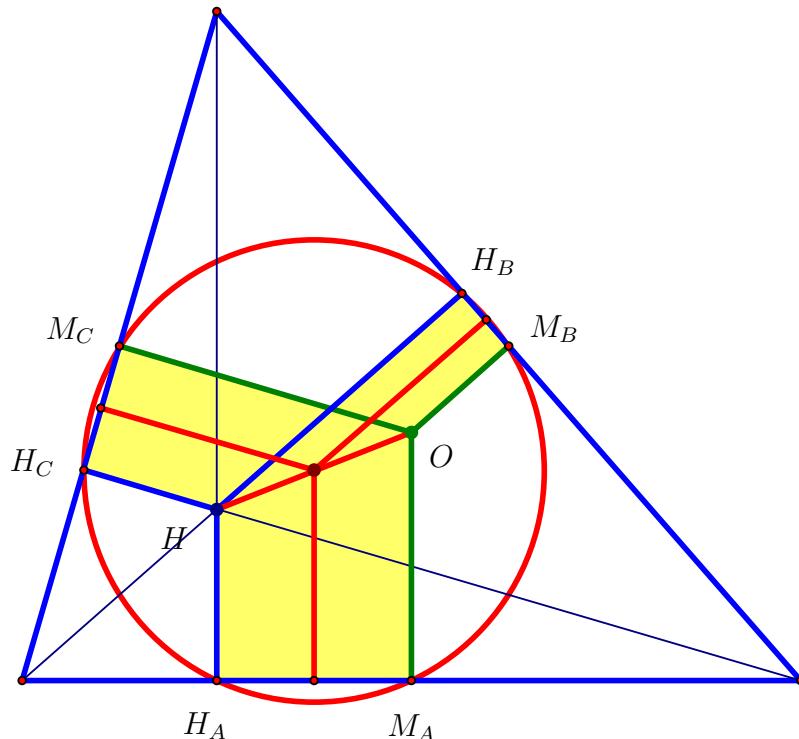


Рис. 4.3: Точки H, E, O лежат на одной прямой

4.2 Параллелограммы Эйлера

С точкой E связана еще одна замечательная конструкция.

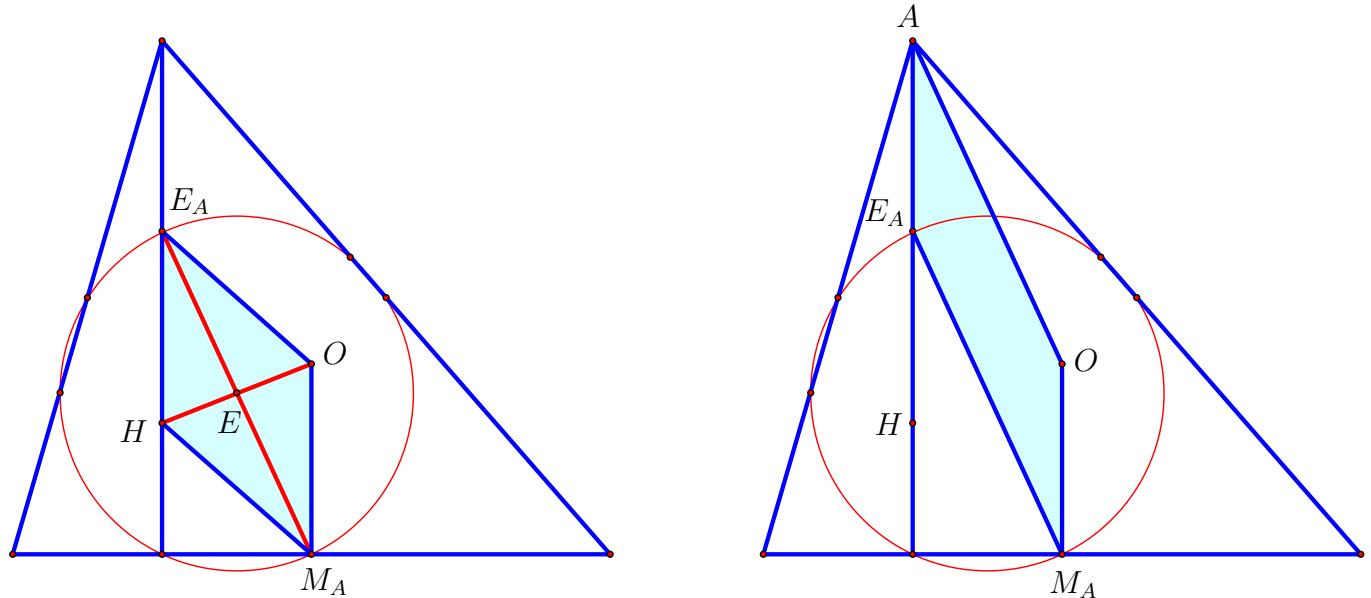


Рис. 4.4: Параллелограммы Эйлера

Задача 4.2. Докажите, что четырехугольник HE_AOM_A является параллелограммом (см. рис. 4.4).

Задача 4.3. Докажите, что четырехугольник $E_AAO_M_A$ является параллелограммом (см. рис. 4.4).

Эти параллелограммы мы будем называть первым и вторым параллелограммом Эйлера соответственно. Используя их, можно доказать некоторые замечательные факты, связанные с окружностью девяти точек. Остановимся на двух из них.

Задача 4.4. Докажите, что $AH = 2 \cdot OM_A$.

Задача 4.5. Докажите, что $R = 2 \cdot R_E$, где R – радиус описанной окружности, а R_E – радиус окружности девяти точек.

Результат задачи 4.5 для нас вполне ожидаем, как показывает рисунок 4.5. Действительно, зеленый треугольник «в два раза меньше» синего, поэтому его описанная окружность «в два раза меньше» описанной окружности синего. А зеленая окружность как раз является окружностью девяти точек синего треугольника! Такие наглядные соображения формализуются с помощью понятия *гомотетии*. О гомотетии и различных ее применениях пойдет речь в главе 11.

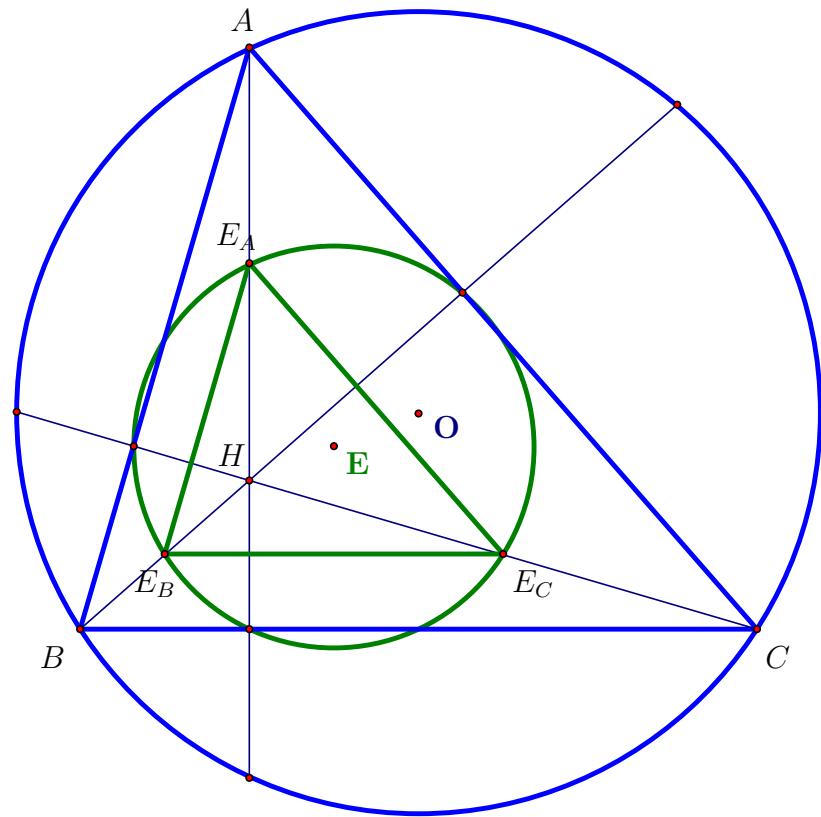


Рис. 4.5: $\triangle ABC$ «в два раза больше», чем $\triangle E_A E_B E_C$

Теперь мы готовы включить в наши исследования медианы треугольника.

4.3 Точка пересечения медиан треугольника

С серединами сторон в треугольнике связаны не только серединные перпендикуляры, но и медианы. Нам также известно, что медианы в треугольнике пересекаются в одной точке, которую мы будем обозначать через M . Кроме того, мы знаем, что точка M делит каждую медиану в отношении $2 : 1$, считая от вершины.

Естественно спросить, связана ли как-то точка пересечения медиан с исследуемыми нами конструкциями?

Наблюдение, представленное на рисунке 4.6, показывает, что да!

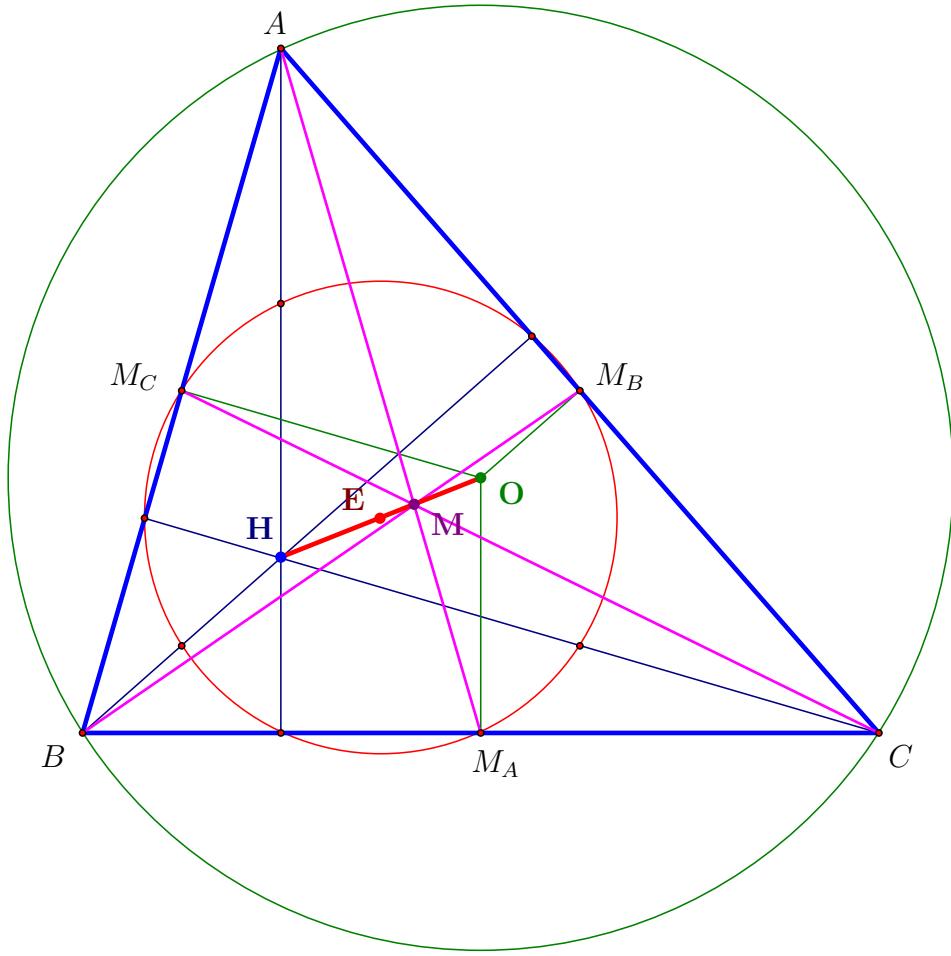


Рис. 4.6: Точка M и прямая HO

Гипотеза 4.2. Точки H, M, O лежат на одной прямой.

Следующий естественный вопрос: в каком месте отрезка HO расположена точка M ? Прямой подсчет³ позволяет сделать следующее предположение

Гипотеза 4.3. Точка M делит отрезок HO в отношении $2 : 1$, считая от точки H .

Как можно доказать гипотезы 4.2 и 4.3? За что зацепиться? Если говорить о гипотезе 4.2, то существует множество способов доказательства того, что некоторые точки лежат на одной прямой. Какой из них выбрать? Подсказку даст гипотеза 4.3. Посмотрим внимательнее на сформулированное в ней предположение: точка M делит отрезок HO в отношении $2 : 1$, считая от вершины. Где вы встречали такое отношение? Медианы треугольника и точка их пересечения!

Гипотеза 4.4. Существует треугольник с вершиной в точке H , одной из медиан которого является отрезок HO . Точка M будет точкой пересечения медиан этого треугольника.

³Проведенный, например, в Живой геометрии, где можно не только рисовать, но и считать длины отрезков и меры углов.

Отметим, что искомый треугольник должен быть как-то связан с точками H и O . Такой треугольник у нас уже появлялся в главе 3! Речь идет о треугольнике AHA' .

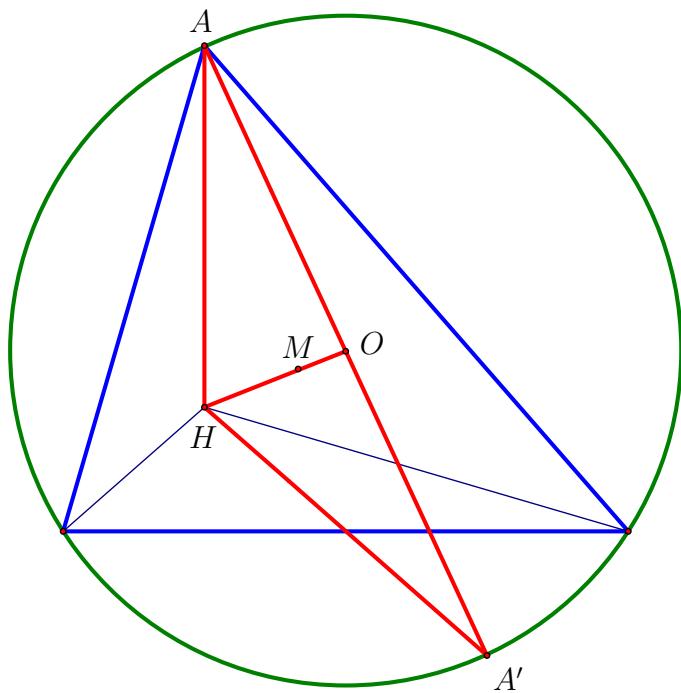


Рис. 4.7: Треугольник AHA'

Обратим внимание на вторую медиану этого треугольника.

Задача 4.6. Докажите, что отрезок AM_A также является медианой треугольника AHA' (см. рис. 4.8).

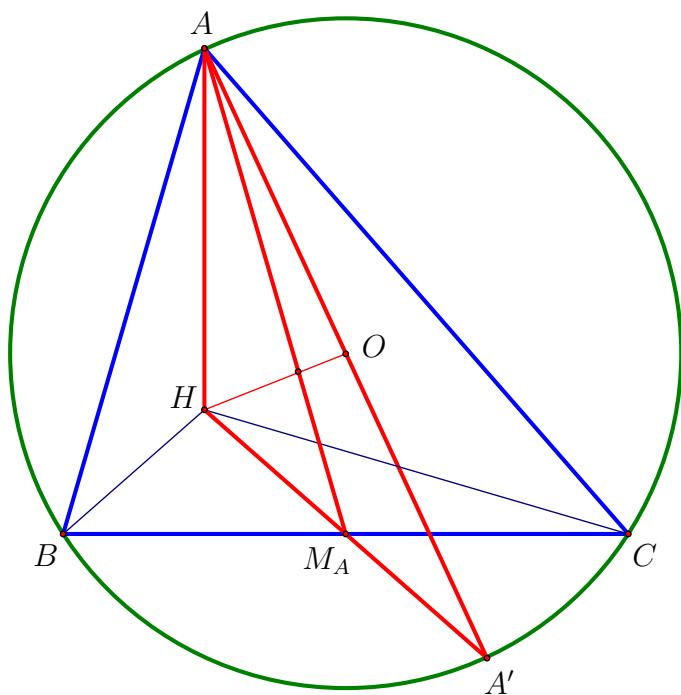


Рис. 4.8: AM_A — медиана двух треугольников

Теперь мы готовы перейти к доказательству гипотезы 4.4 и, тем самым, гипотез 4.2 и 4.3.

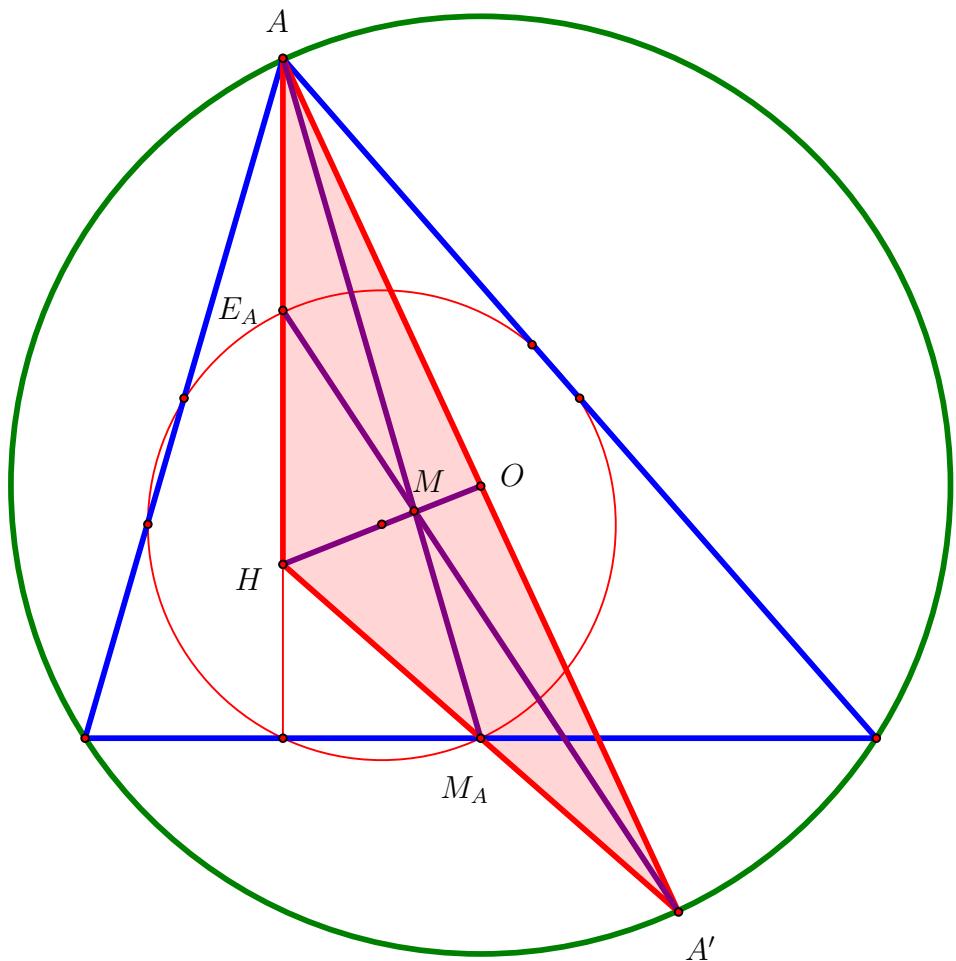


Рис. 4.9: $M \in (HO)$

Задача 4.7. Докажите гипотезы 4.4, 4.2 и 4.3.

Таким образом из известных нам замечательных точек в треугольнике в стороне от прямой Эйлера остались только точки, связанные с биссектрисами, а именно, I, I_A, I_B, I_C .

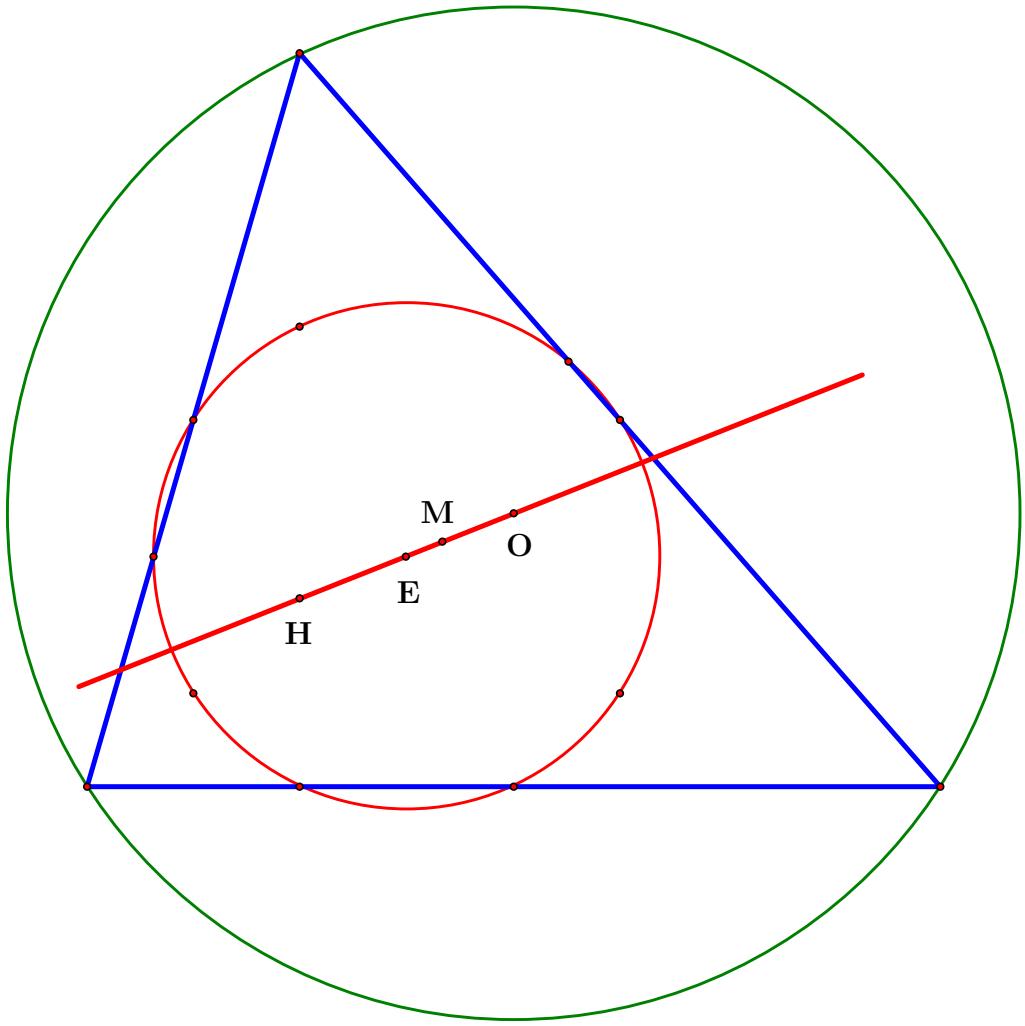


Рис. 4.10: Прямая Эйлера

4.4 Биссектрисы и прямая Эйлера

В главе 2 мы выяснили, что между биссектрисами и высотами существует определенная «двойственность». Биссектрисы и высоты произвольного треугольника ABC оказываются высотами и биссектрисами треугольников $I_A I_B I_C$ и $H_A H_B H_C$ соответственно.

Рассмотрим прямую IO и в силу соображений выше попробуем связать ее в треугольнике $I_A I_B I_C$ (см. рис. 4.11).

Задача 4.8. Докажите, что прямая IO является прямой Эйлера треугольника $I_A I_B I_C$.

Отсюда, в частности, следует замечательный факт: точки I, O, O_I , где O_I — центр описанной окружности треугольника $I_A I_B I_C$, лежат на одной прямой (см. рис. 4.11).

С точкой I естественно связан не только треугольник $I_A I_B I_C$, ортоцентром которого она является. Речь идет о треугольнике $A_1 B_1 C_1$, образованном точками касания сторон треугольника ABC с вписанной в него окружностью. Для треугольника $A_1 B_1 C_1$ точка I является центром описанной окружности.

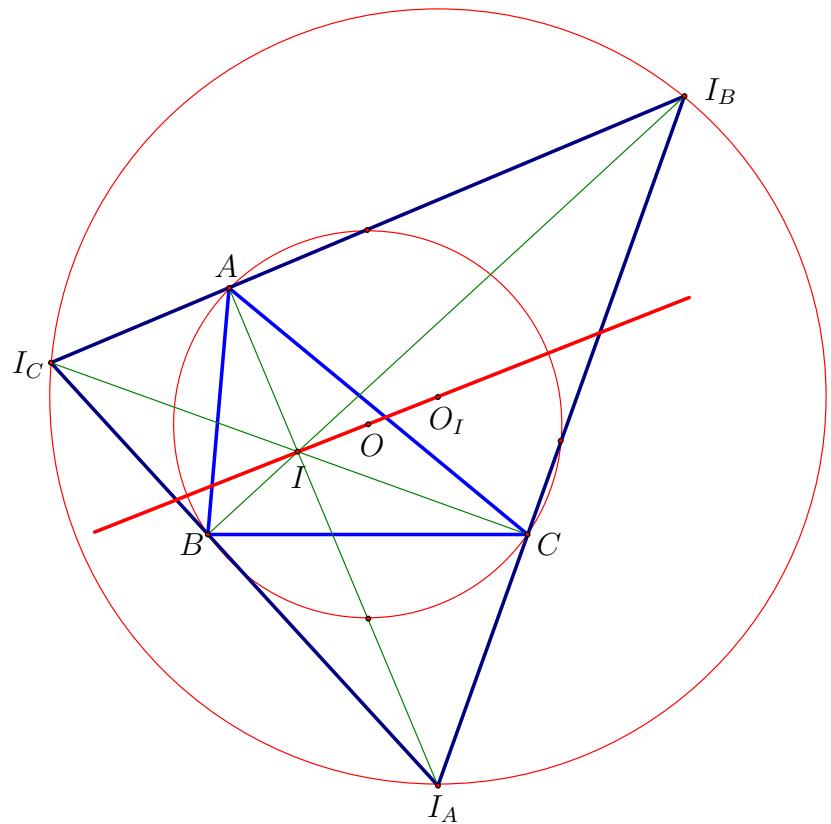


Рис. 4.11: Прямая IO и точка O_I

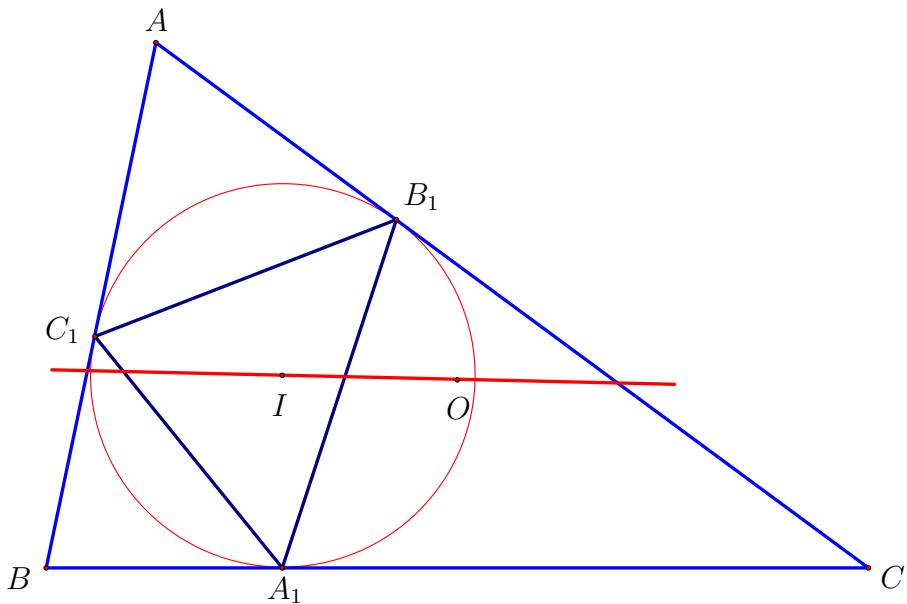


Рис. 4.12: Прямая IO и треугольник $A_1B_1C_1$

Оказывается, что прямая IO будет прямой Эйлера треугольника $A_1B_1C_1$! Это, в частности, означает, что у треугольников $I_AI_BI_C$ и $A_1B_1C_1$ одна и та же прямая Эйлера — IO . Более того, на этой прямой лежат другие, замечательные точки, связанные в том числе с W -треугольниками и не только. Подробнее об этом и других результатах, связанных с прямой IO и другими замечательными точками треугольника мы будем говорить в главе 11.

4.5 Глаз дракона

Обратим внимание на треугольники, которые естественно связаны с точкой H : ABH , BCH и ACH (эти четыре треугольника вместе образуют конфигурацию, которая и дала имя данному разделу). Эти треугольники нам уже встречались в задаче 1.14.

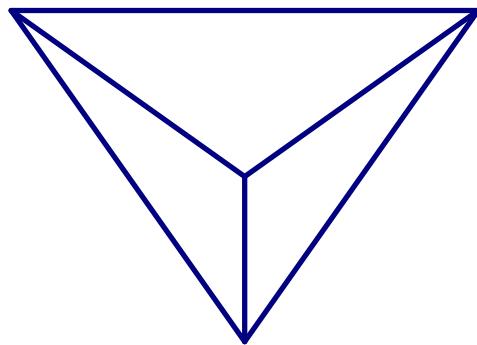


Рис. 4.13: Глаз дракона

Задача 4.9. Докажите, что радиусы описанных окружностей треугольников ABC , ABH , BCH и ACH равны (см. рис. 4.14).

Задача 4.10 (*). Докажите утверждение, обратное к утверждению задачи 4.9.

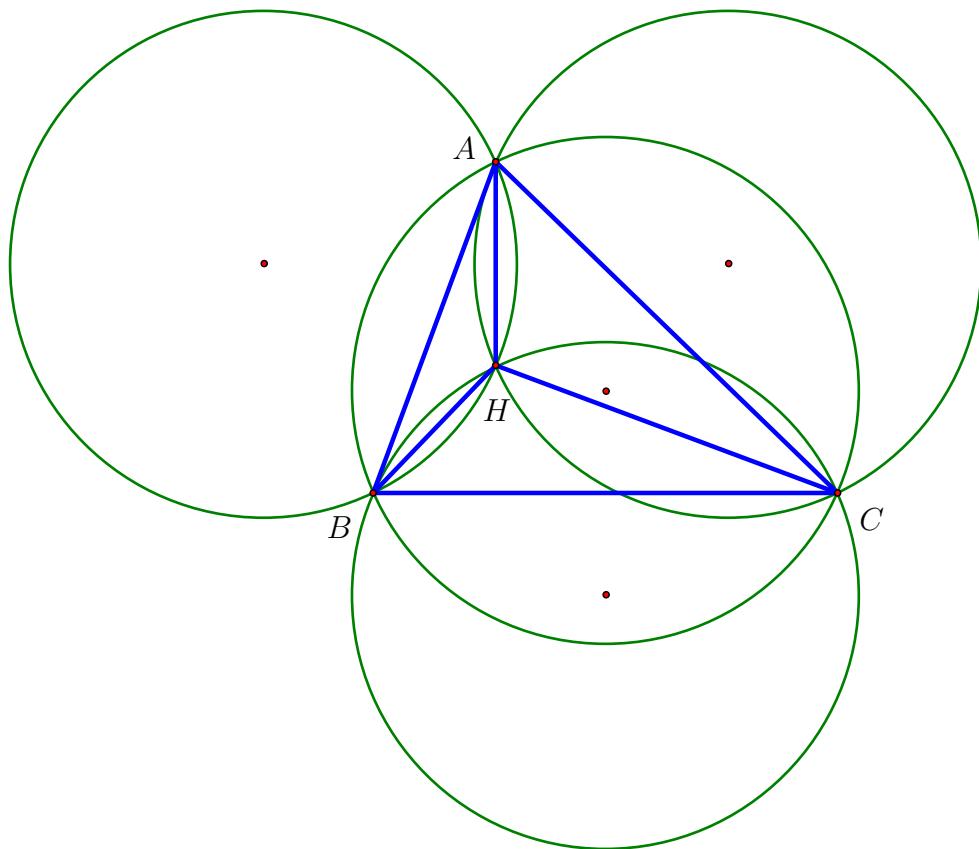


Рис. 4.14: Описанные окружности четырех треугольников

Задача 4.11. Докажите, что прямые Эйлера треугольников ABC , ABH , BCH и ACH пересекаются в одной точке (см. рис. 4.15). Что это за точка?

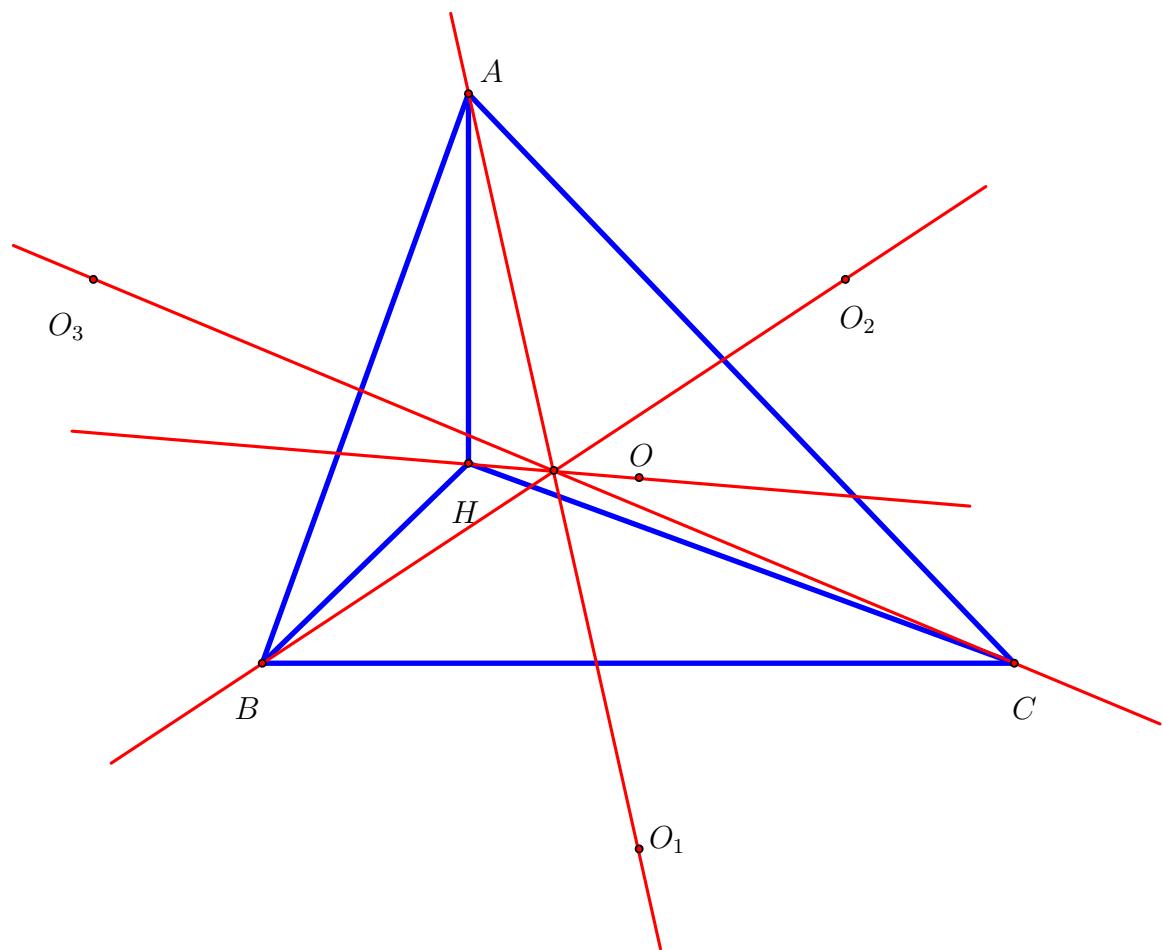


Рис. 4.15: Прямые Эйлера четырех треугольников

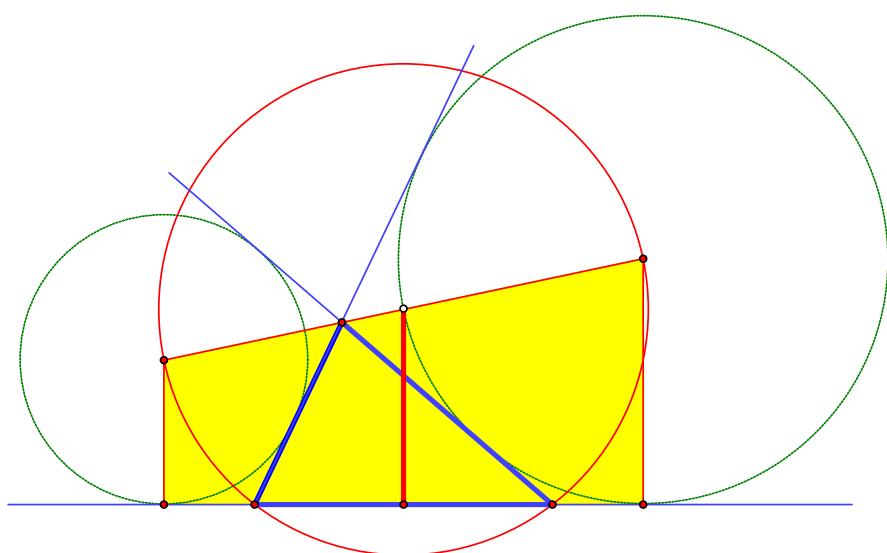
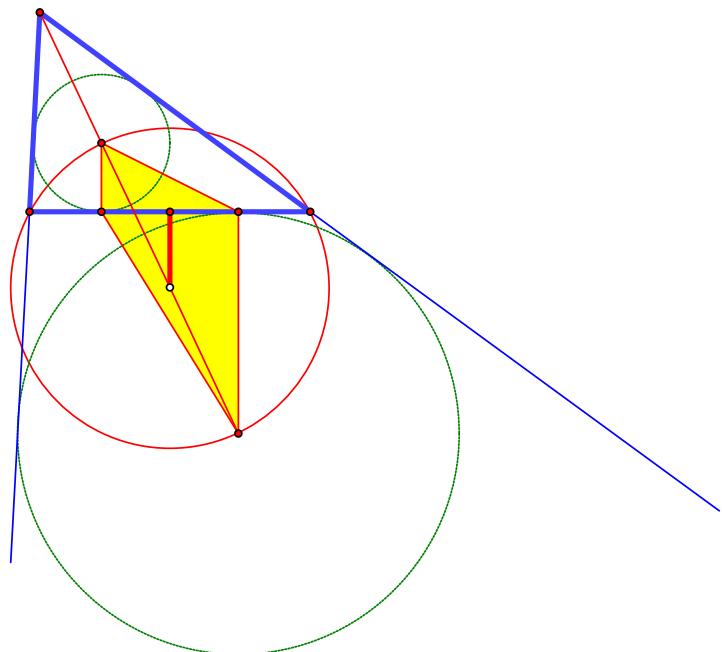
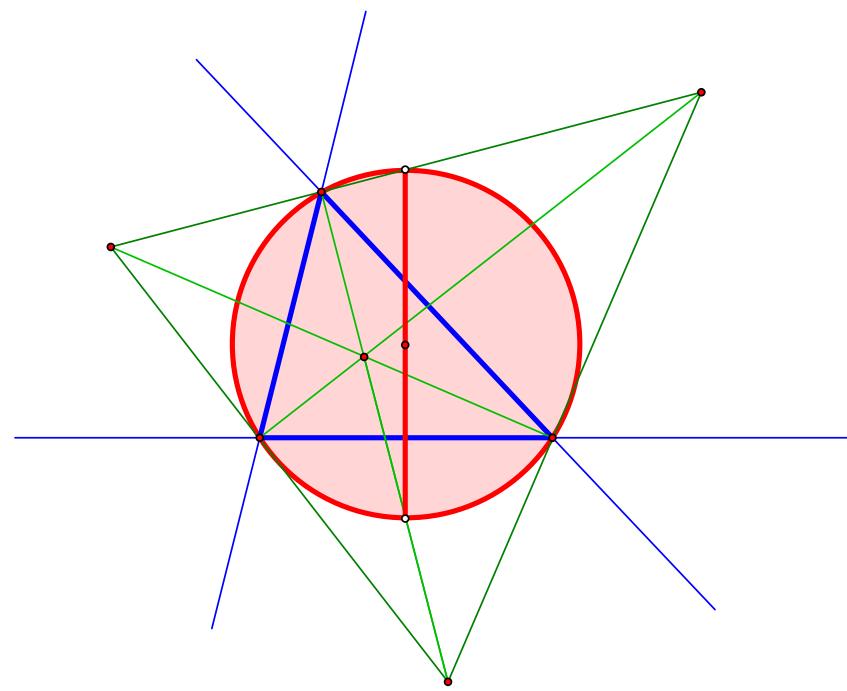
Глава 5

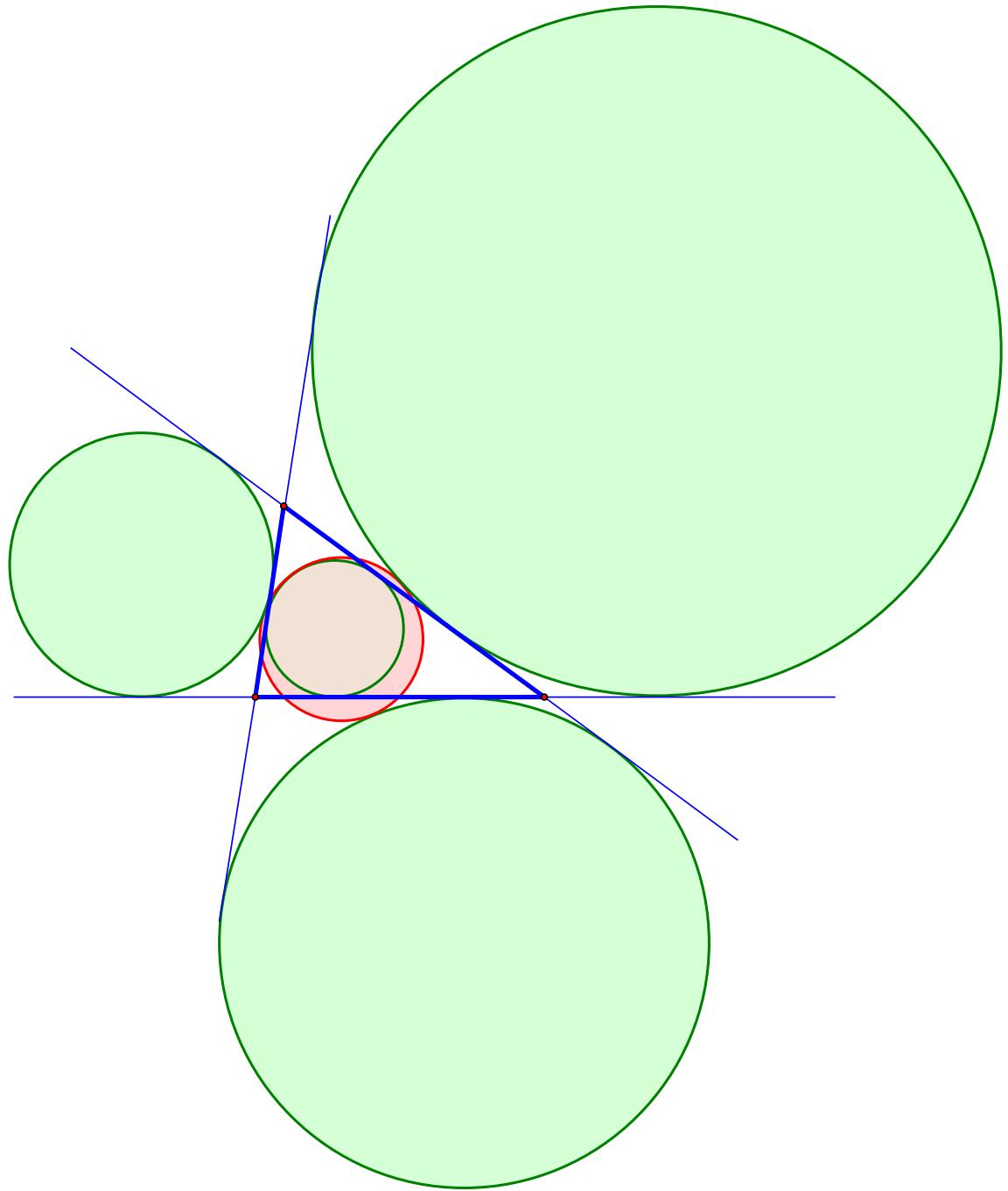
Формула Карно

Эта небольшая глава посвящена красивой связи между описанной, вписанной и вневписанными окружностями в треугольнике. Для этого нам понадобятся результаты глав 2 и 6.

Также мы обсудим нетривиальную связь этих замечательных окружностей с окружностью Эйлера в произвольном треугольнике.

Для освоения материала, представленного ниже, достаточно знания первых шести параграфов учебника Погорелова.





5.1 Пять радиусов

Цель этого раздела — доказательство удивительной связи между радиусами пяти окружностей, естественно связанных с произвольным треугольником

Теорема (Карно). *Обозначим через R, r, r_a, r_b, r_c радиусы описанной, вписанной и вневписанных окружностей треугольника ABC соответственно. Тогда*

$$r_c + r_b + r_c = 4R + r \quad (5.1)$$

Ключ к доказательству соотношения (5.1) лежит в подсчете длины отрезка $W_A W^A$ двумя способами.

Задача 5.1. Выразите длину отрезка $W^A M_A$ через радиусы r_b и r_c вневписанных окружностей треугольника ABC (см. рис. 5.1).

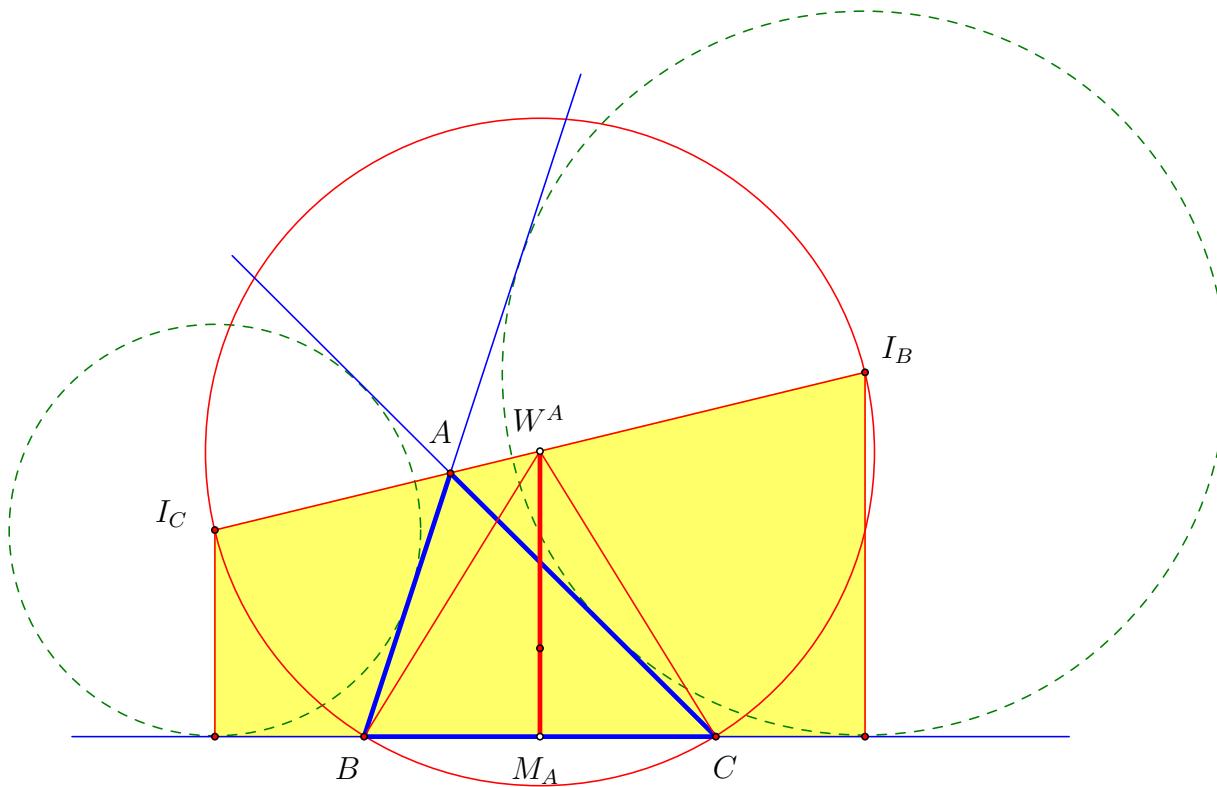


Рис. 5.1: Первая трапеция Карно

Задача 5.2. Выразите длину отрезка $M_A W_A$ через радиусы r и r_a вписанной и вневписанной окружностей треугольника ABC (см. рис. 5.2).

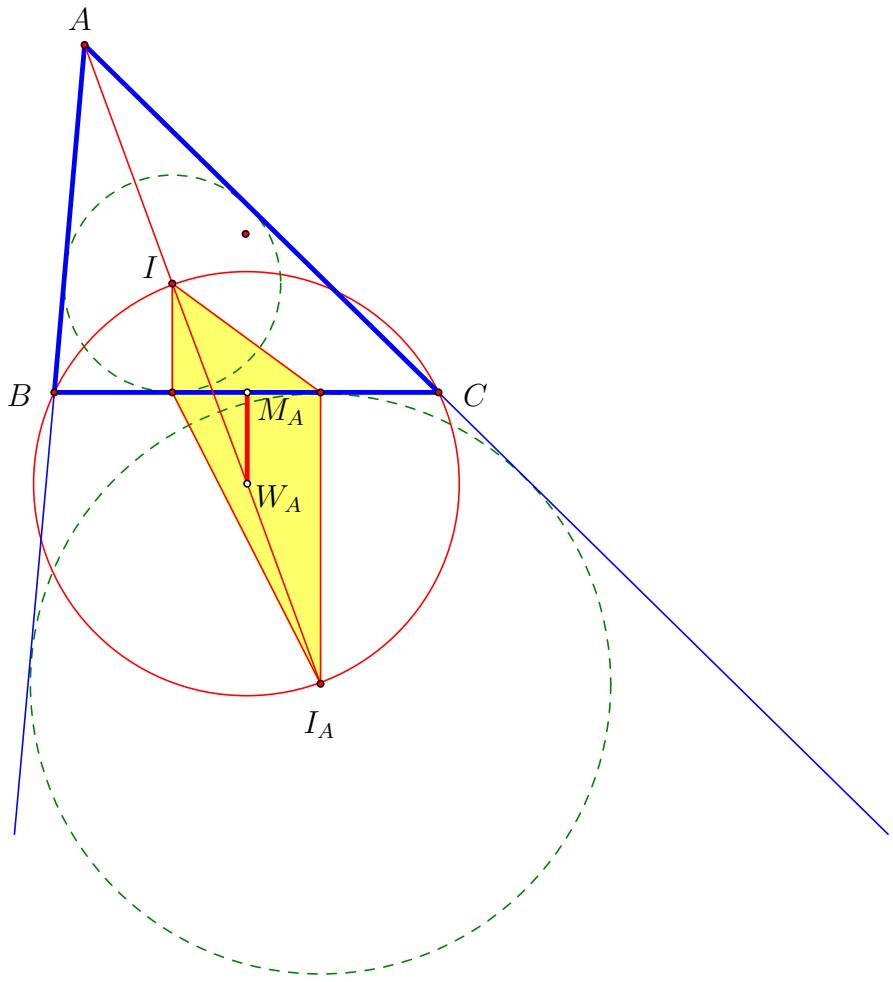


Рис. 5.2: Вторая трапеция Карно

Задача 5.3. Используя результат двух предыдущих задач, докажите теорему Карно.

5.2 Теорема Фейербаха

Обсуждая связи между окружностями в треугольнике, нельзя не упомянуть о замечательной теореме, связывающей окружность Эйлера произвольного треугольника с его вписанной и невнеписанными окружностями. Эта теорема была доказана Карлом Фейербахом в 1822 году¹.

Теорема (Фейербах). *Окружность девяти точек произвольного треугольника касается вписанной и всех трех невнеписанных окружностей этого треугольника (см. рис. 5.3).*

Точки касания этих окружностей называются точками Фейербаха².

¹Удивительно, но это работа была одной из первых, в которой появилась окружность девяти точек. Более того, в работе Фейербаха она появляется как окружность шести точек: на ней лежат основания высот и середины сторон исходного треугольника. О точках E_A, E_B, E_C не упоминается.

²Эти точки обладают множеством замечательных свойств. В частности, они лежат на описанной окружности треугольника, образованного основаниями биссектрис исходного треугольника.

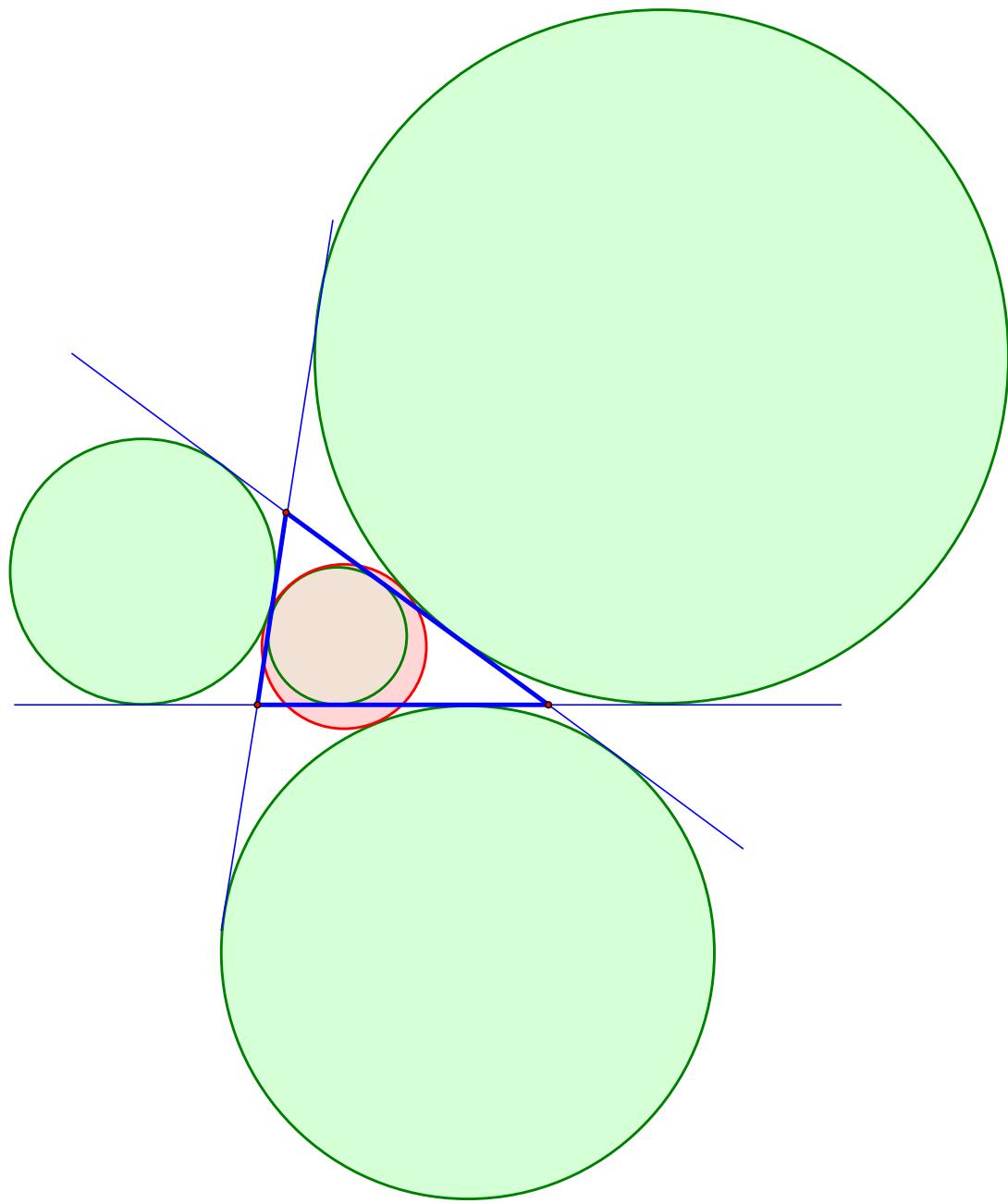


Рис. 5.3: Теорема Фейербаха

К сожалению, все известные авторам доказательства этой теоремы технически не просты и требуют техники, выходящей за рамки программы 7-8 классов.

Глава 6

Отрезки касательных

Данная глава является естественным продолжением исследования вписанной и вневписанных окружностей. Дело в том, что с вписанной в угол окружностью связаны два ключевых факта:

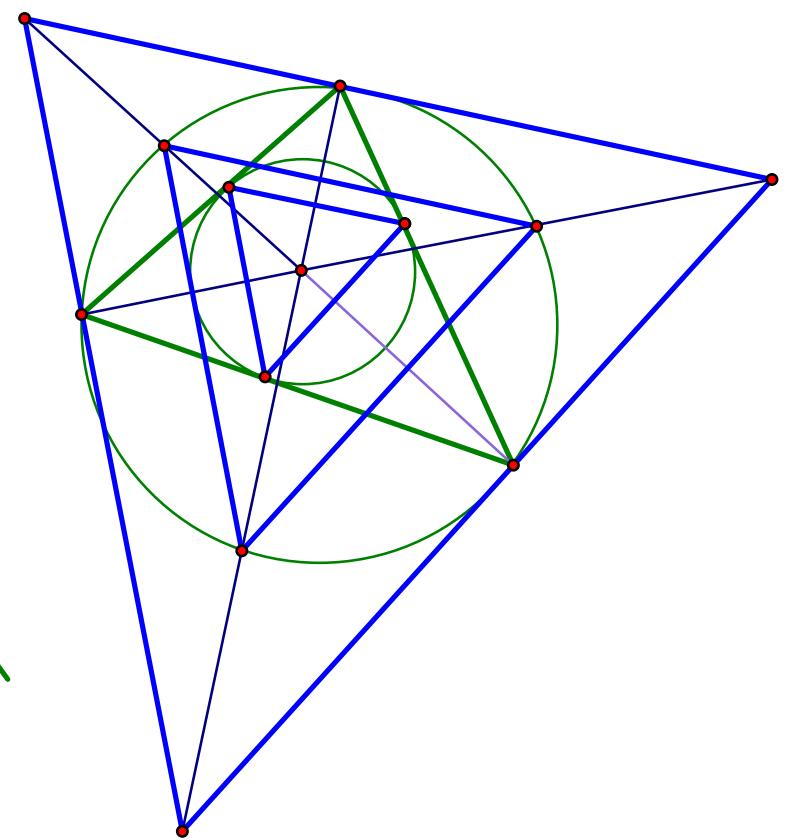
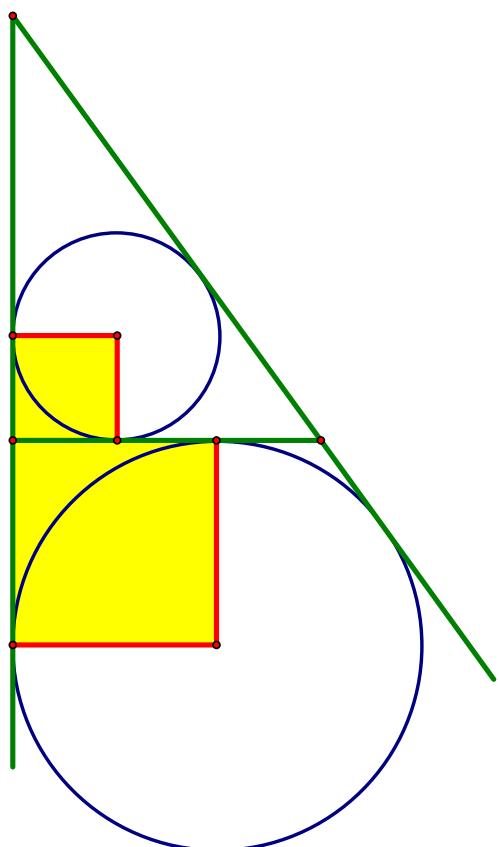
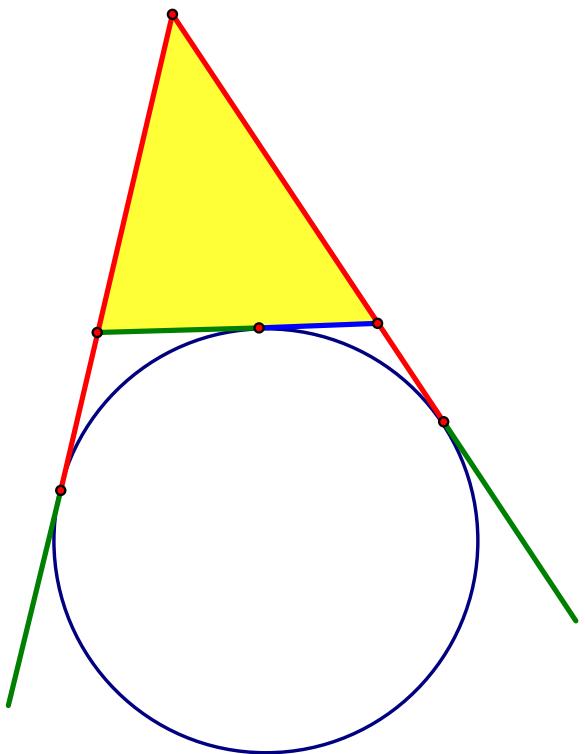
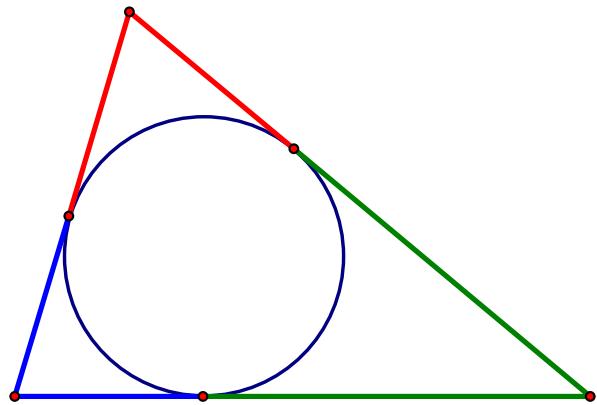
- а) ее центр лежит на биссектрисе угла;
- б) отрезки касательных равны.

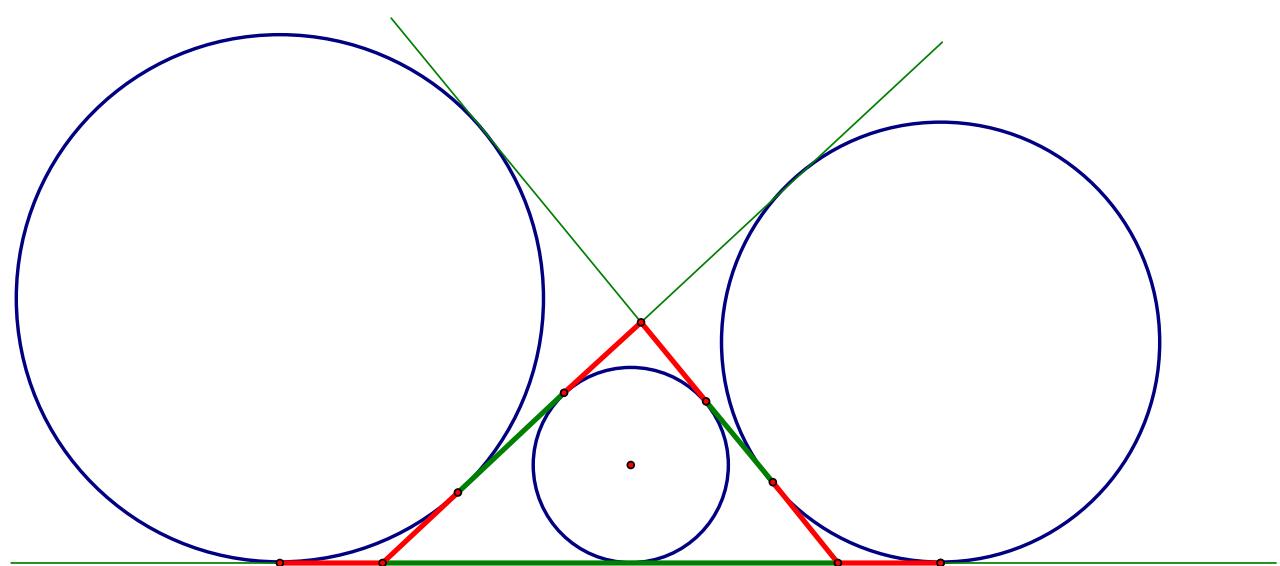
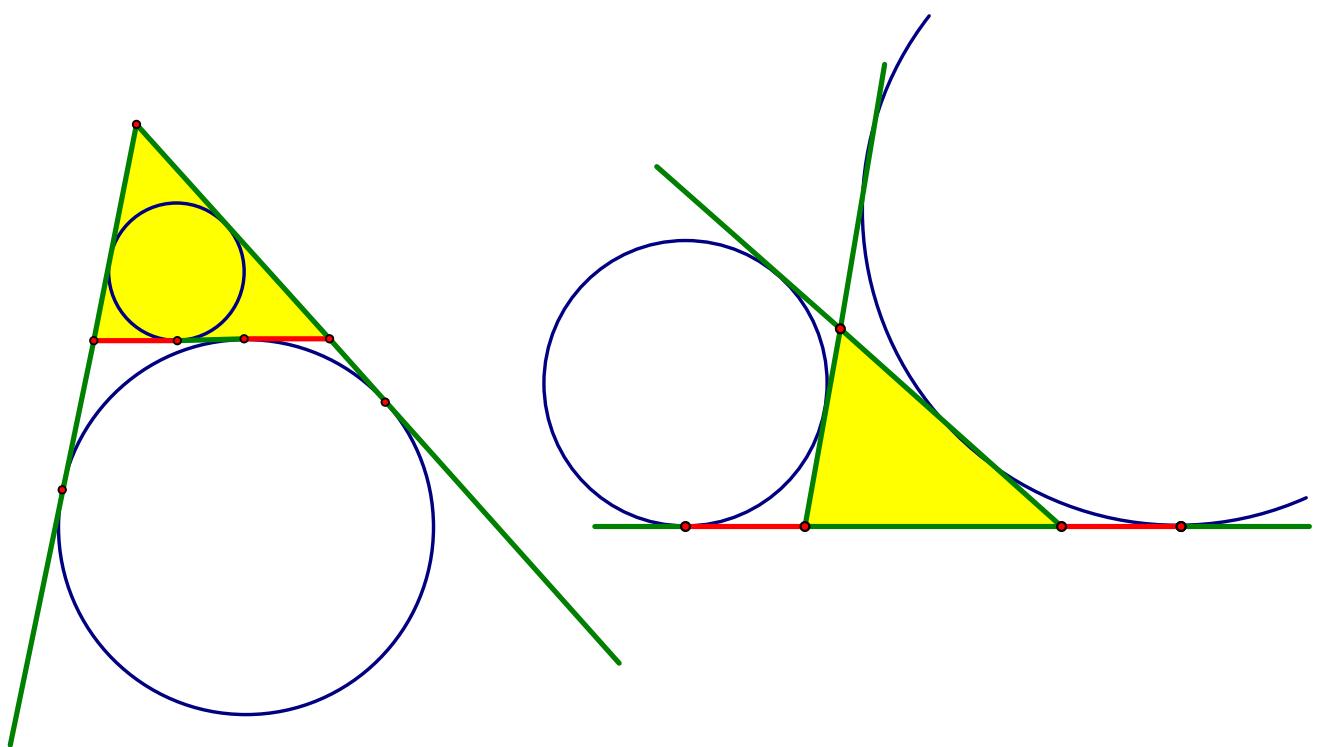
Первый из этих фактов привел нас к сюжету, описанному в предыдущей главе. Теперь рассмотрим несколько ключевых задач, связанных со вторым из них. Результаты, полученные в данной главе, носят опорный характер, поскольку постоянно используются при работе с касательными. В частности, они понадобятся нам в следующих главах. Исследование касательных и касающихся окружностей будет продолжено в главе 8.

Для освоения материала этой главы достаточно знания первых пяти параграфов учебника Погорелова.

Зафиксируем также стандартные обозначения.

- A_1, B_1, C_1 — точки касания вписанной окружности со сторонами BC, AC и AB треугольника соответственно;
- A_2, B_2, C_2 — точки касания вневписанных окружностей со сторонами BC, AC и AB треугольника соответственно.





6.1 Отрезки касательных вписанной и внеописанных окружностей

Начнем с двух вычислительных задач.

Задача 6.1. Зная длины сторон треугольника ABC ($AB = c$, $BC = a$, $AC = b$), вычислите длину отрезка AC_1 .

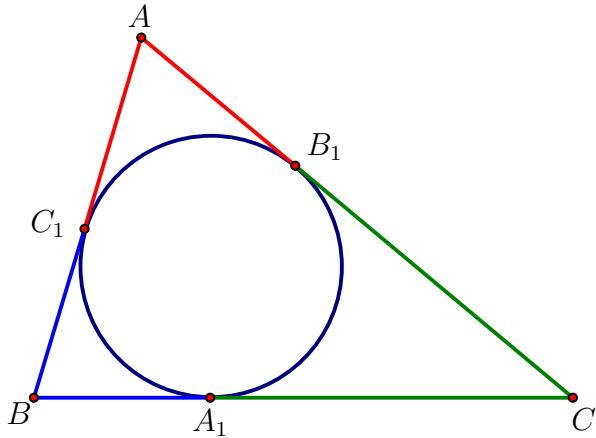


Рис. 6.1: Отрезки касательных: вписанная окружность

Задача 6.2. Зная длины сторон треугольника ABC ($AB = c$, $BC = a$, $AC = b$), вычислите

- а) длину отрезка AM ,
- б) длину отрезка BA_2 .

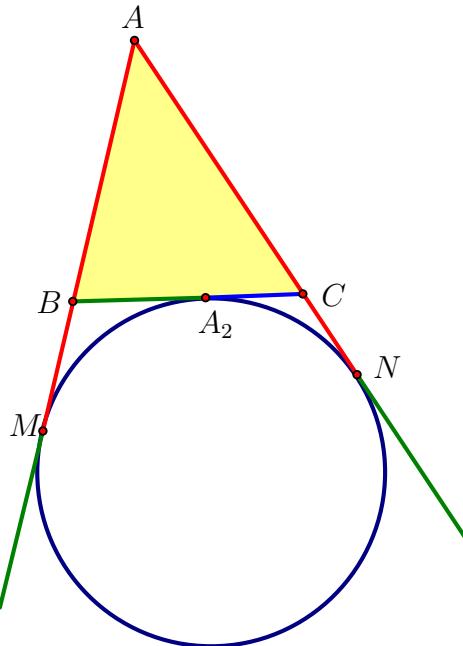


Рис. 6.2: Отрезки касательных: внеописанная окружность

Проведенные выше вычисления позволяют установить два замечательных факта, связанных с отрезками касательных для вписанной и вневписанных окружностей.

Задача 6.3. Докажите, что отрезки BA_1 и CA_2 равны (см. рис. 6.3).

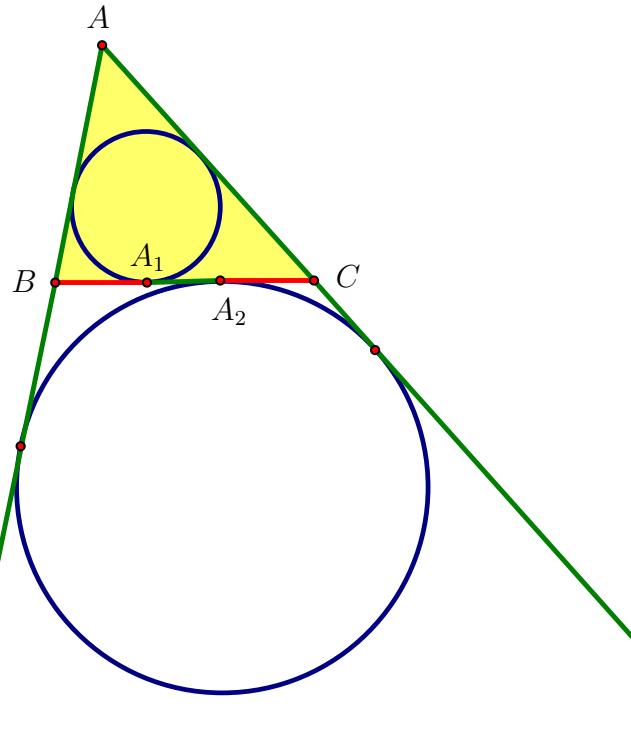


Рис. 6.3: Отрезки касательных: вписанная и вневписанная окружности

Задача 6.4. Докажите, что отрезки BK и CL равны (см. рис. 6.4).

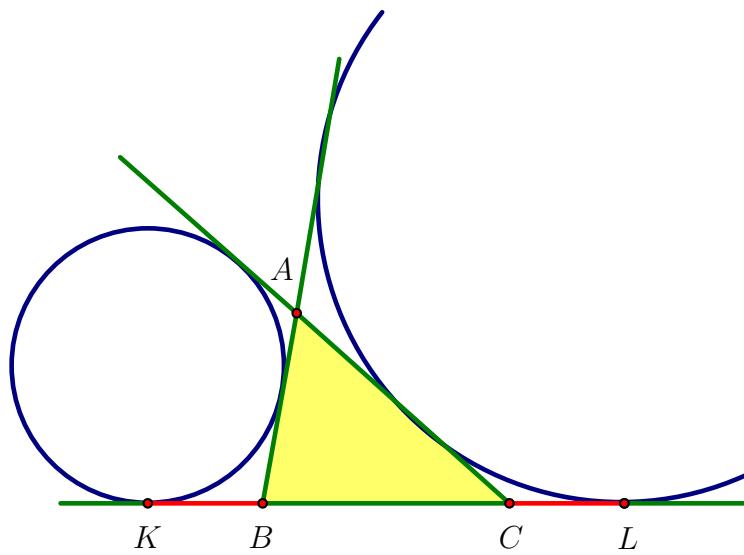


Рис. 6.4: Отрезки касательных: вневписанные окружности

Зафиксируем произвольную окружность, вписанную в данный угол и проведем прямую так, чтобы для треугольника, образованного пересечением сторон угла и

проведенной прямой, эта окружность была вневписанной. Очевидно, что такая прямая может быть проведена не единственным образом (например, BC и $B'C'$ на рисунке 6.5). Что можно сказать о получившихся треугольниках?

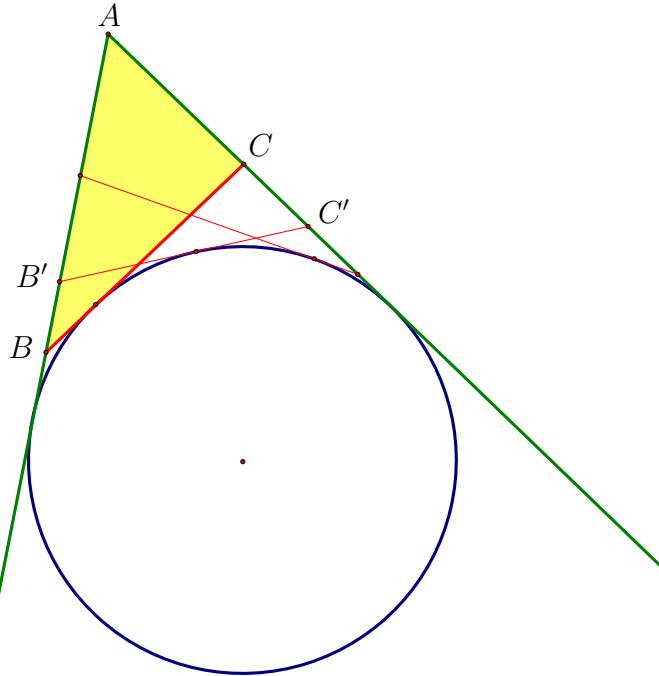


Рис. 6.5: Отрезки касательных: вневписанные окружности

Задача 6.5. Докажите, что все треугольники, построенные описанным выше образом, имеют одинаковый периметр.

Рассуждения об отрезках касательных, примененные к прямоугольному треугольнику, позволяют вычислить радиус вписанной в него окружности.

Задача 6.6. Выразите радиус вписанной в прямоугольный треугольник окружности через длины его сторон. Проведите аналогичные вычисления для вневписанных окружностей, касающихся его катетов и гипотенузы (см. рис. 6.6).

6.2 Точки касания вписанной окружности

Напомним, что A_1, B_1 и C_1 — точки касания вписанной окружности со сторонами треугольника.

Задача 6.7. Докажите, что стороны треугольников $W_A W_B W_C$ и $A_1 B_1 C_1$ параллельны.

Таким образом мы имеем четыре треугольника, связанных с биссектрисами, у которых соответствующие стороны параллельны (см. задачи 2.16 и 2.18). Детальное исследование этих треугольников будет проведено в главе 11.

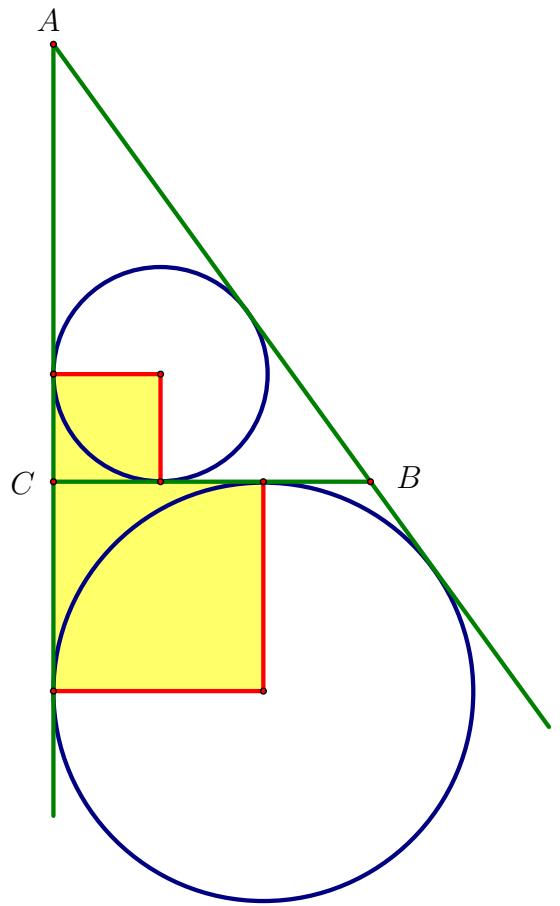


Рис. 6.6: Отрезки касательных в прямоугольном треугольнике

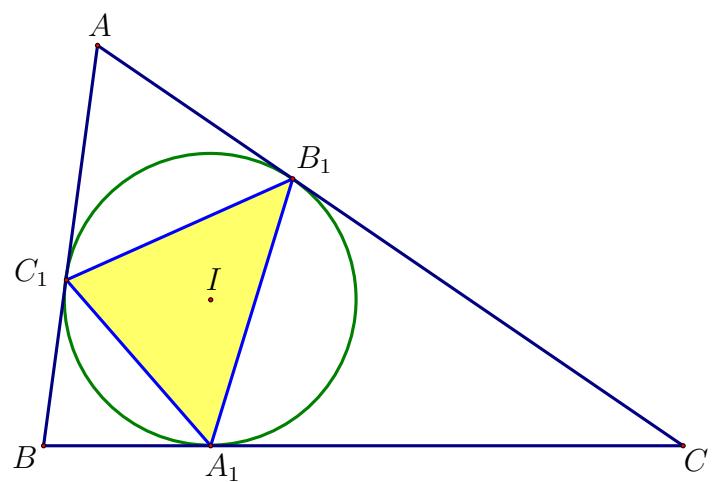


Рис. 6.7: Треугольник $A_1B_1C_1$

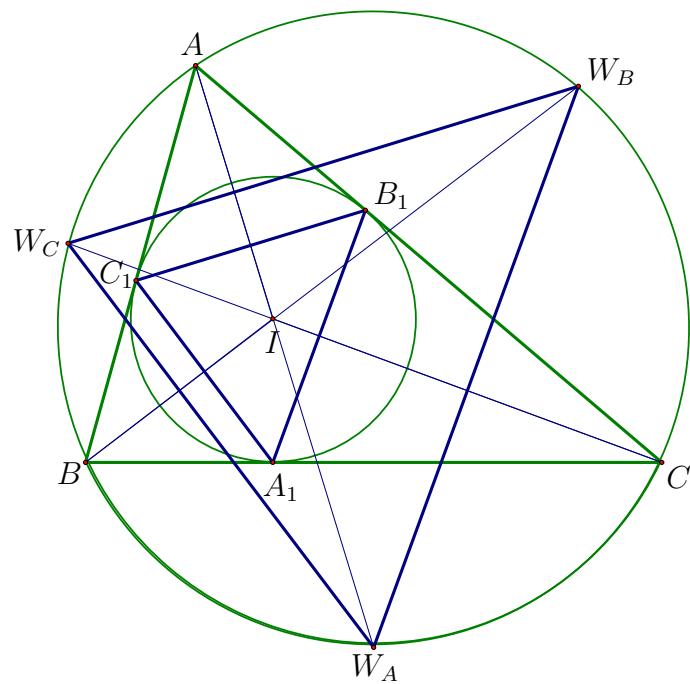


Рис. 6.8: Треугольники $A_1B_1C_1$ и $W_AW_BW_C$

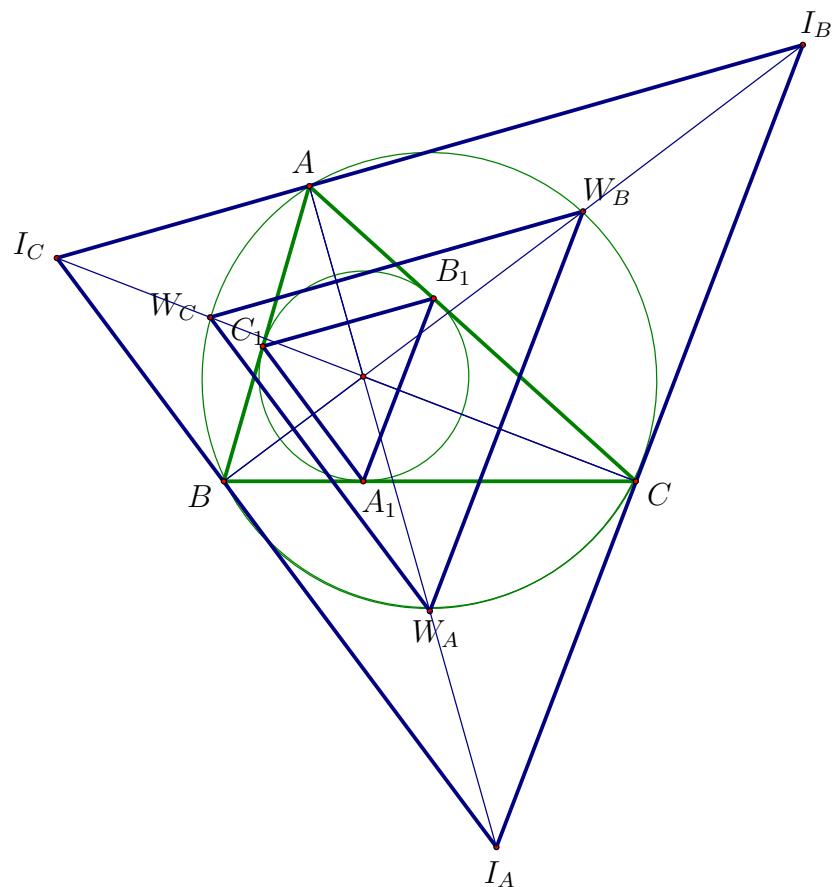


Рис. 6.9: Треугольники $A_1B_1C_1$, $W_AW_BW_C$ и $I_AI_BI_C$

Глава 7

Прямоугольный треугольник

Прямоугольный треугольник является замечательным геометрическим объектом. С одной стороны, с произвольным прямоугольным треугольником связаны нетривиальные геометрические конструкции. С другой стороны, с ним связана фундаментальная метрическая теорема геометрии — теорема Пифагора.

Целью этой главы будет исследование круга вопросов, объединенных общей конфигурацией. При этом для решения задач ниже потребуется использование различных идей и методов. Итак, конфигурация — *одна*, а идеи и методы — *различны*. Именно такой подход, на наш взгляд, позволяет научиться решать задачи самого высокого уровня.

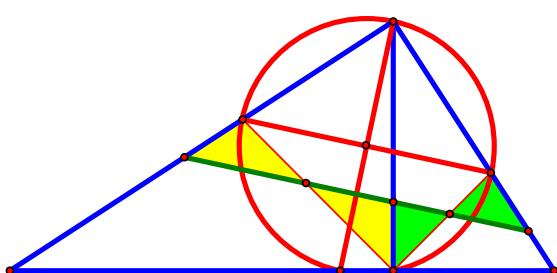
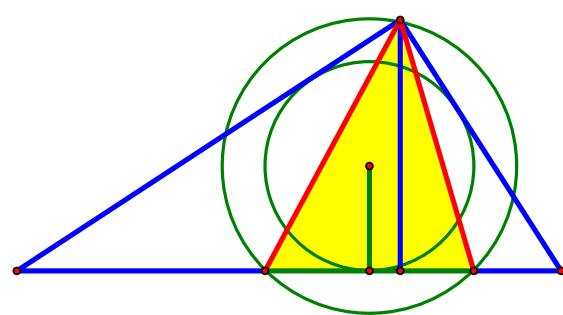
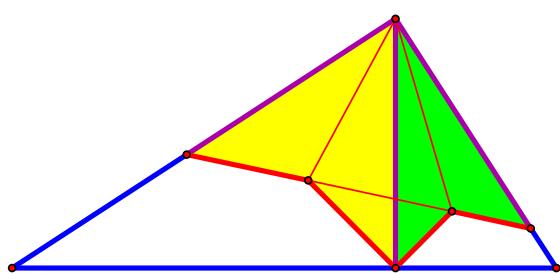
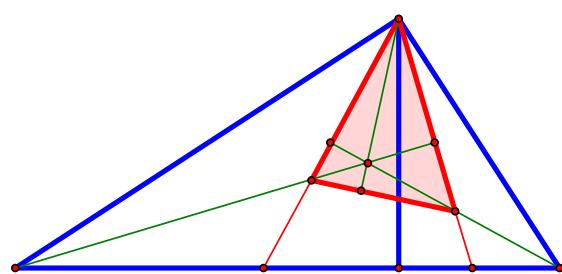
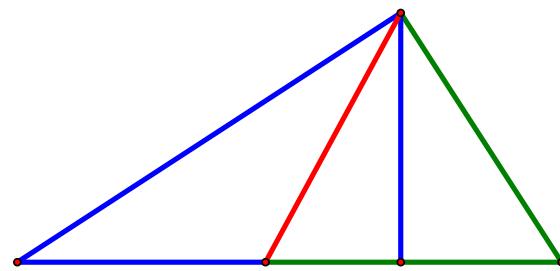
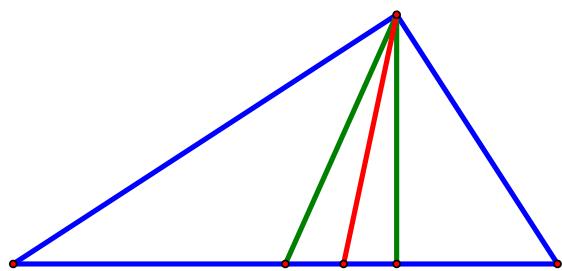
При решении задач данного сюжета предполагаются известными

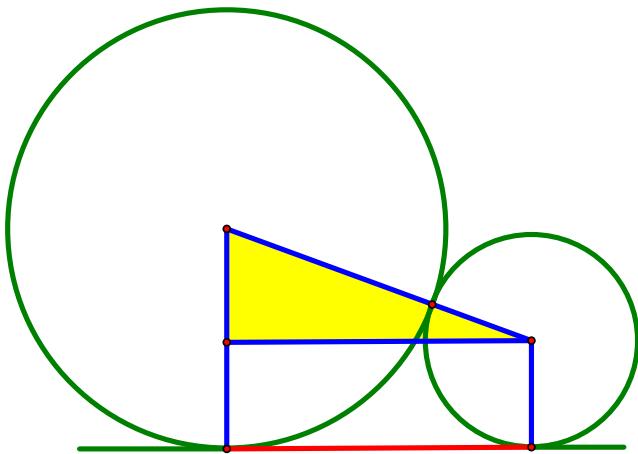
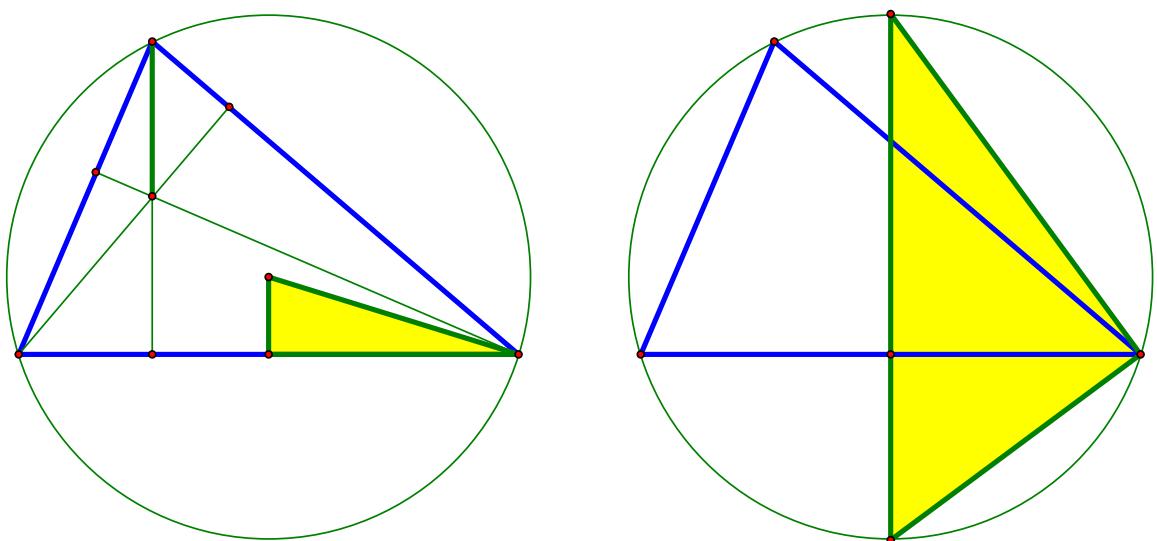
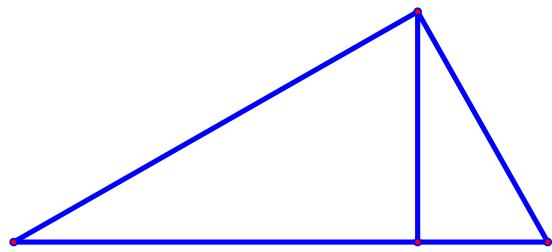
- для первой части первые шесть параграфов по учебнику Погорелова;
- для второй части первые семь параграфов по учебнику Погорелова.

В первом разделе этой главы мы несколько отступим от стандартных обозначений. Точками H, M, L мы будем обозначать основания высоты, медианы и биссектрисы соответственно, проведенных из вершины прямого угла C прямоугольного треугольника ABC .

Зафиксируем также стандартные обозначения для второго раздела.

- a, b, c — длины сторон BC, AC и AB треугольника соответственно;
- R, r, r_a, r_b, r_c — радиусы описанной, вписанной и вневписанных окружностей треугольника соответственно.





7.1 Т-конфигурация

Главным героем этого сюжета будет прямоугольный треугольник с проведенной из вершины прямого угла высотой. Именно эта конфигурация и дала название данному сюжету. В этой конфигурации скрыта богатая геометрия. Чтобы к ней прикоснуться, начнем со следующей задачи

Задача 7.1. В прямоугольном треугольнике проведем высоту CH , медиану CM и биссектрису CL из вершины прямого угла. Докажите, что CL также будет биссектрисой треугольника MCH .

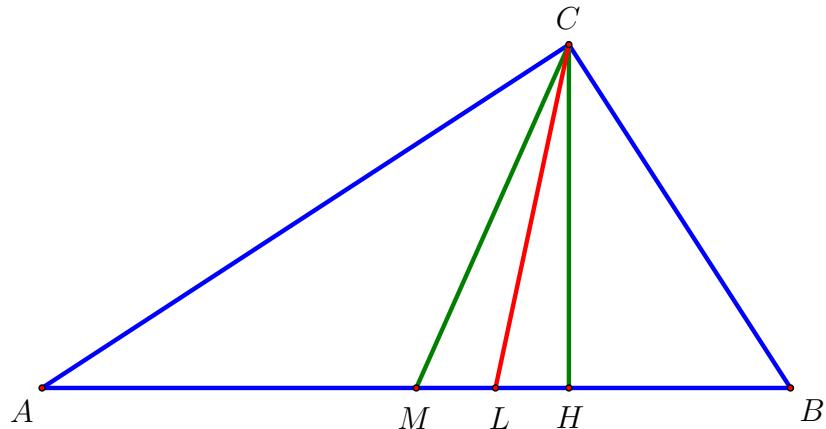


Рис. 7.1: Биссектриса прямого угла

Верно ли обратное утверждение? Оказывается, что да.

Задача 7.2 (*). В некотором треугольнике биссектриса делит пополам угол между высотой и медианой, исходящими из той же вершины. Докажите, что данный треугольник будет прямоугольным.

Высота делит прямой угол на два угла. Проведем биссектрисы этих углов. Оказывается, что они отсекают равнобедренные треугольники.

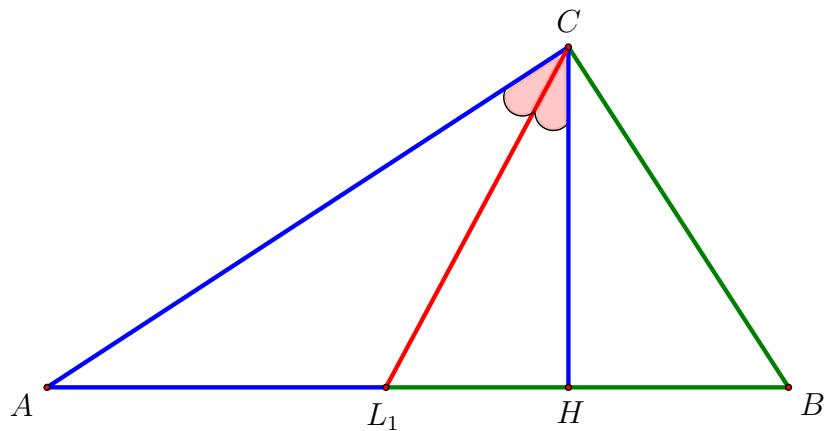


Рис. 7.2: Биссектриса прямого угла

Задача 7.3. Докажите, что $BC = BL_1$.

Теперь отметим точки пересечения биссектрис треугольников ACH и BCH . Обозначим их через I_1 и I_2 соответственно.

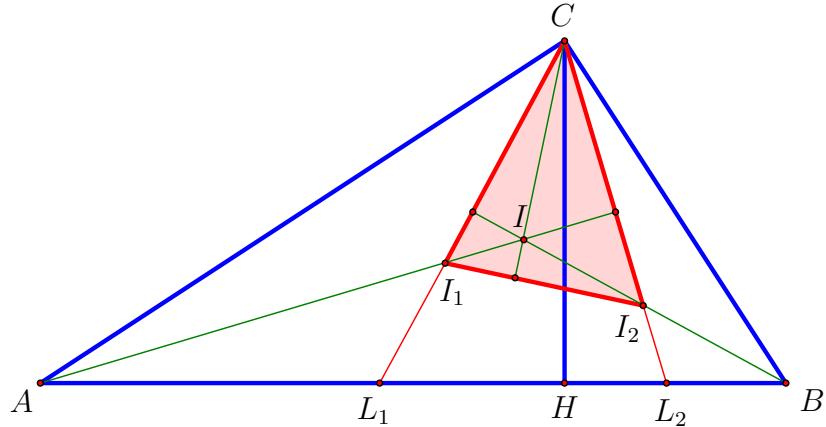


Рис. 7.3: Треугольник CI_1I_2

Задача 7.4. Докажите, что биссектрисы треугольника ABC являются высотами треугольника CI_1I_2 .

Задача 7.5. Пусть $\angle A = 2\alpha$, $\angle B = 2\beta$. Вычислите углы треугольника CI_1I_2 .

Задача 7.6 (*). Докажите, что $CI = I_1I_2$.

Продлим отрезок I_1I_2 до пересечения со сторонами исходного треугольника и получим точки M и N .

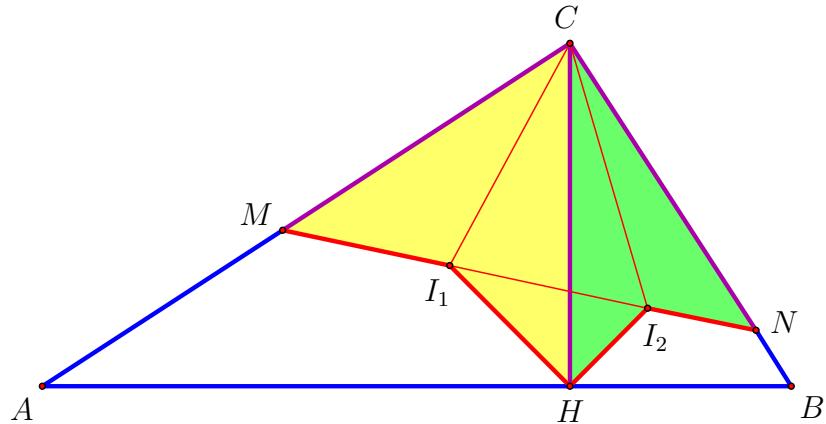


Рис. 7.4: Отрезки CM, CN, CH

Задача 7.7. Докажите равенство $CM = CH = CN$.

Теперь обратим внимание на треугольник CL_1L_2 . Оказывается, он связан с вписанной окружностью треугольника ABC .

Задача 7.8. Докажите, что диаметр вписанной окружности треугольника ABC равен отрезку L_1L_2 (см. рис. 7.4).

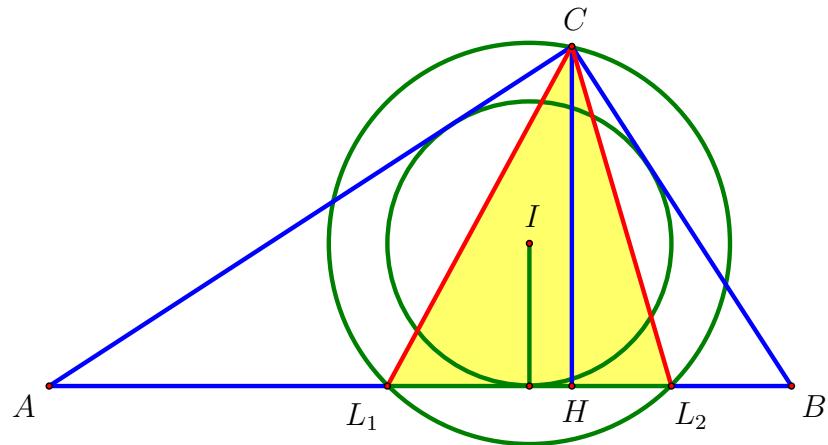


Рис. 7.5: Треугольник CL_1L_2 и вписанная окружность

Отметим основание биссектрисы прямого угла — точку L . Также отметим основания биссектрис углов CHB и CHA — точки L_A и L_B соответственно.

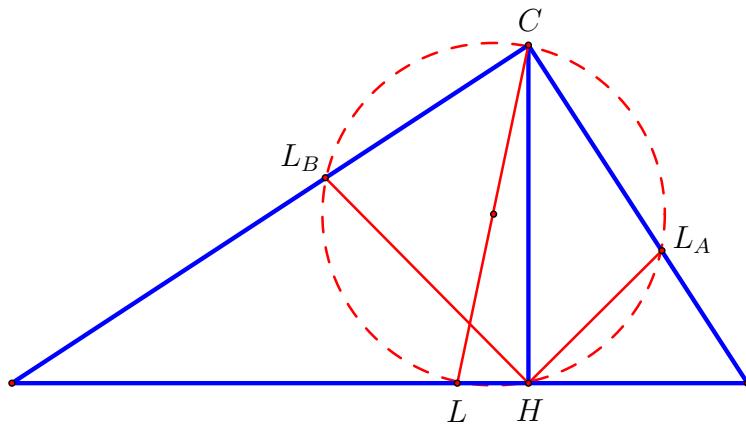


Рис. 7.6: Пять точек на одной окружности

Задача 7.9. Докажите, что точки C, H, L, L_A, L_B лежат на одной окружности.

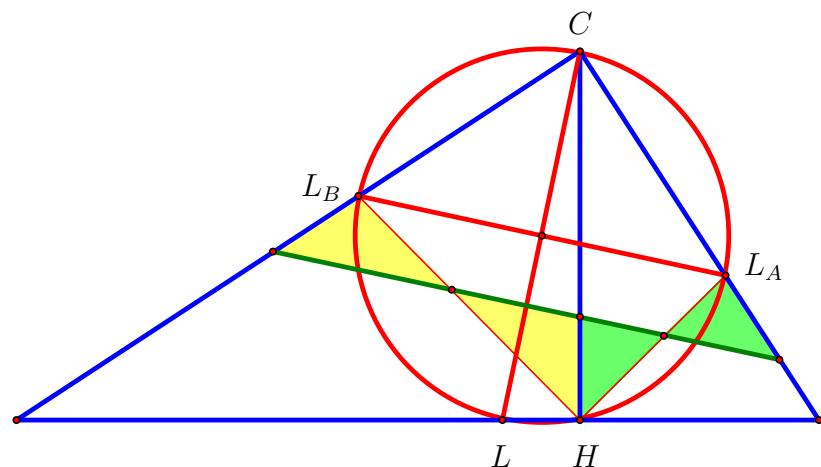


Рис. 7.7: Пять точек на одной окружности

7.2 Несколько формул

Отметим несколько опорных фактов, связанных, с одной стороны, с теоремой Пифагора, с другой стороны, с обсуждаемыми нами сюжетами. Начнем с ключевых формул, связанных с прямоугольным треугольником.

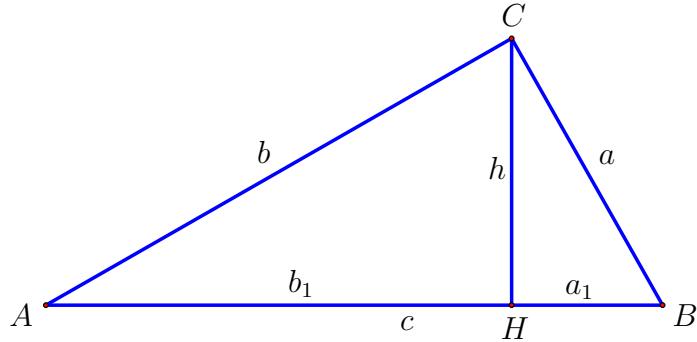


Рис. 7.8: Ключевые формулы в прямоугольном треугольнике

Задача 7.10. Докажите, что между элементами прямоугольного треугольника выполнены следующие соотношения

- $a^2 + b^2 = c^2$;
- $a^2 = a_1 \cdot c$; $b^2 = b_1 \cdot c$;
- $h^2 = a_1 \cdot b_1$;
- $h = ab/c$.

Задача 7.11. Докажите, что $AH^2 = 4R^2 - a^2$.

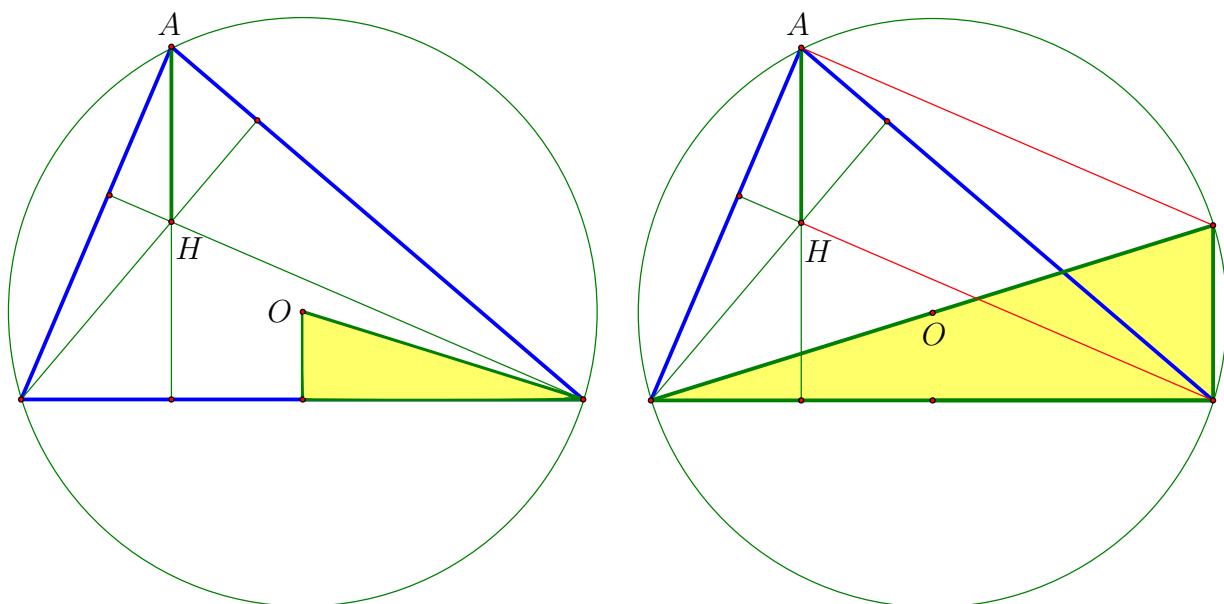


Рис. 7.9: Отрезок AH

Задача 7.12. Докажите, что

- а) $t_1 = (r_a - r) \cdot R$;
- б) $t_2 = (r_b + r_c) \cdot R$;
- в) $a^2 = (r_a - r) \cdot (r_b + r_c)$.

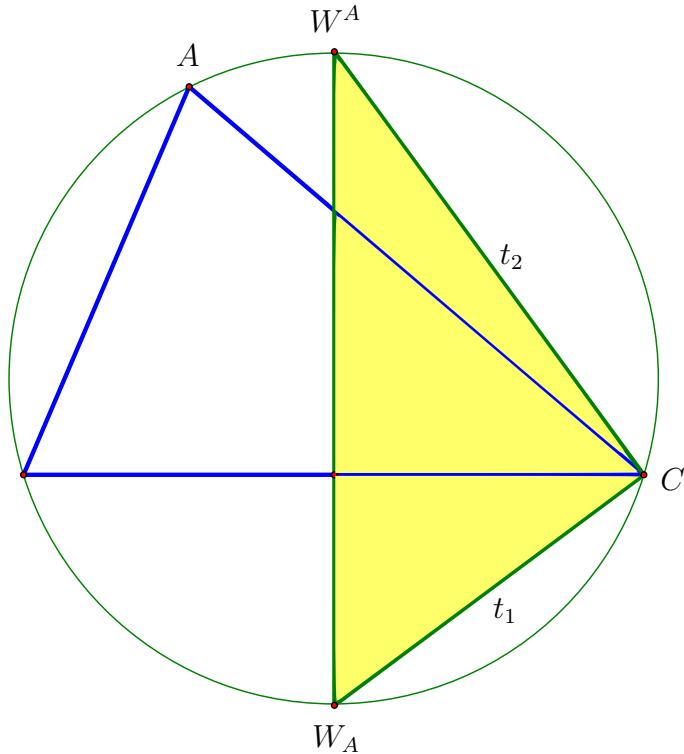


Рис. 7.10: Отрезки $W_A C$ и $W^A C$

Задача 7.13. Докажите, что $l = 2 \cdot \sqrt{Rr}$, где l — длина отрезка общей касательной окружностей с радиусами R и r .

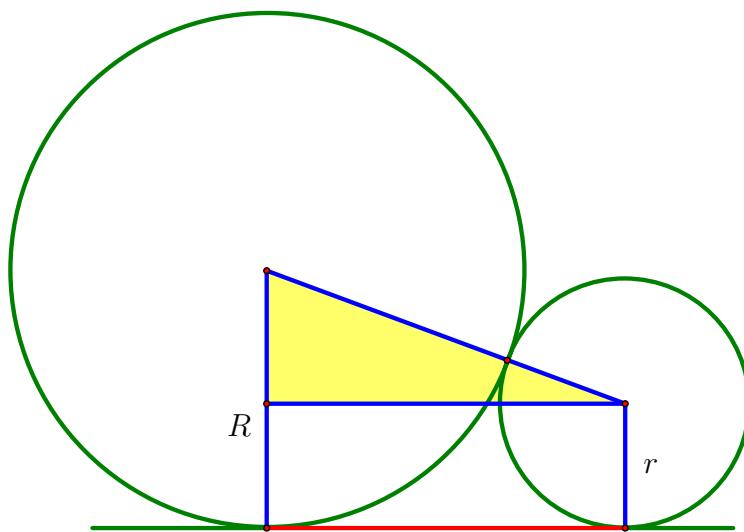


Рис. 7.11: Отрезок общей касательной

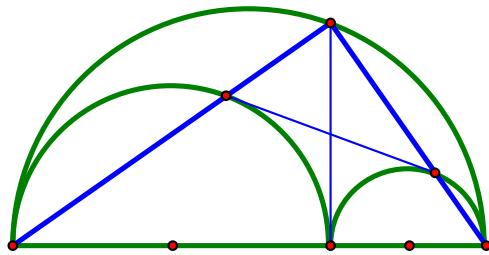
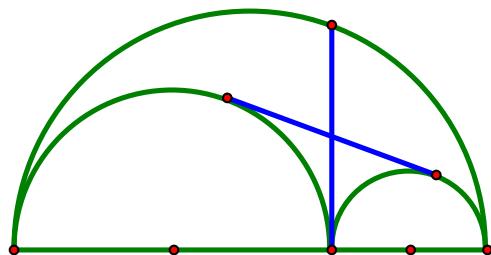
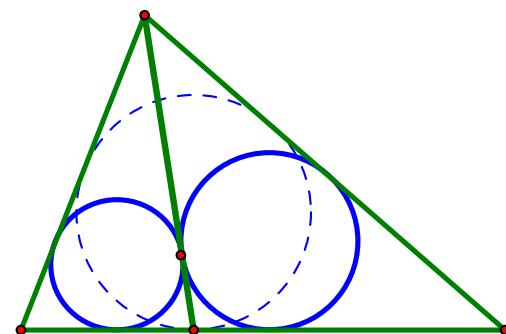
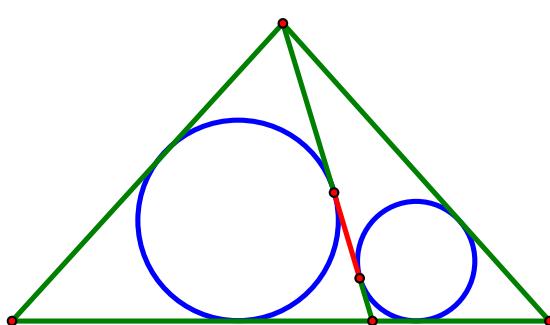
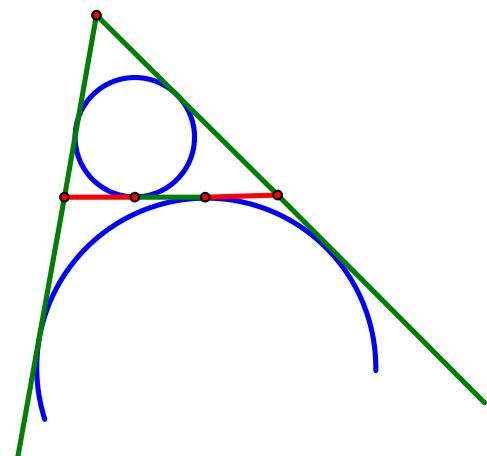
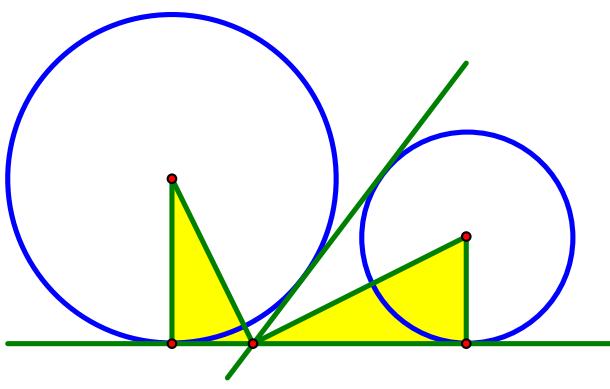
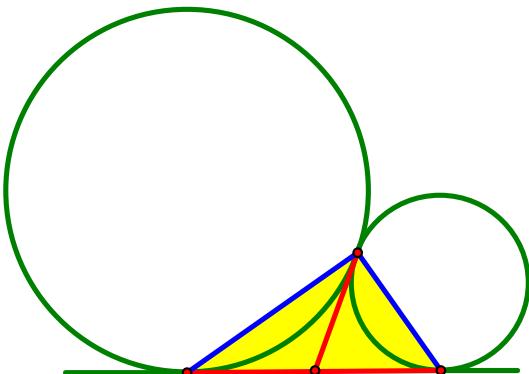
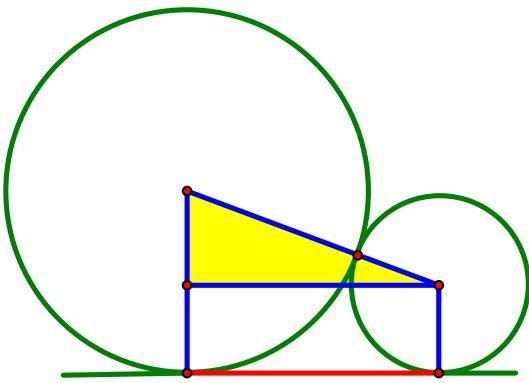
Глава 8

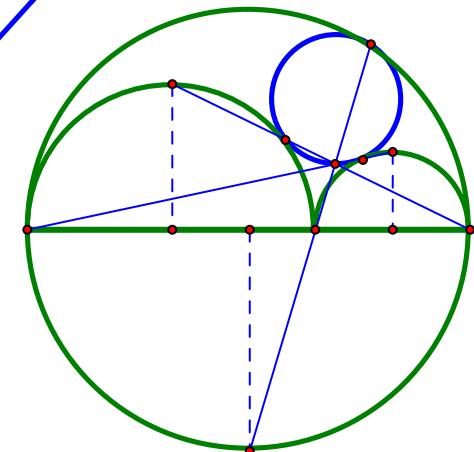
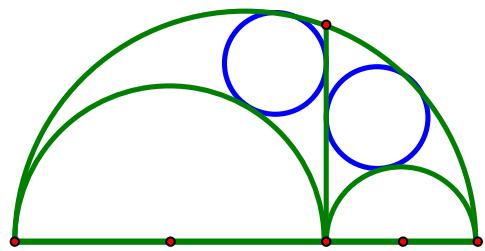
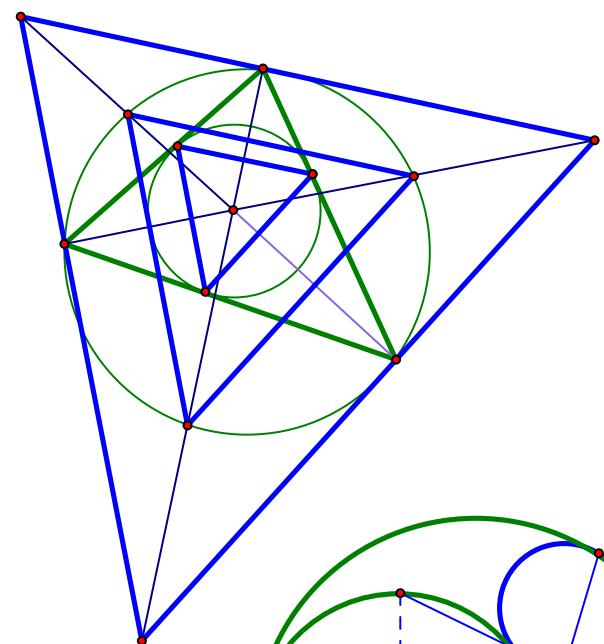
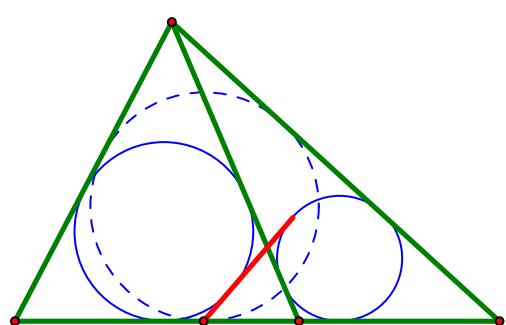
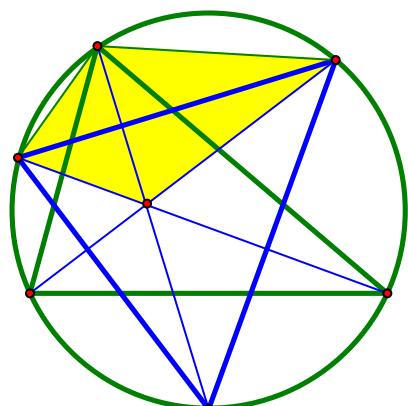
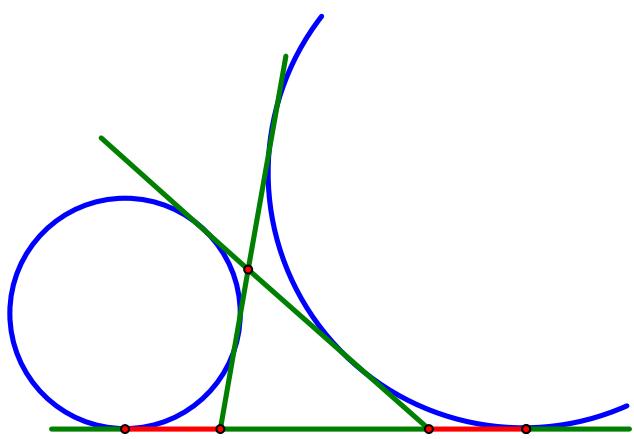
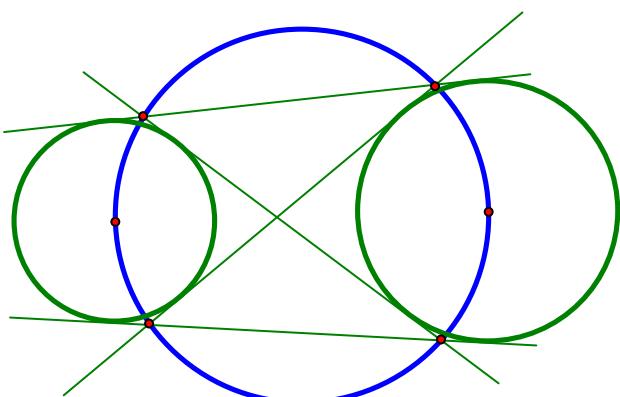
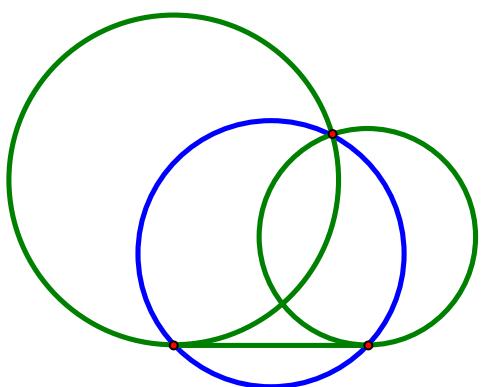
Окружности и касательные

Эта глава является естественным продолжением глав 6 и 7.

Как и в предыдущей главе, мы не ставим себе целью получение одного или нескольких ярких результатов. Наша цель — предложить сюжет из нескольких задач, объединенных общими конструкциями. Мы обращаем внимание на то, что для решения данных задач нужно применять различные идеи! Именно такой подход, на наш взгляд, значительно повышает решательский уровень и геометрическую культуру.

Для освоения конструкций, предлагаемых ниже достаточно знания первых семи параграфов учебника Погорелова.





8.1 Общие касательные

Начнем со следующей замечательной задачи. Рассмотрим две произвольные касающиеся окружности и проведем их общую касательную. Что можно сказать о треугольнике, образованном точками касания?

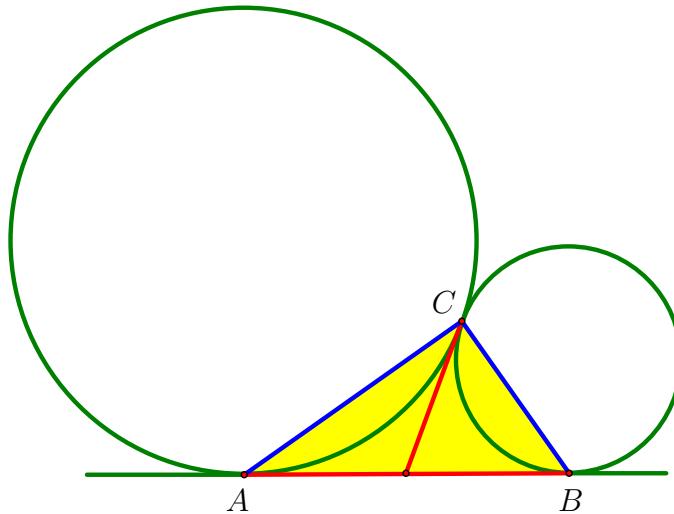


Рис. 8.1: «Касательный» треугольник

Задача 8.1. Докажите, что треугольника ABC — прямоугольный.

Из данной задачи мгновенно следует, что радиус окружности, описанной около точек касания, равен \sqrt{Rr} . Оказывается, что этот факт имеет обобщение на случай пересекающихся окружностей.

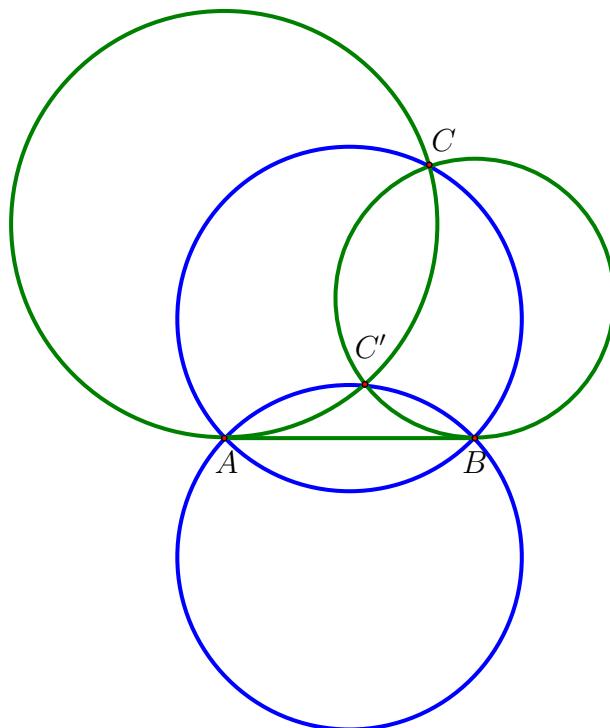


Рис. 8.2: Обобщение задачи 8.1

Задача 8.2 (*). Вычислите радиус окружности, описанной около треугольника ABC .

Задача 8.3 (*). Докажите, что радиусы окружностей, описанных около треугольников ABC и ABC' , равны.

Теперь выберем две непересекающиеся окружности и проведем их общие касательные: внешнюю и внутреннюю.

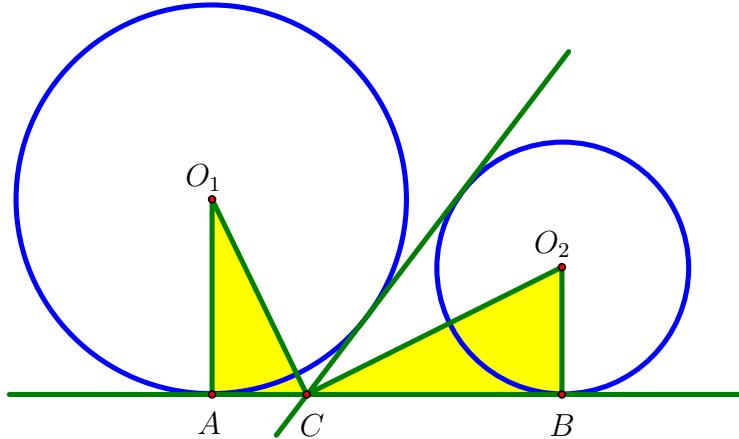


Рис. 8.3: Обобщение задачи 8.1

Задача 8.4. Докажите, что у треугольников O_1AC и CBO_2 все три угла равны.

Что можно сказать о конфигурации, включающей в себя две непересекающиеся окружности и четыре их общие касательные?

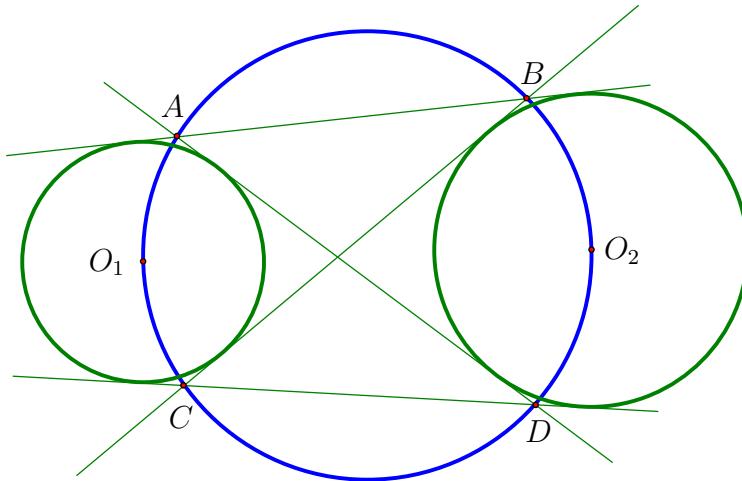


Рис. 8.4: 6 точек на одной окружности

Задача 8.5. Докажите, что точки O_1, O_2, A, B, C, D лежат на одной окружности.

В главе 6 мы открыли следующий замечательный факт, связанный с отрезками касательных: три треугольника с параллельными сторонами (см. рис. 8.5). Обратите внимание, что прямые, соединяющие соответствующие вершины треугольников $WAWBW_C$ и $I_AI_BI_C$ пересекаются в одной точке — точке I треугольника ABC или точке H треугольника $I_AI_BI_C$ (см. рис. 8.6).

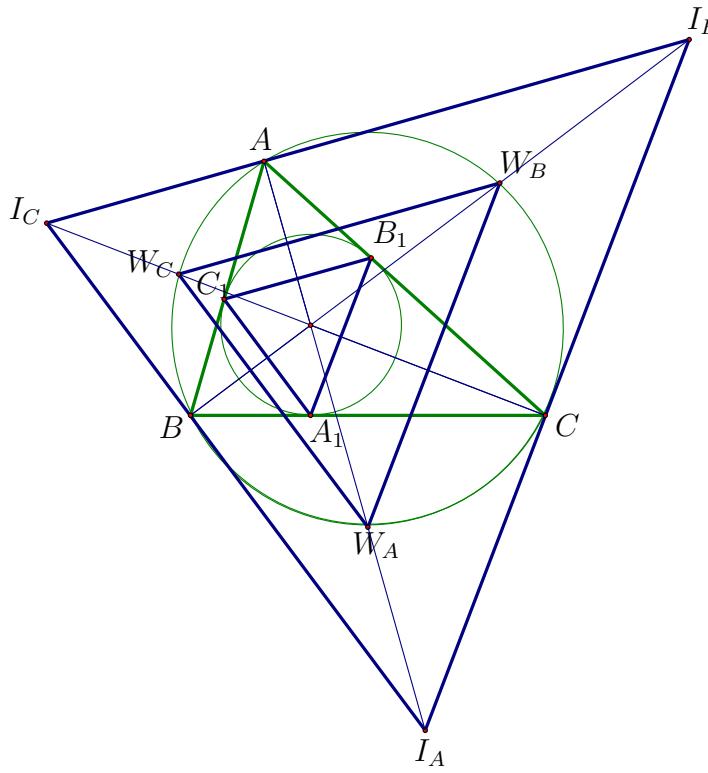


Рис. 8.5: $A_1B_1C_1$, $W_AW_BW_C$ и $I_AI_BI_C$

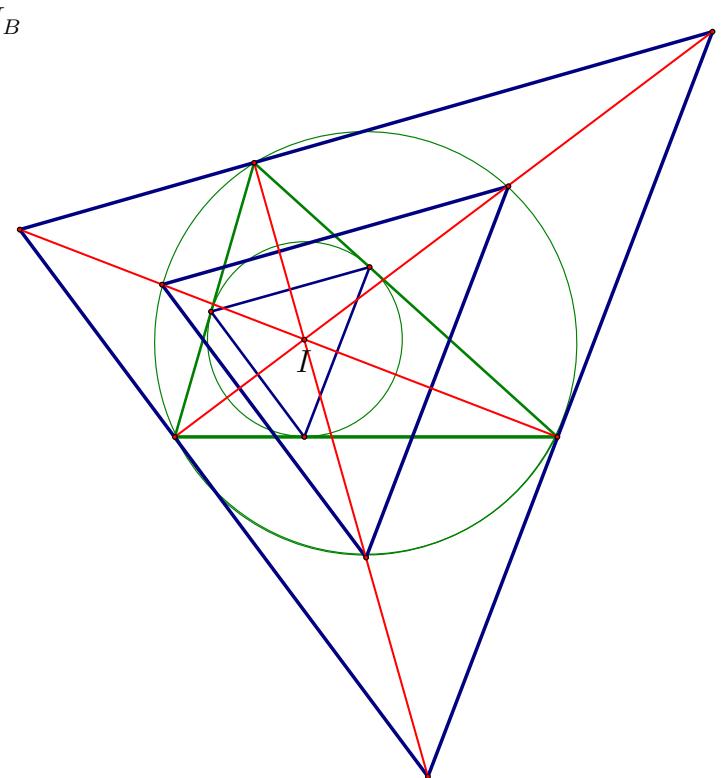


Рис. 8.6: $I_AI_W_A$, $I_BI_W_B$ и $I_CI_W_C$

Что можно сказать о парах треугольников $I_AI_BI_C$, $A_1B_1C_1$ и $W_AW_BW_C$, $A_1B_1C_1$? Оказывается, что прямые, соединяющие соответствующие вершины этих треугольников, также пересекаются в одной точке — точках I_1 и W_1 .

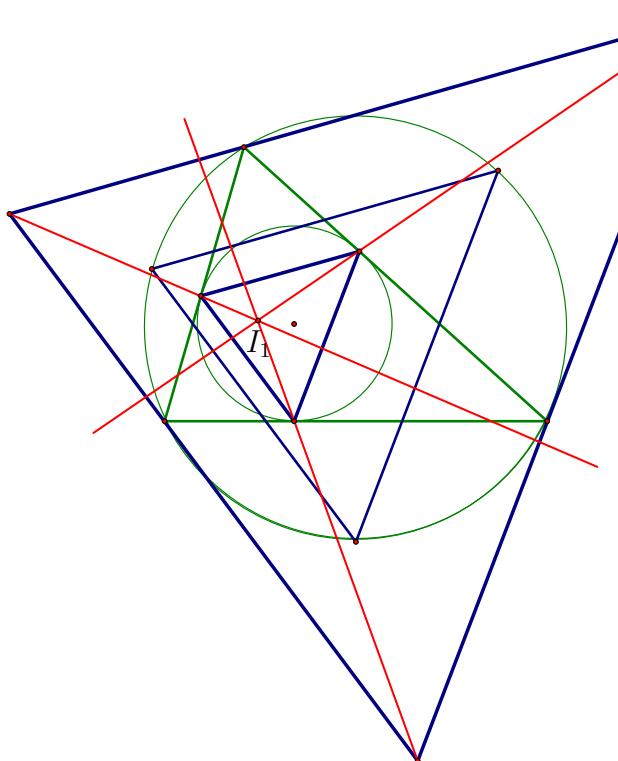


Рис. 8.7: I_AA_1 , I_BB_1 и I_CC_1

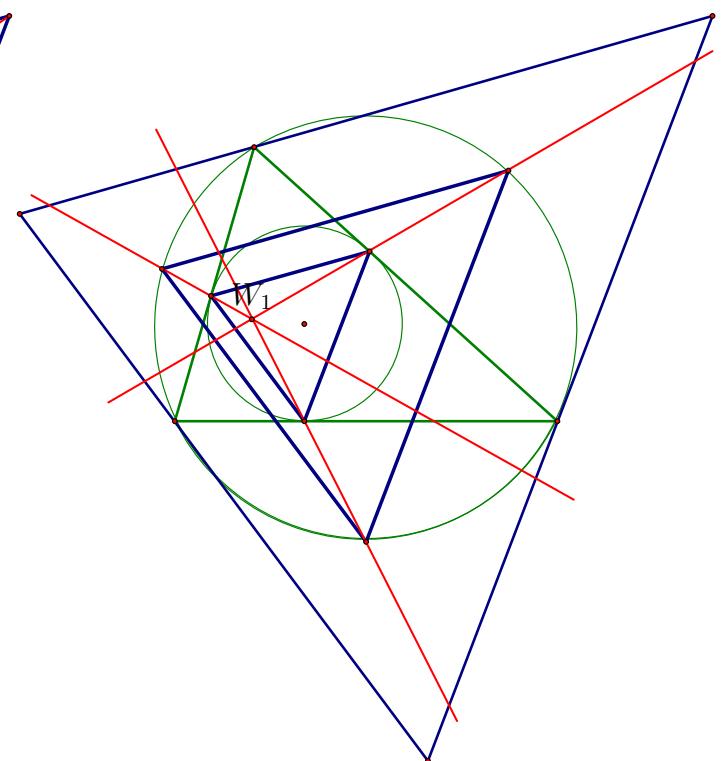


Рис. 8.8: W_AA_1 , W_BB_1 и W_CC_1

Задача 8.6 (*). Докажите, что красные прямые на рисунках 8.7 и 8.8 пересекаются в одной точке.

Что можно сказать о точках I , I_1 и W_1 ? На рисунке 8.9 видно, что они лежат на одной прямой!

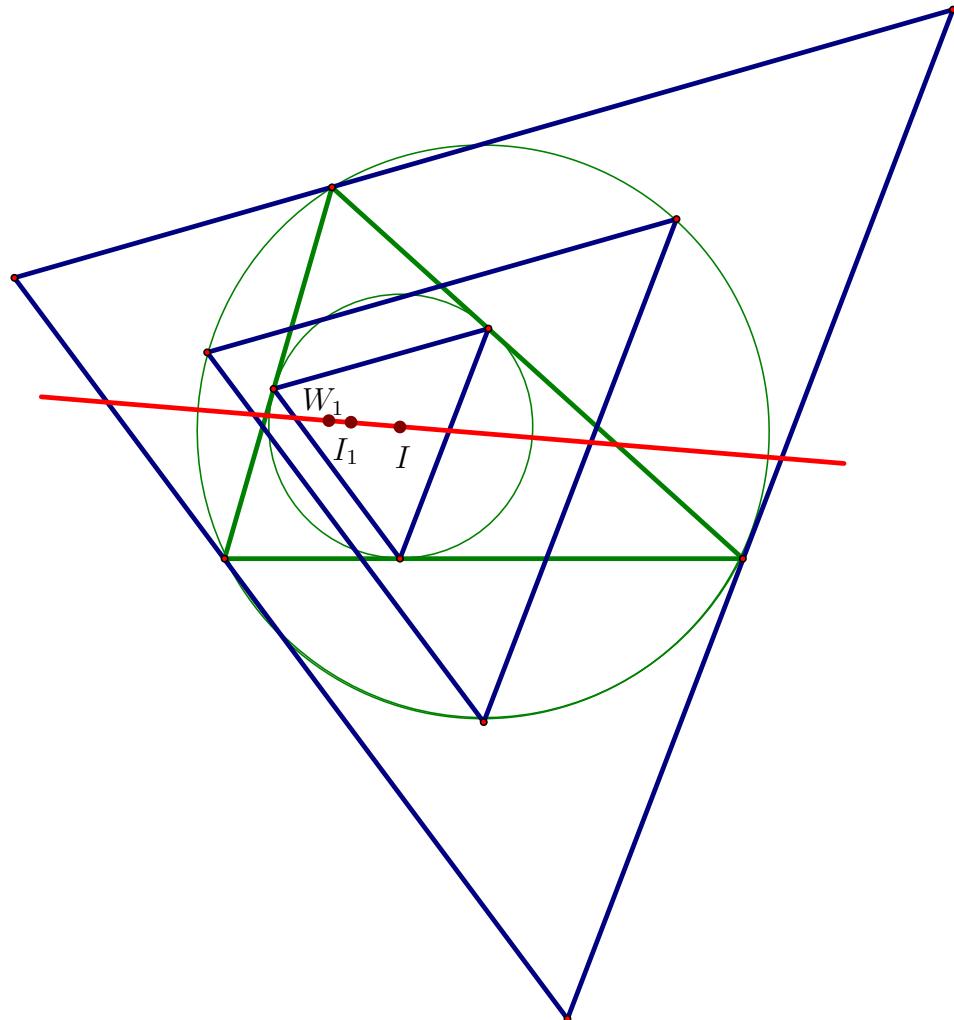


Рис. 8.9: Точки I , H_1 и H_2

Задача 8.7 (*). Что это за прямая?

Задача 8.8 (*). Докажите гипотезу, сформулированную в задаче 8.7.

Полное исследование замечательной конструкции, связанной с этими треугольниками, мы проведем в главе 11.

8.2 Три вписанные окружности

Рассмотрим следующую конструкцию. Проведем в треугольнике отрезок, соединяющий вершину с произвольной точкой на противолежащей стороне. Впишем окружности в образованные таким образом треугольники. Далее мы будем их называть просто вписанными окружностями.

Задача 8.9. В треугольнике ABC $AB = AC$, $BX = a$, $CX = b$. Вычислите длину отрезка KL (см. рис. 8.10).

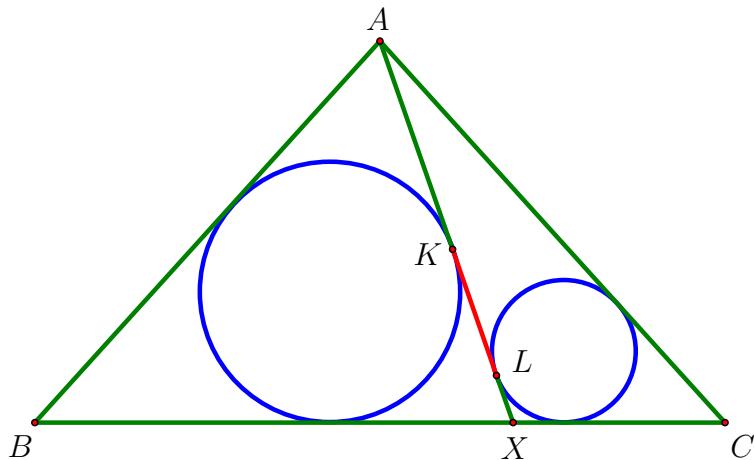


Рис. 8.10: Общая касательная вписанных окружностей

Если теперь в качестве ABC взять произвольный треугольник и двигать точку X вдоль стороны треугольника, то длина отрезка KL будет меняться. Оказывается, если в качестве X выбрать точку касания вписанной окружности треугольника ABC со стороной, то рассматриваемые нами окружности станут касающимися!

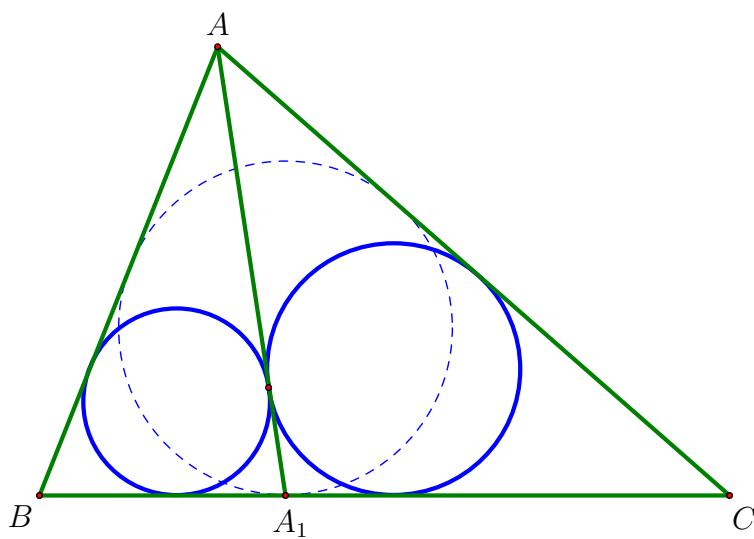


Рис. 8.11: Касающиеся вписанные окружности

Задача 8.10. Докажите, что окружности, вписанные в треугольники ABA_1 и ACA_1 , касаются.

Вновь «отпустим» точку X и рассмотрим общую внутреннюю касательную вписанных окружностей.

Задача 8.11. Докажите, что общая внутренняя касательная окружностей, вписанных в треугольники ABX и ACX , проходит через точку A_1 , независимо от расположения точки X (см. рис. 8.12).

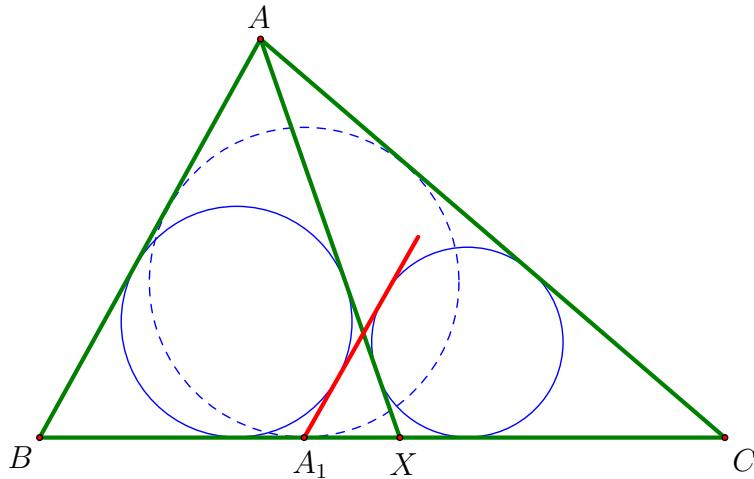


Рис. 8.12: Общая касательная вписанных окружностей

8.3 Арбелос Архимеда

Следующая классическая конструкция восходит к самому Архимеду. Рассмотрим фигуру, образованную большим полукругом, из которого вырезаны два меньших, диаметры которых лежат на диаметре большого и разбивают его на две части.

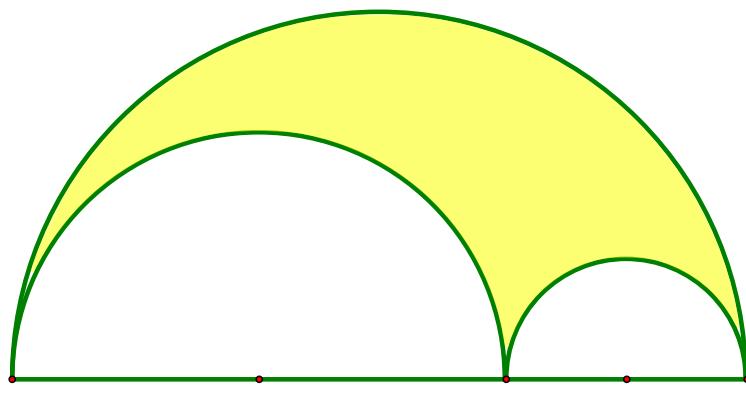


Рис. 8.13: Арбелос Архимеда

Эта фигура называется арбелосом¹. С этой конфигурацией также связана серия замечательных задач.

Начнем с того, что проведем общие касательные меньших окружностей.

Задача 8.12. Докажите, что отрезки AB и CD равны (см. рис. 8.14). Чему равна их длина, если диаметры меньших окружностей арбелоса равны a и b ?

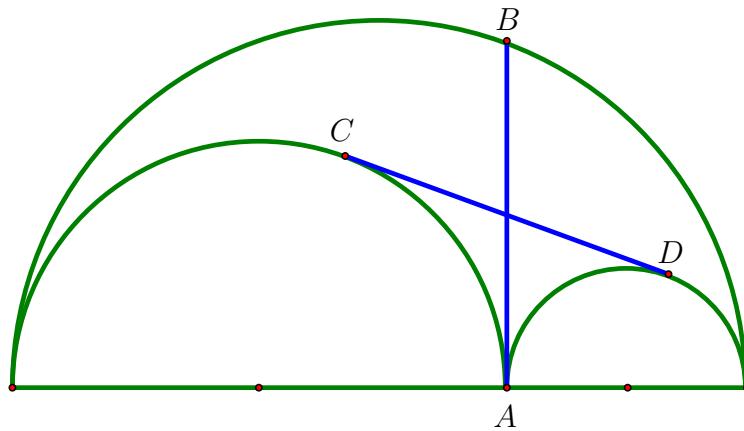


Рис. 8.14: Арбелос: отрезки касательных

Задача 8.13. Докажите, что тройки точек (B, C, E) и (B, D, F) лежат на одной прямой (см. рис. 8.15).

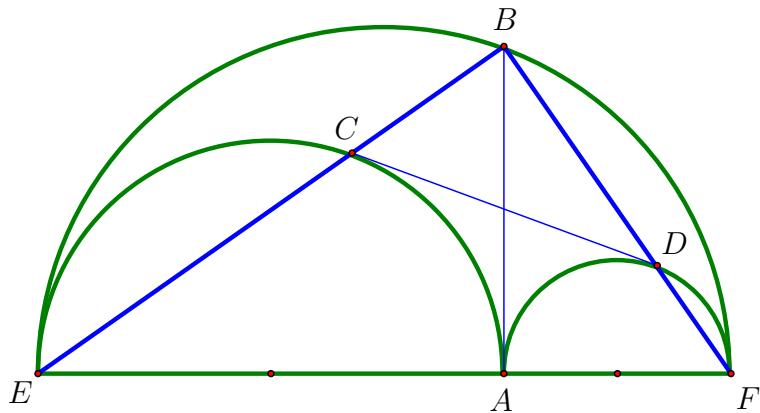


Рис. 8.15: Арбелос: три точки на одной прямой

Впишем в части арбелоса окружности, как показано на рисунке 8.16.

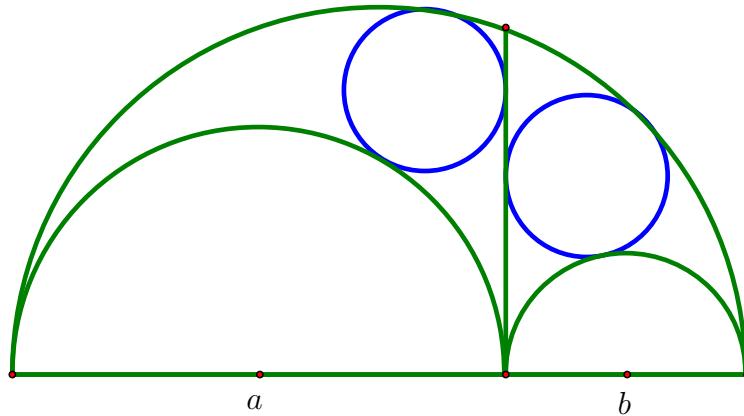


Рис. 8.16: Арбелос: две вписанные окружности

¹ В переводе с греческого арбелос означает сапожный нож, поскольку по своей форме эта фигура очень напоминает такой нож.

Задача 8.14. Докажите, что радиусы вписанных таким образом окружностей равны (см. рис. 8.16). Чему они равны, если диаметры меньших окружностей арбелоса равны a и b ?

Упомянем еще один замечательный факт, связанный с данной конструкцией. Впишем в арбелос окружность.

Задача 8.15 (*). Почему в произвольный арбелос можно вписать окружность?

Точки A, B, C — точки касания арбелоса с вписанной окружностью.

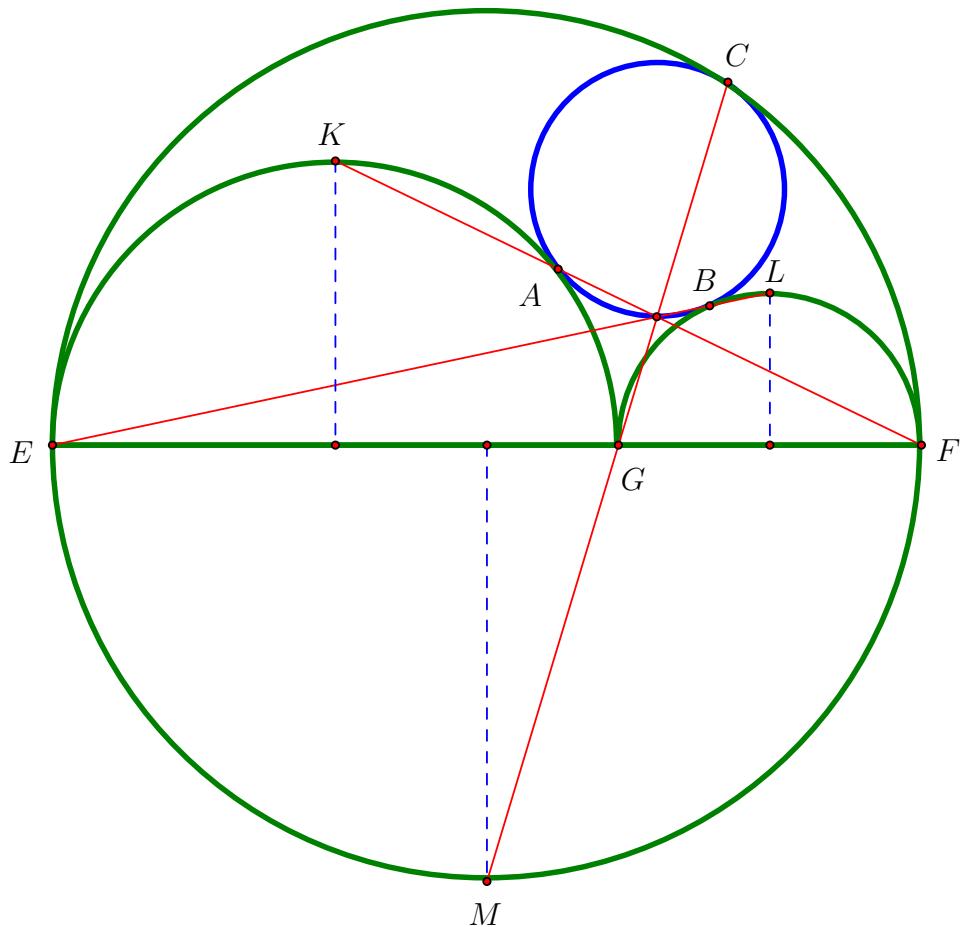


Рис. 8.17: Арбелос: вписанная окружность

Задача 8.16 (*).

- Докажите, что тройки точек $(K, A, F), (L, B, E)$ и (M, C, G) лежат на одной прямой.
- Докажите, что эти три прямые пересекаются в одной точке.
- Докажите, что эта точка лежит на вписанной в арбелос окружности.

Глава 9

Окружность Аполлония

В отличие от окружности Эйлера, окружность Аполлония зачастую остается в тени при изложении курса школьной геометрии даже в специализированных физико-математических школах. Обычно окружность Аполлония предлагается как одна из немногих геометрических задач, удобно решаемых с помощью координат, приводятся несколько примеров ее использования в задачах на построение и изредка сообщается о связи окружности Аполлония с инверсией и радиальной осью.

При таком подходе окружность Аполлония становится фактом, оторванным от самого курса школьной геометрии, поскольку ее связи с собственно геометрией (треугольника, окружности и т.д.), как правило, не излагаются, а основное внимание уделяется стандартным применением определения этой окружности, но никак не ее взаимосвязям с другими важными и интересными фактами и теоремами.

Между тем оказывается, что окружность Аполлония содержит в себе необычайно красивую геометрию, освоение которой, с одной стороны, не требует никаких знаний, выходящих за рамки школьной программы 8 класса, а с другой — позволяет открыть совершенно удивительные факты и теоремы. И что самое главное, эти факты и теоремы органично вписываются в школьный курс геометрии и связывают воедино такие, казалось бы, далекие друг от друга понятия, как координаты, биссектрисы, замечательные точки треугольника, окружность Эйлера, точки W , задачи Фаньяно и Шарыгина, инверсию, полюсы и поляры и т.д.

Для освоения материала, приводимого ниже, достаточно владеть школьной геометрией на уровне 8 класса. В частности, достаточно знать

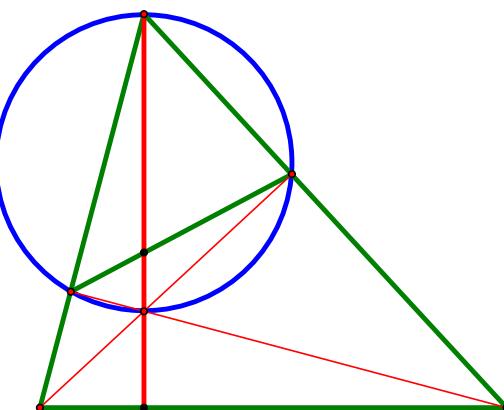
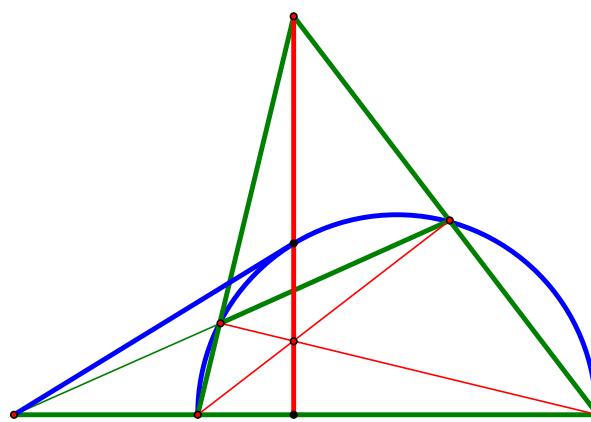
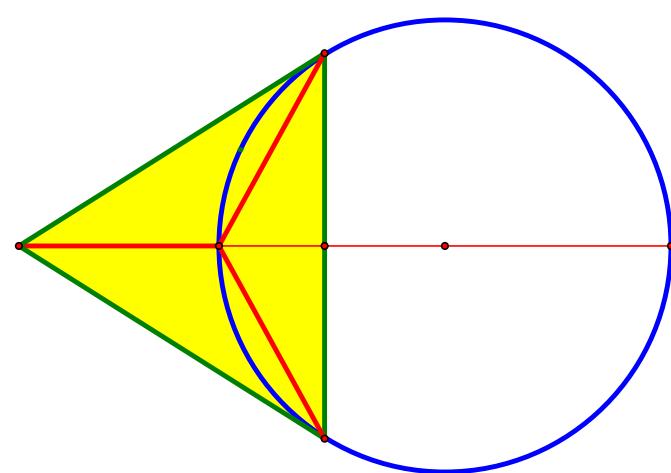
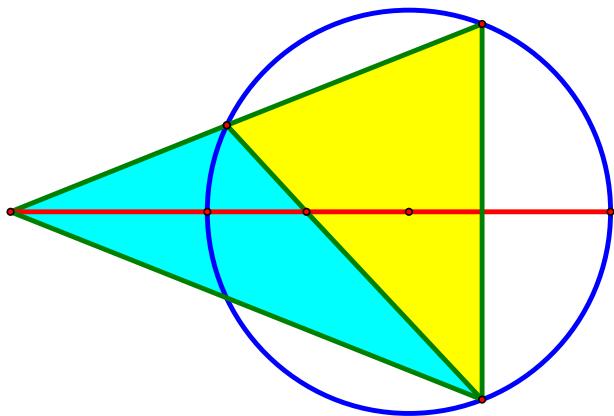
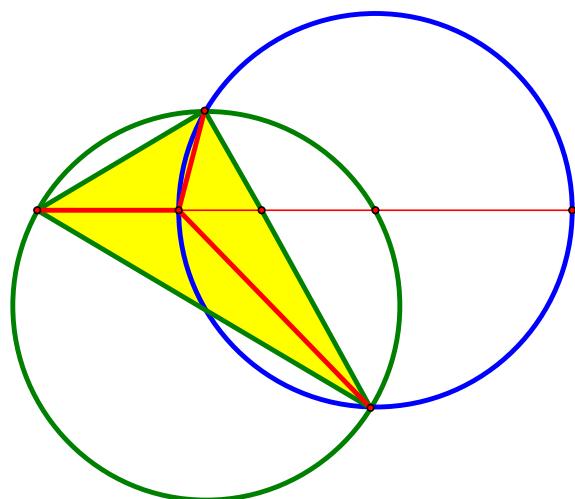
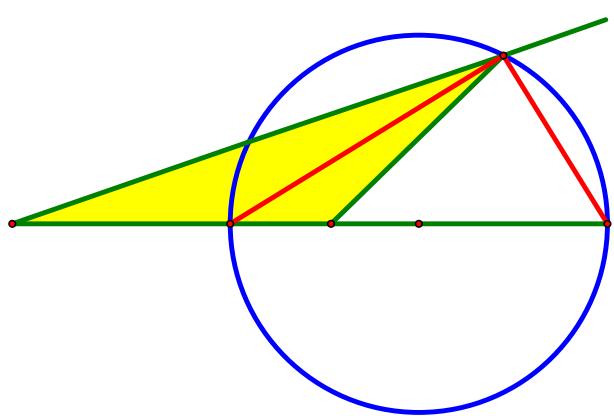
- первые восемь параграфов учебника Погорелова;
- главы 1 и 2 настоящей книги.

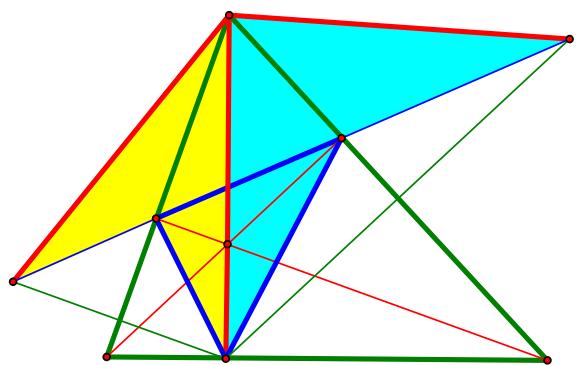
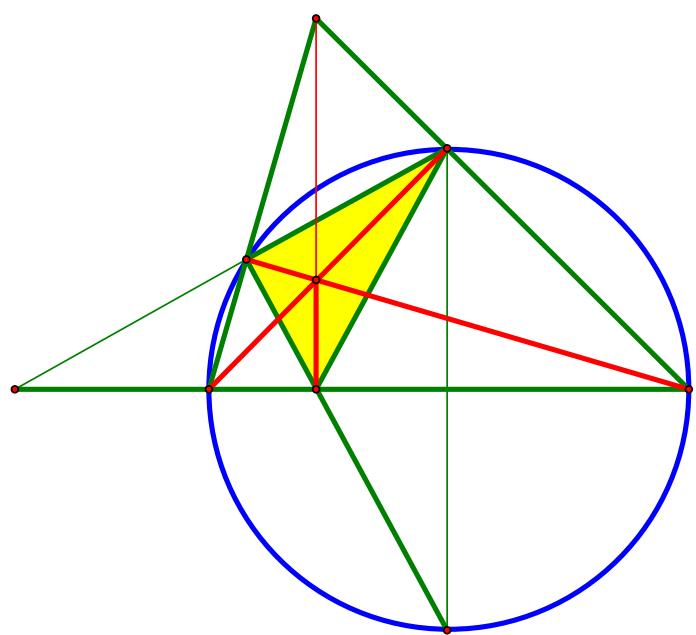
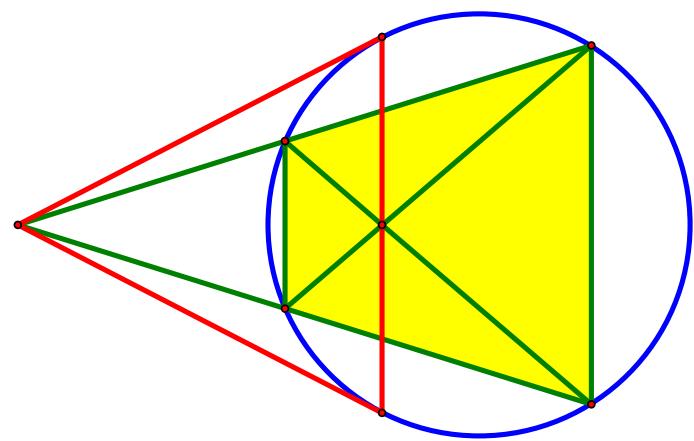
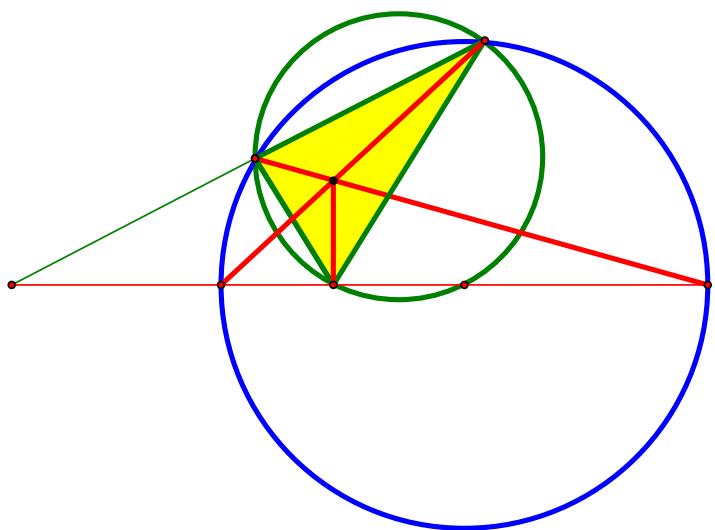
Отметим также, что при предлагаемом подходе к исследованию окружности Аполлония дорога к нему лежит не в стороне от основного курса геометрии (принятого, например, в учебнике А. Погорелова), а, наоборот, расширяет, дополняет, углубляет и связывает между собой материал всего курса 7 и 8 классов.

На всем протяжении этой главы сохранены стандартные обозначения.

- M_A, M_B, M_C — середины сторон треугольника;
- H_A, H_B, H_C — основания высот;
- H, O, I — точка пересечения высот, центр описанной и центр вписанной окружностей соответственно;

- E_A, E_B, E_C — середины отрезков, соединяющих вершины треугольника с точкой H ;
- \varkappa_A, \varkappa^A — окружности, связанные с высотами в треугольнике.





9.1 Биссектрисы и пропорциональные отрезки

Главным героем этой и следующей главы будут пропорциональные отрезки. Впервые мы сталкиваемся с ними при исследовании отрезков, образованных при пересечении параллельных прямых секущими¹.

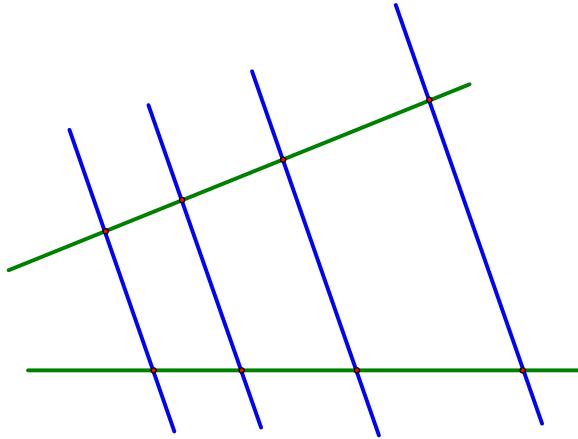


Рис. 9.1: Теорема о пропорциональных отрезках

Оказывается, что пропорциональные отрезки встречаются также в конструкциях с биссектрисами.

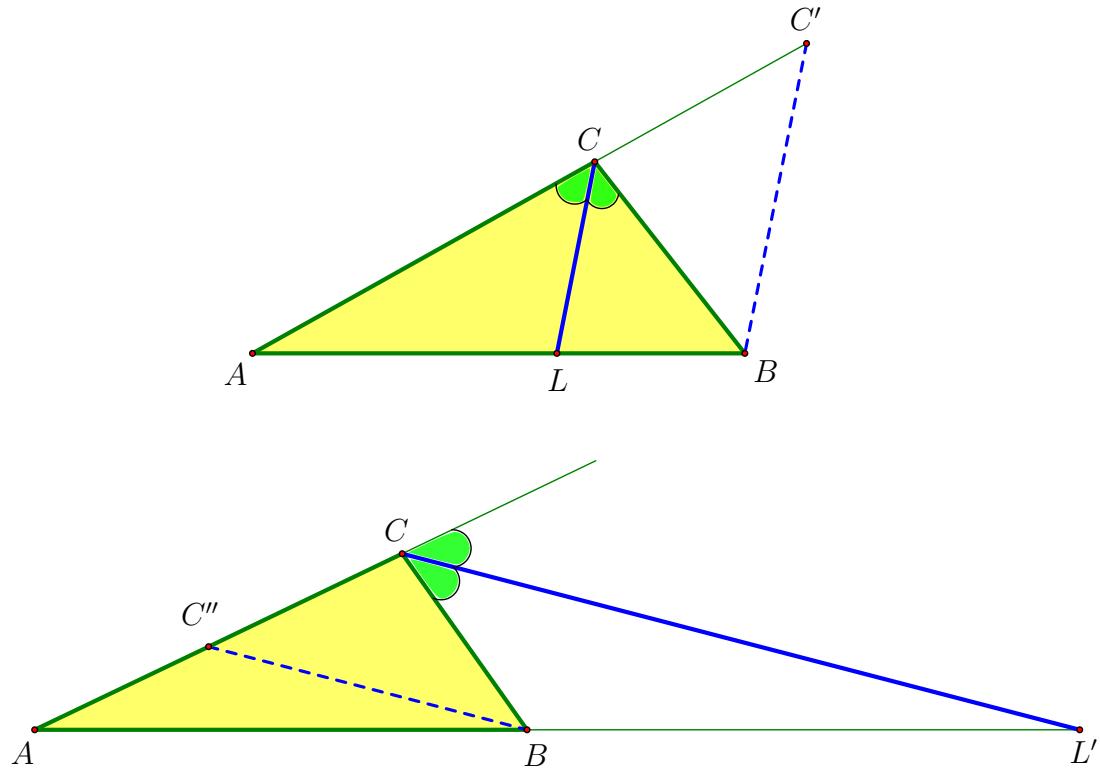


Рис. 9.2: Биссектрисы и пропорциональные отрезки

¹Это утверждение восходит к Фалесу Милетскому (ок. 630 г. до н.э. — ок. 545 г. до н.э.). Сведения о его жизни достаточно скучны, но самими древними греками он считался одним из отцов-основателей и неизменно назывался первым среди «семи мудрецов», заложивших основы греческой культуры и государственности, а значит, и всей нашей цивилизации.

Задача 9.1. Пусть CL и CL' – биссектрисы внутреннего и внешнего углов треугольника (см. рис. 9.2). Докажите, что тогда

$$AC/BC = AL/BL = AL'/BL'.$$

Верно и обратное утверждение.

Задача 9.2. Докажите, что если на отрезке AB выбрана точка L , а на продолжении этого отрезка – точка L' такие, что

$$AC/BC = AL/BL = AL'/BL',$$

то CL и CL' – биссектрисы внутреннего и внешнего углов треугольника ABC (см. рис. 9.2).

Обратим внимание на эти утверждения. Мы имеем две фиксированные точки A и B и естественным образом связанные с ними три точки: C, L, L' . При этом

$$AC/BC = AL/BL = AL'/BL'.$$

Возникает естественный вопрос: как устроено геометрическое место точек M , таких что $AM/BM = k = \text{const}$? Сразу заметим, что если $k = 1$, то ответ нам уже известен – искомое ГМТ будет серединным перпендикуляром. Что мы получим, если $k \neq 1$? Рассмотрим четыре точки, принадлежащие искомому ГМТ: L, L', C_1, C_2 (см. рис. 9.3). Из утверждения задачи 9.2 следует, что красные отрезки на этом рисунке являются биссектрисами внутреннего и внешнего углов желтых треугольников.

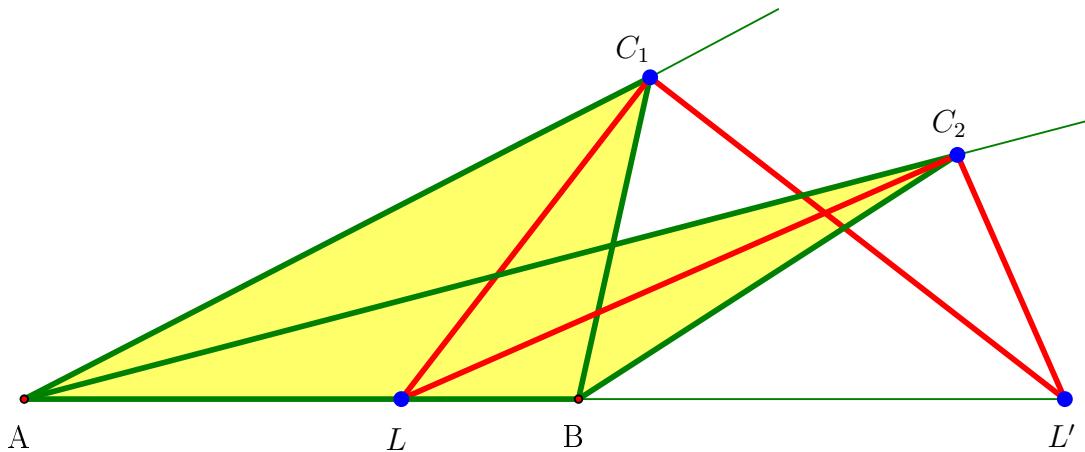


Рис. 9.3: ГМТ $AM/BM = \text{const}$

Что можно сказать об этих четырех точках?

Задача 9.3. Докажите, что точки L, L', C_1, C_2 лежат на одной окружности.

Из этого утверждения появляется

Гипотеза 9.1. ГМТ $M: AM/BM = k \neq 1$ является окружностью с центром на прямой AB .

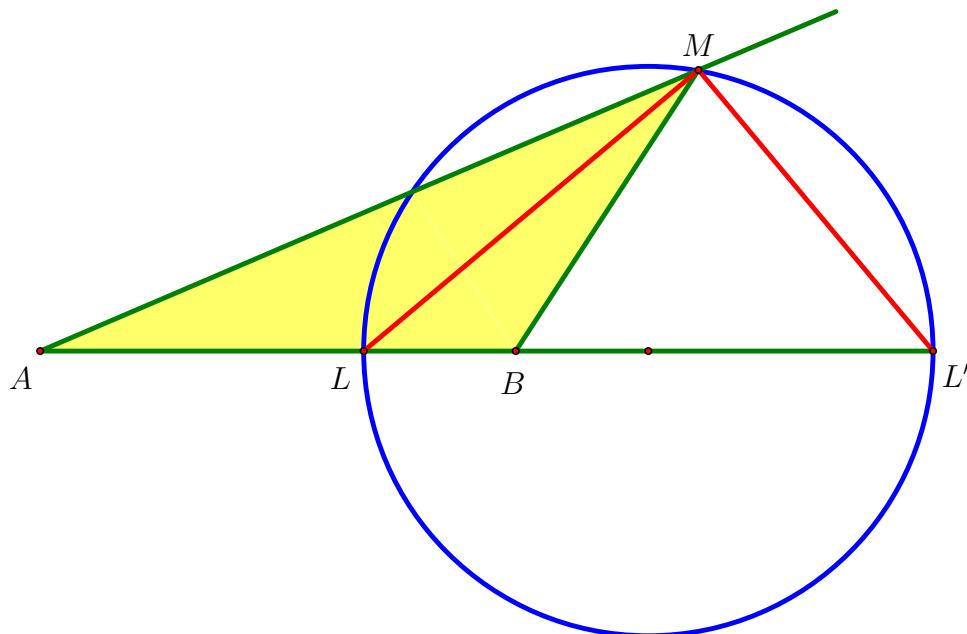


Рис. 9.4: гипотеза 9.1

Утверждение задачи 9.3 позволяет заключить, что любая точка, принадлежащая искомому ГМТ, лежит на окружности с диаметром LL' . Верно ли обратное утверждение? Как доказать, что любая точка данной окружности принадлежит ГМТ? Обычно при доказательстве утверждений о ГМТ в обратную сторону используется та же техника, что и в доказательстве в прямую. Однако в этом случае ситуация иная. Для доказательства утверждения в обратную сторону нам придется прибегнуть к неожиданному приему...

9.2 Координаты в геометрии

В 1637 году вышло первое издание «Рассуждения о методе, чтобы хорошо направлять свой разум и отыскивать истину в науках» — философского трактата Рене Декарта. В качестве третьего приложения к трактату был опубликован труд Декарта под названием «Геометрия». В этом труде Декарт излагает начала *аналитической геометрии* — дисциплины, которая позволяла с помощью системы координат перевести геометрические задачи на алгебраический язык и тем самым существенно упрощала² их исследование и решение³.

Сразу отметим, что координаты, по всей видимости, являются единственным возможным способом доказательства гипотезы 9.1 для восьмиклассников, если не привлекать вписанные углы.

Перед тем, как перейти к доказательству гипотезы 9.1, скажем, что будет, если вместо отношения длин рассматривать сумму, разность или произведение. Соответствующие ГМТ хорошо известны в геометрии, однако устроены они куда более трудным образом! А именно,

²Нужно, однако, иметь в виду, что прямолинейный алгебраический подход к решению геометрических задач («введи координаты и посчитай»), как правило, не вскрывает причину явления.

³Идея синтеза алгебры и геометрии стала одним из поворотных пунктов в развитии математики. Впоследствии она привела к рождению *алгебраической геометрии* — науки, которая по праву занимает одно из центральных мест в современной математике. Методы алгебраической геометрии имеют широчайшее применение: от теории чисел и программирования до космологии и теории струн.

- ГМТ M : $AM + BM = k$ является эллипсом с фокусами в точках A и B ;
- ГМТ M : $|AM - BM| = k$ является гиперболой с фокусами в точках A и B ;
- ГМТ M : $AM \cdot BM = k$ является лемнискатой с фокусами в точках A и B .

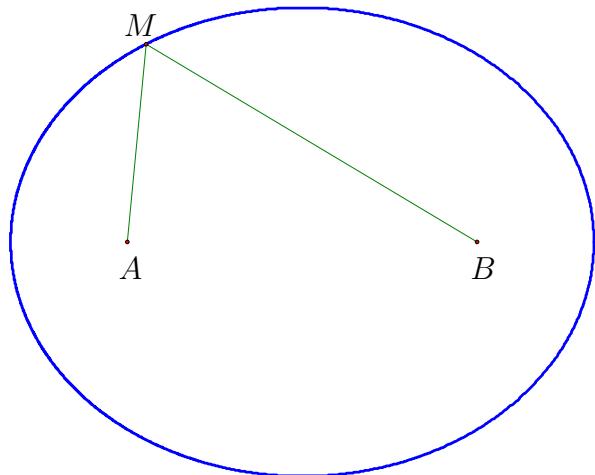


Рис. 9.5: Эллипс

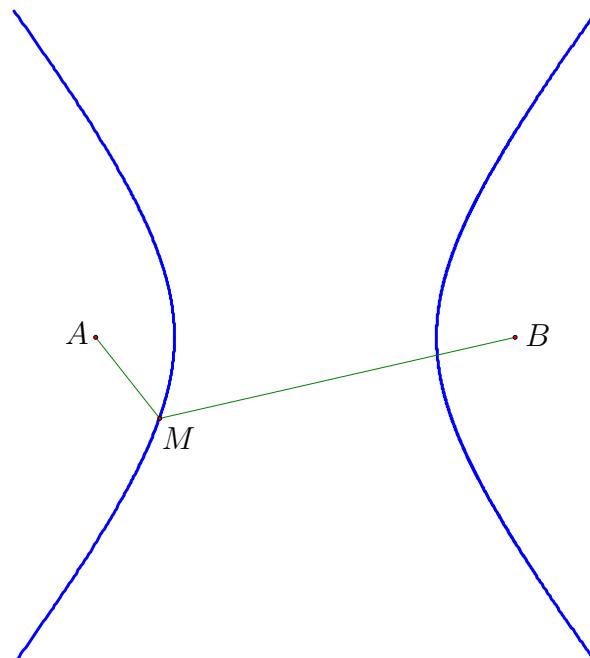


Рис. 9.6: Гипербола

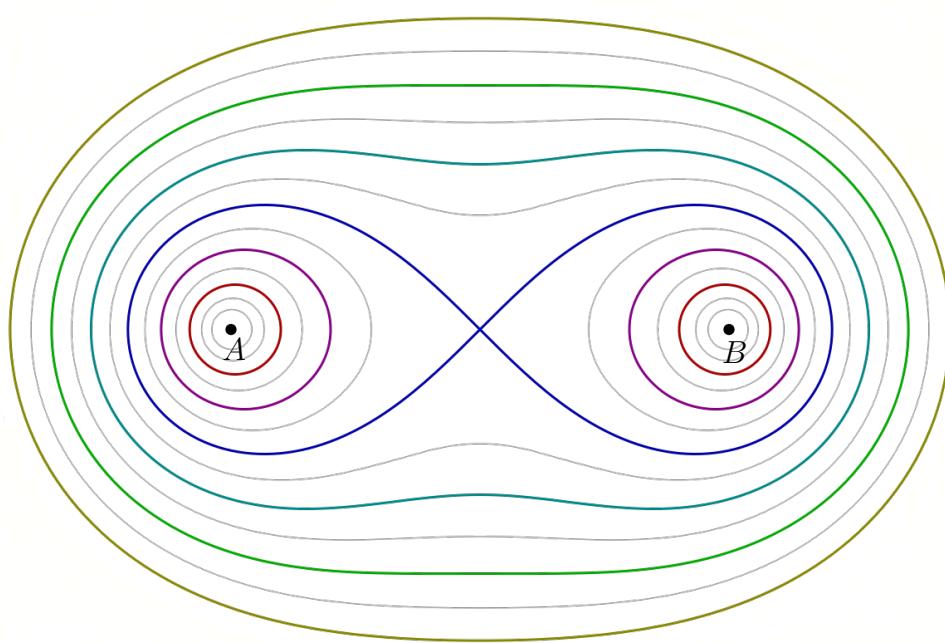


Рис. 9.7: Семейство лемнискат

Возможно, про эллипс и гиперболу вы уже что-то слышали (например, графиком функции $y = 1/x$ является гипербола), а вот лемниската, скорее всего, практически никому не известна. Однако же геометрические свойства этих фигур в школе проходят редко. Удивительно, что именно ГМТ с отношениями длин устроено наиболее просто и красиво...

Зафиксируем на плоскости отрезок AB и произвольное положительное число k . Наша цель — описать геометрическое место точек M , таких, что $AM/BM = k$.

Задача 9.4. Попробуйте самостоятельно доказать гипотезу 9.1, введя подходящую систему координат.

Приведем ниже это доказательство.

Доказательство. Введем декартову систему координат, взяв начало координат O в середине отрезка AB и направив ось Ox по прямой AB , а ось Oy — по серединному перпендикуляру к отрезку AB . Пусть координаты точки A равны $(-a/2, 0)$, а точки $B = (a/2, 0)$ (здесь a — длина отрезка AB).

Рассмотрим произвольную точку M с (неизвестными) координатами (x, y) , удовлетворяющую условию $AM/BM = k$. Наша цель — преобразовать это геометрическое условие на точку M в алгебраическое соотношение на координаты (x, y) точки M . Тогда характер зависимости между координатами позволит определить, какое именно множество образуют все точки M , удовлетворяющие условию $AM/BM = k$. Поэтому если условие $AM/BM = k$ удастся переписать в виде $(x - x_0)^2 + y^2 = R^2$, наша теорема будет доказана.

Сделаем цепочку равносильных преобразований:

$$\begin{aligned} AM/BM = k &\Leftrightarrow AM^2 = k^2 \cdot BM^2 \Leftrightarrow (x + a/2)^2 + y^2 = k^2((x - a/2)^2 + y^2) \Leftrightarrow \\ (k^2 - 1)x^2 - a(k^2 + 1)x + (k^2 - 1)y^2 - (k^2 - 1)a^2/4 &= 0 \Leftrightarrow (\text{т.к. } k \neq 1) \\ x^2 - a \cdot \frac{k^2 + 1}{k^2 - 1} \cdot x + y^2 - a^2/4 &= 0 \Leftrightarrow \\ \left(x^2 - 2 \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{k^2 + 1}{k^2 - 1} \cdot x + \left(\frac{a}{2} \cdot \frac{k^2 + 1}{k^2 - 1}\right)^2\right) + y^2 - \left(\frac{a}{2} \cdot \frac{k^2 + 1}{k^2 - 1}\right)^2 + a^2/4 &= 0 \Leftrightarrow \\ \left(x - \frac{a}{2} \cdot \frac{k^2 + 1}{k^2 - 1}\right)^2 + y^2 &= \left(\frac{ak}{|k^2 - 1|}\right)^2. \end{aligned}$$

Таким образом, точка M удовлетворяет условию $AM/BM = k$ тогда и только тогда, когда ее координаты (x, y) удовлетворяют уравнению

$$\left(x - \frac{a}{2} \cdot \frac{k^2 + 1}{k^2 - 1}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{ak}{|k^2 - 1|}\right)^2, \quad (9.1)$$

которое является уравнением окружности с центром в точке $\left(\frac{a}{2} \cdot \frac{k^2 + 1}{k^2 - 1}, 0\right)$ и радиусом $\frac{ak}{|k^2 - 1|}$, что и требовалось доказать. \square

Определение. Такая окружность называется *окружностью Аполлония с коэффициентом k* и обозначается через $Apoll_k(A, B)$. Иногда для краткости мы будем писать просто $Apoll(A, B)$, если коэффициент k не важен.

Отметим следующий момент: формальное условие $k \neq 1$ мы использовали, когда делили наше уравнение на $k^2 - 1$, в результате чего получилось уравнение окружности. Однако при $k = 1$ искомым ГМТ является прямая (серединный перпендикуляр к отрезку AB). Оказывается, разумно считать такую прямую *окружностью бесконечно большого радиуса*. Что означают эти слова, мы обсудим в следующем разделе.

Задача 9.5. Рассмотрим окружность Ω и точку A , не лежащую на ней и не лежащую в центре Ω . Докажите, что пару (A, Ω) можно дополнить единственной точкой B так, чтобы $\Omega = Apoll(A, B)$.

9.3 Пучок окружностей Аполлония

Метод координат позволил нам вывести уравнение окружности Аполлония, однако мы пока что не нарисовали этой окружности Аполлония явно для конкретных значений параметров a и k . Поэтому остаются открытыми многие естественные вопросы.

- Где лежит центр окружности Аполлония: на отрезке AB или вне этого отрезка?
- Окружность Аполлония содержит в себе обе точки A и B , только одну или вообще ни одной?
- Как радиус окружности Аполлония зависит от длины отрезка AB ?
- Как меняется окружность Аполлония с изменением коэффициента k ?

Дадим ответы на эти вопросы.

Определение. Множество окружностей Аполлония со всевозможными коэффициентами k для фиксированных точек A, B называется *пучком окружностей Аполлония* (см. рис. 9.8).

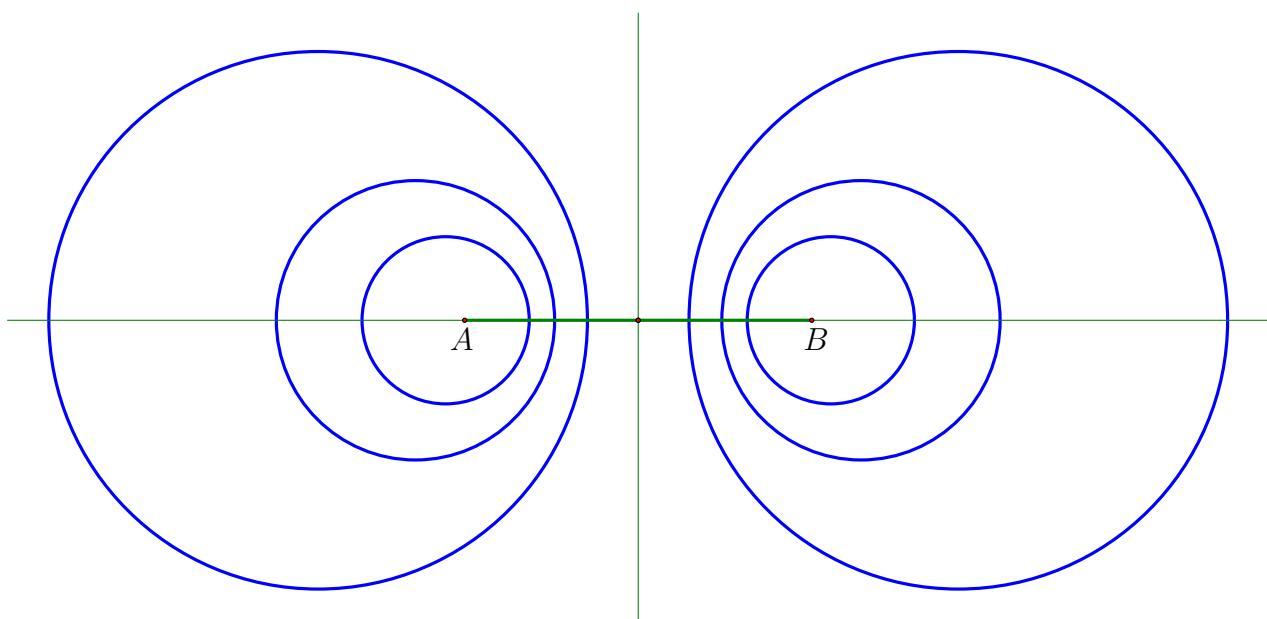


Рис. 9.8: Пучок окружностей Аполлония

Какие выводы можно сделать, глядя на рисунок 9.8? Прежде всего видна симметрия пучка окружностей Аполлония относительно серединного перпендикуляра к отрезку AB . Это легко объяснить следующим образом: пусть $M \in Apoll_k(A, B)$ и M' — точка, симметричная M относительно серединного перпендикуляра. Тогда

$$AM/BM = k \Leftrightarrow AM'/BM' = 1/k \Leftrightarrow M' \in Apoll_{1/k}(A, B).$$

Поэтому окружности $Apoll_k(A, B)$ и $Apoll_{1/k}(A, B)$ симметричны. Это означает, что нам в наших рассуждениях достаточно ограничиться случаем $k > 1$, поскольку случай $0 < k < 1$ будет симметричен ему.

Далее, видно, что центры окружностей Аполлония всегда лежат вне отрезка AB , каждая окружность Аполлония пересекает отрезок AB (т.е. разделяет точки A и B), сами окружности Аполлония не пересекаются и, наконец, они могут быть как очень большими, так и очень маленькими.

Задача 9.6. Докажите, что окружности Аполлония попарно не пересекаются.

Для того, чтобы доказать оставшиеся утверждения, воспользуемся уравнением (9.1) окружности Аполлония. Зафиксируем число a (обозначающее длину отрезка AB) и посмотрим, как будут меняться координата $x_0(k) := \frac{a}{2} \cdot \frac{k^2+1}{k^2-1}$ центра $W(k)$ и радиус $R(k) := \frac{ak}{|k^2-1|}$ при различных k .

Есть два предельных положения: $k \rightarrow \infty$ и $k \rightarrow 1+$ (последняя запись означает, что параметр k стремится к 1 справа. т.е. k всегда остается больше 1).

При $k \rightarrow \infty$ имеем $x_0(k) \rightarrow (a/2) +$ и $R(k) \rightarrow 0$.

При $k \rightarrow 1+$ имеем $x_0(k) \rightarrow +\infty$ и $R(k) \rightarrow +\infty$.

Добавляя к этим предельным положениям симметричные относительно замены k на $1/k$, окончательно получаем следующее описание поведения окружностей Аполлония в зависимости от параметра k :

$k \rightarrow 0$	$W(k) \rightarrow A-$	$R(k) \rightarrow 0$
$k \rightarrow 1-$	$W(k) \rightarrow -\infty$	$R(k) \rightarrow \infty$
$k \rightarrow 1+$	$W(k) \rightarrow +\infty$	$R(k) \rightarrow \infty$
$k \rightarrow \infty$	$W(k) \rightarrow B+$	$R(k) \rightarrow 0$

9.4 Окружности Аполлония в треугольнике

Итак, метод координат позволил нам без каких-либо идейных затруднений доказать весьма нетривиальную геометрическую теорему об окружности Аполлония. Также с помощью проведенных нами вычислений нам удалось исследовать поведение окружностей Аполлония в зависимости от коэффициента k . К большому сожалению, координатный метод не позволяет выявить геометрической причины явления, не позволяет ответить на вопрос, *почему* окружность Аполлония действительно является окружностью.

Основной геометрический объект, с которым связана окружность Аполлония, — это биссектрисы треугольника. Рассмотрим произвольный треугольник ABM и проведем в нем биссектрисы ML и ML' внутреннего и внешнего углов при вершине M . Заметим, что $\angle LML' = 90^\circ$ (биссектрисы смежных углов). Значит,

окружность, построенная на отрезке LL' как на диаметре, проходит через точку M . Подводя промежуточный итог, мы заключаем, что

а) Эта окружность является окружностью Аполлония для пары точек A, B (см. рис. 9.4).

б) Верно и обратное: есть $Apoll(A, B)$ — окружность Аполлония для точек A и B , пересекающая прямую AB в точках L и L' , то для произвольной точки $M \in Apoll(A, B)$ отрезки ML и ML' являются биссектрисами внутреннего и внешнего углов при вершине M .

Более того, с каждым треугольником можно связать три окружности Аполлония.

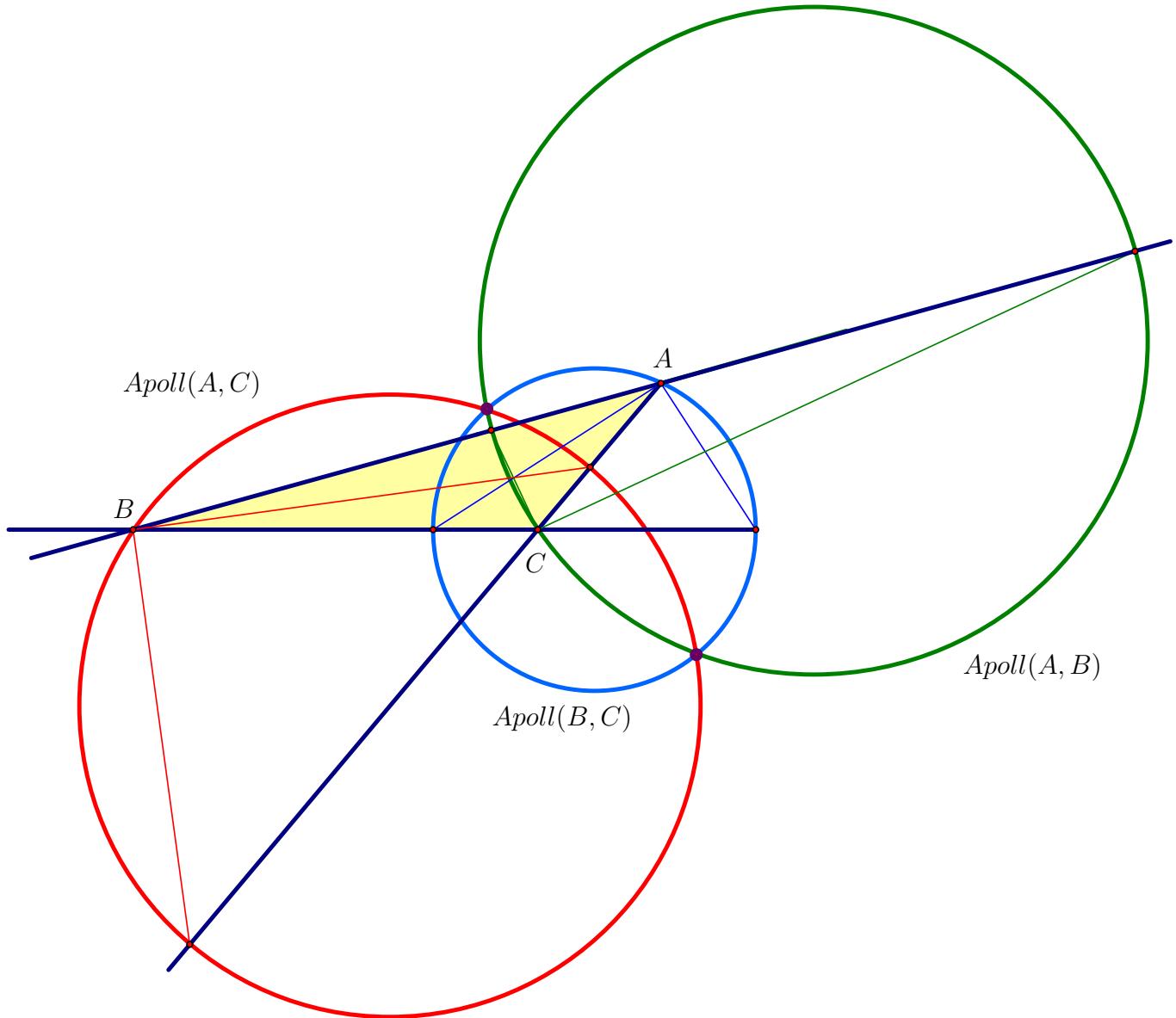


Рис. 9.9: Окружности Аполлония в треугольнике

Задача 9.7. Докажите, что окружности $Apoll(A, B)$, $Apoll(B, C)$ и $Apoll(A, C)$ пересекаются в двух точках⁴ (можно поэтому сказать, что они образуют пучок).

⁴Обратите внимание, что это утверждение аналогично утверждениям о других ГМТ, связанных с треугольником. Биссектрисы трех углов пересекаются в одной точке, серединные перпендикуляры тоже.

9.5 Снова точки W

В предыдущем разделе мы выяснили, что окружность Аполлония тесно связана с биссектрисами треугольника. Для нас это уже не первая встреча с ними! В главе 2 нами был исследован ряд конструкций, связанных с биссектрисами. Напомним, что центральную роль в этих конструкциях играли точки W .

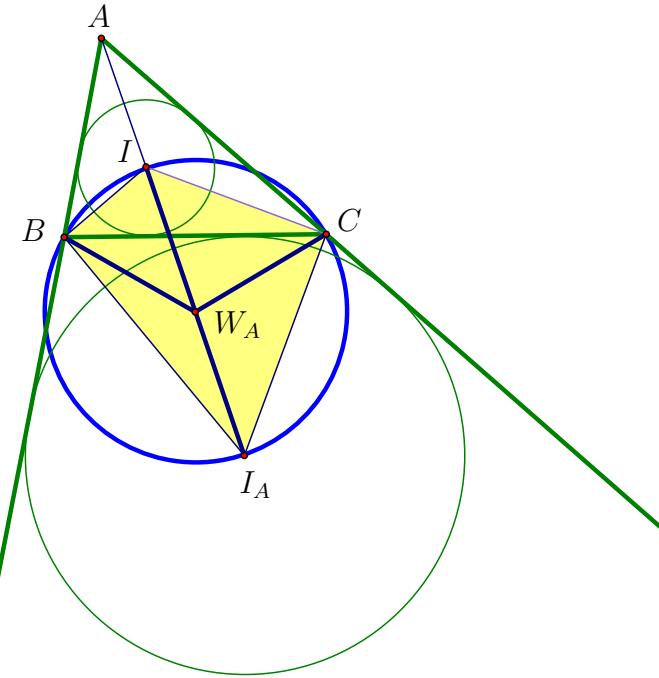


Рис. 9.10: W_A и окружность Аполлония

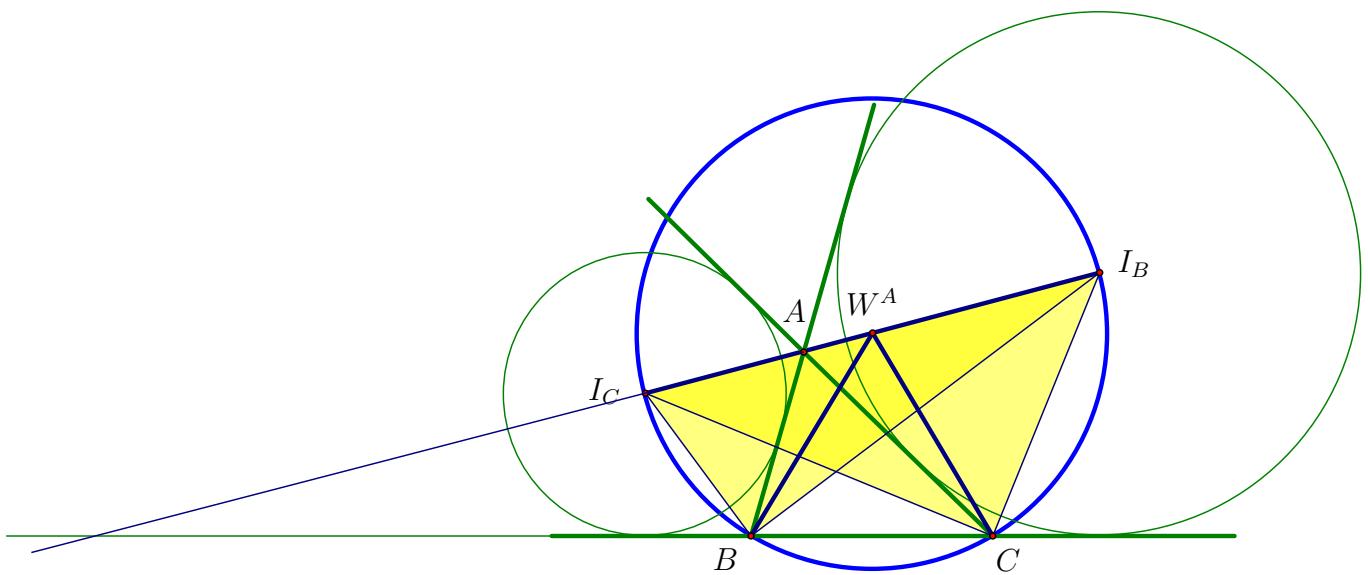


Рис. 9.11: W^A и окружность Аполлония

Они появились у нас как центры окружностей, естественно связанных с треугольником $I_A I_B I_C$ (см. рис. 2.2).

Напомним также ключевые факты о точках W , которые были результатом исследований, проведенных в главе 2.

- Точки W лежат на описанной окружности треугольника ABC (см. рис. 2.3).
- Точка W_A — это точка пересечения внутренней биссектрисы угла A и описанной окружности треугольника ABC (см. рис. 2.6). Точка W^A — это точка пересечения внешней биссектрисы угла A и описанной окружности треугольника ABC (см. рис. 2.6).
- Точки W — это точки, лежащие на описанной окружности треугольника и равноудаленные от двух его вершин (см. рис. 2.7).

Теперь обратим внимание на рисунки 9.10 и 9.11. Поскольку на них присутствуют биссектрисы, попробуем отыскать там и окружности Аполлония.

Задача 9.8. Найдите на рисунках 9.10 и 9.11 окружности Аполлония. Укажите, окружностями Аполлония каких пар точек они являются.

Можно ли поставить и решить обратную задачу? Можно ли, наоборот, дополнить саму окружность Аполлония $Apoll(A, B)$ для точек A и B (см. рис. 9.12) таким образом, чтобы в новой картинке возникли бы точки W ? Да, можно!

Начнем с точки W_A . Чтобы получить точку W_A , нужны точки I и I_A . На рисунке 9.12 две биссектрисы у нас уже есть, но нужны еще — их пересечения и будут точками I и I_A . Но для любой точки на окружности Аполлония отрезки с основанием в точках L и L' будут биссектрисами соответствующих углов! Тогда возьмем естественную точку — продлим отрезок MB до второго пересечения с окружностью Аполлония $Apoll(A, B)$ в точке K (см. рис. 9.13).

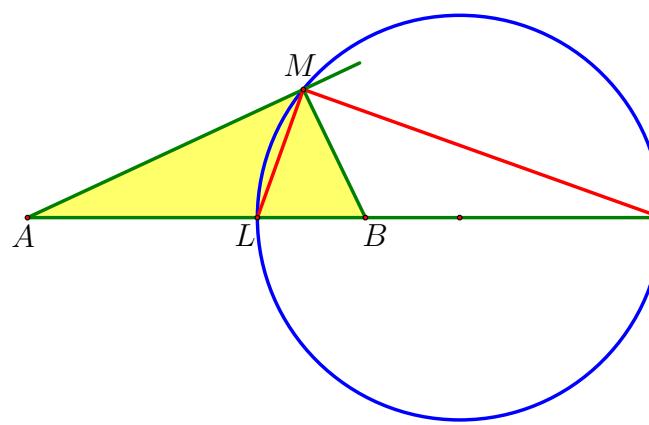


Рис. 9.12: Окружность Аполлония треугольника

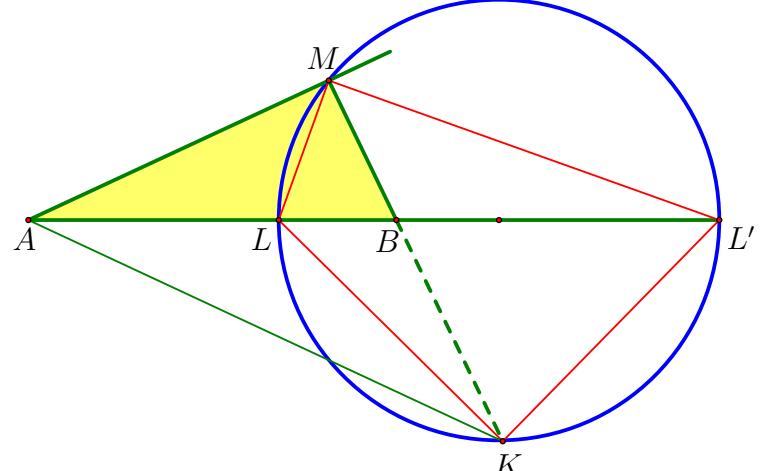


Рис. 9.13: Строим еще биссектрисы

Задача 9.9. Докажите, что точки L и L' являются центрами вписанной и вневписанной окружностей треугольника AMK . А центр окружности Аполлония $Apoll(A, B)$ является точкой W_A для него (см. рис. 9.14).

Обратите также внимание на следующий удивительный результат: мы всего лишь продлили отрезок MB до второго пересечения с окружностью Аполлония и получили при этом такую точку K , что $\angle MAB = \angle KAB$.

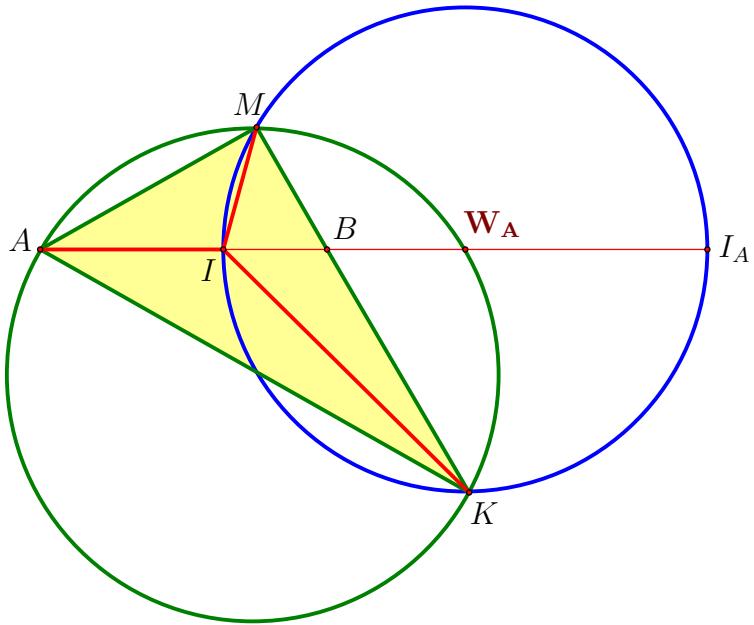


Рис. 9.14: Окружность Аполлония и точка W_A

Теперь реализуем аналогичным образом точку W^B . Для этого нам нужны центры двух вневписанных окружностей некоторого треугольника. Будем действовать по аналогии с предыдущим построением и рассмотрим точку N второго пересечения прямой AM с окружностью Аполлония $Apoll(A, B)$.

Задача 9.10. Докажите, что для треугольника BMN точки пересечения прямой AB с окружностью Аполлония $Apoll(A, B)$ будут центрами вневписанных окружностей треугольника BMN . А центр окружности Аполлония $Apoll(A, B)$ является точкой W^B для него (см. рис. 9.15).

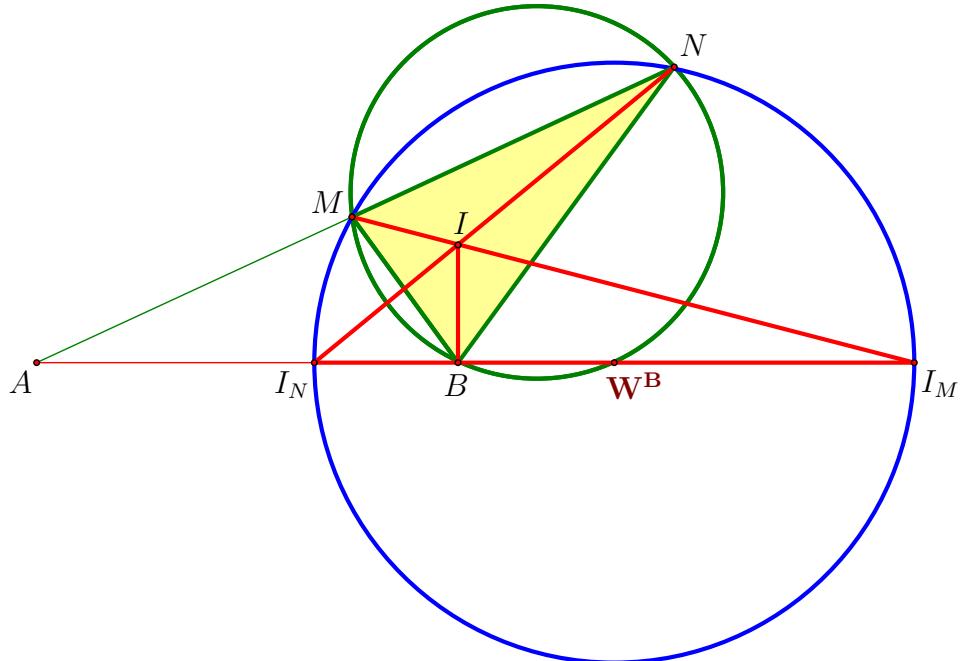


Рис. 9.15: Окружность Аполлония и точка W^B

Отметим также, что совершенно бесплатно мы получаем совершенно неочевидные утверждения:

1. Точки A, M, K, W_A лежат на одной окружности (см. рис. 9.14).
2. Точки B, M, N, W^B лежат на одной окружности (см. рис. 9.15).
3. Пусть BI – биссектриса треугольника BMN (см. рис. 9.15). Тогда $BI \perp AB$.

Задача 9.11. Докажите эти утверждения.

Таким образом, всякий раз, когда мы сталкиваемся с окружностью Аполлония, необходимо помнить, что она тесно связана с точками W , которые часто встречаются в различных геометрических конфигурациях.

9.6 Касательные и секущие

Обратим внимание на конфигурации, построенные нами на рисунках 9.14 и 9.15. Ключевую роль в них сыграли секущие окружности Аполлония. Если нарисовать эти секущие на одной картинке (см. рис. 9.16), то можно сделать несколько наблюдений.

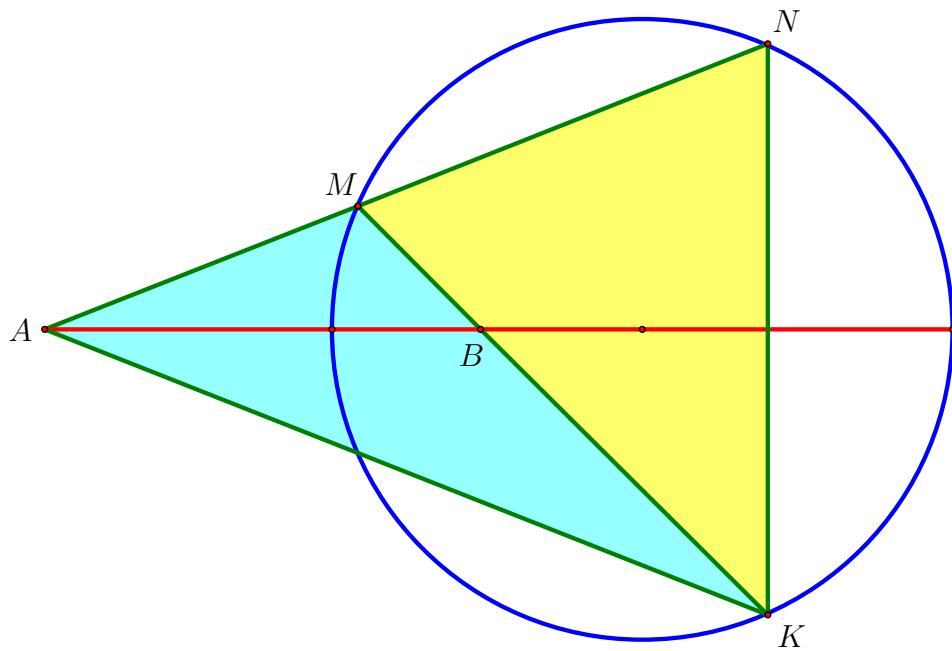


Рис. 9.16: Окружность Аполлония и секущие

Гипотеза 9.2. Рассмотрим произвольные секущие AM и BM окружности Аполлония $Apoll(A, B)$, вторично пересекающие ее в точках N и K соответственно. Точки N и K симметричны относительно прямой AB .

Гипотеза 9.3. Если взять произвольную секущую AM , вторично пересекающую окружность Ω в точке N , отразить точку N в точку K симметрично относительно прямой ℓ , проходящей через A и центр окружности Ω , и рассмотреть точку B пересечения прямой BK с прямой ℓ , то окружность Ω будет окружностью Аполлония $Apoll(A, B)$ для пары точек A и B (см. рис. 9.17). В частности, это означает, что вне зависимости от выбора точки M все прямые MK пересекаются в одной точке.

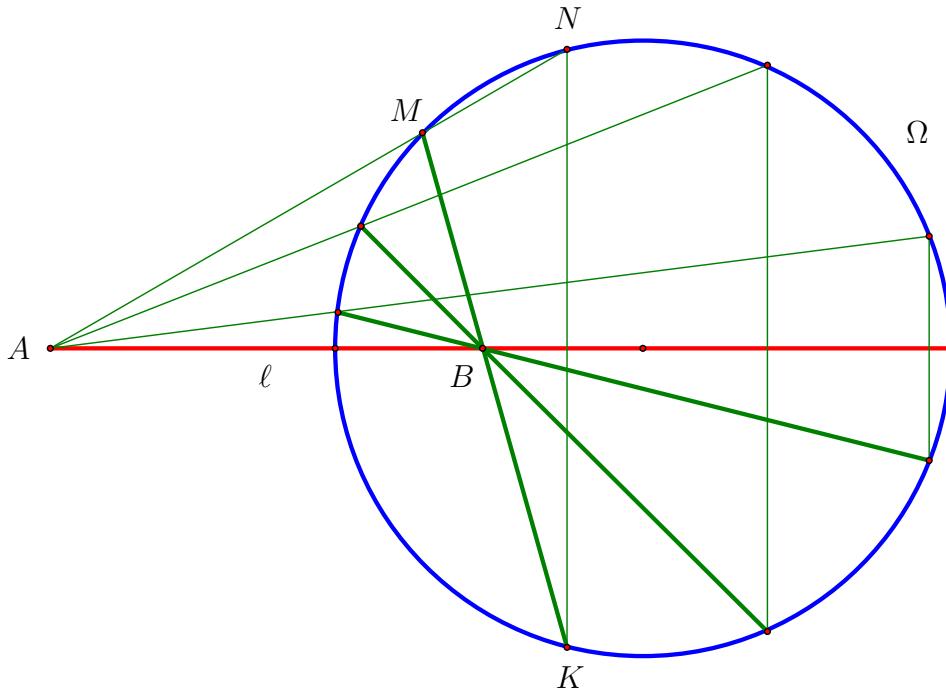


Рис. 9.17: Независимость построения точки B от секущей

Задача 9.12. Докажите гипотезы 9.2 и 9.3.

Замечание. Описанную выше конфигурацию мы будем называть «флажком», поскольку траектория ломаной $AMNKM$ напоминает полотнище флага и древко.

Если заходит речь о секущих, то нельзя оставить в стороне касательные, ведь касательная есть «предельное положение» секущей. Верны ли аналоги гипотез 9.2 и 9.3 для касательных?

Гипотеза 9.4. Рассмотрим произвольную окружность Ω и точку A , лежащую вне этой окружности. Проведем касательную AM к окружности Ω и опустим из точки касания M перпендикуляр AB на прямую, проходящую через A и центр окружности Ω . Тогда $\Omega = \text{Apoll}(A, B)$ — окружность Аполлония для точек A и B .

Гипотеза 9.5. Обратно, что $\Omega = \text{Apoll}(A, B)$ — окружность Аполлония для точек A и B и BM — перпендикуляр к AB , то прямая AM является касательной к окружности Аполлония $\text{Apoll}(A, B)$.

Задача 9.13. Докажите гипотезы 9.4 и 9.5 (см. рис. 9.18).

В заключение этого раздела покажем красивый пример, использующий наши утверждения о флажке и касательных. Рассмотрим равнобокую трапецию $MNKP$, вписанную в окружность. Пусть A — точка пересечения ее боковых сторон, а B — точка пересечения ее диагоналей. Проведем касательные к окружности из точки A . Тогда точка B лежит на отрезке, соединяющем точки касания (см. рис. 9.19).

В самом деле, в конфигурации этой задачи можно увидеть два способа построения точки B , превращающей описанную окружность трапеции в окружность Аполлония $\text{Apoll}(A, B)$: касательные и флажок.

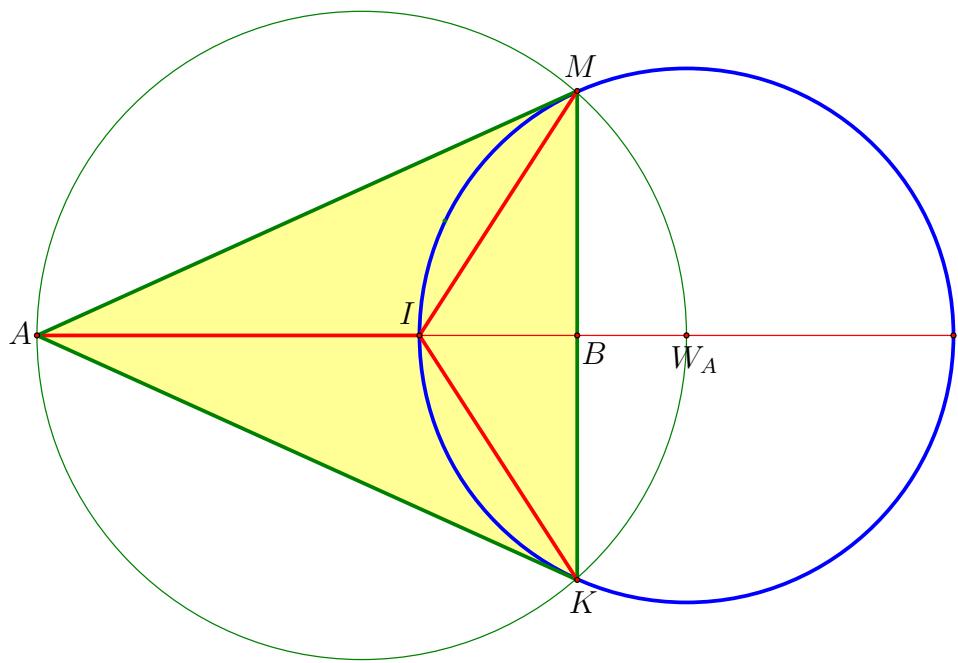


Рис. 9.18: Окружность Аполлония и касательные

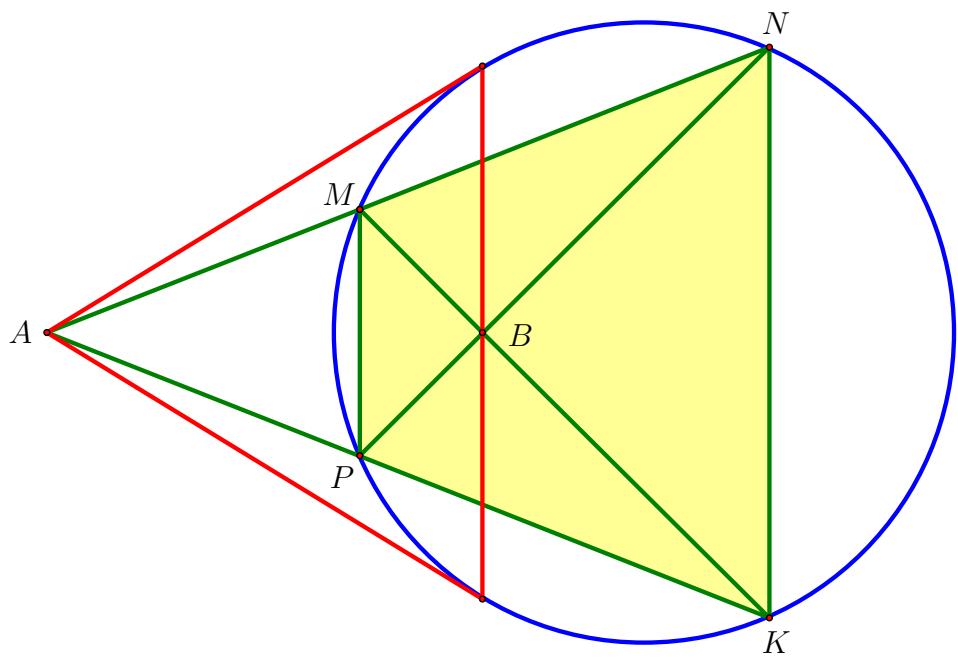


Рис. 9.19: Окружность Аполлония и секущие

9.7 Снова ортотреугольник

В этом разделе мы установим связь окружности Аполлония и высот в треугольнике. Само наличие подобной связи выглядит далеко не очевидным, поскольку, как мы выяснили выше, окружность Аполлония тесно связана с биссектрисами. Каким образом здесь появляются еще и высоты?

Ключевая теорема, устанавливающая связь между высотами и биссектрисами, нам уже знакома. А именно, это теорема об ортотреугольнике: *высоты треугольника являются биссектрисами его ортотреугольника* (смотрите задачи 2.8 и 2.9). Мы доказали эту теорему, проследив связь между высотами исходного треугольника и точками W ортотреугольника. Как мы показали, описанная окружность треугольника $H_A H_B H_C$ является окружностью Эйлера треугольника ABC , потому пересекает высоту в точке E_A , которая является точкой W_{H_A} (см. рис. 9.20)!

Оказывается, развитая нами техника, связанная с окружностью Аполлония, также позволяет доказать этот замечательный факт.

Рассмотрим точку A' пересечения прямых BC и $H_B H_C$ и окружность κ_A (см. рис. 9.21). Отрезок BC является диаметром этой окружности, поскольку на него смотрят два прямых угла. Рассмотрим точку A'_1 , такую, что эта окружность преобразуется в окружность Аполлония $Apoll(A', A'_1)$. Такая точка всегда существует и единственна (см. задачу 9.5).

Задача 9.14.

- Докажите, что точки H_B, H_C, M_A, A'_1 лежат на одной окружности.
- Докажите, что эта окружность является окружностью Эйлера треугольника ABC .
- Докажите, что $A'_1 = H_A$.
- Докажите, что $H_A A$ — биссектриса ортотреугольника.

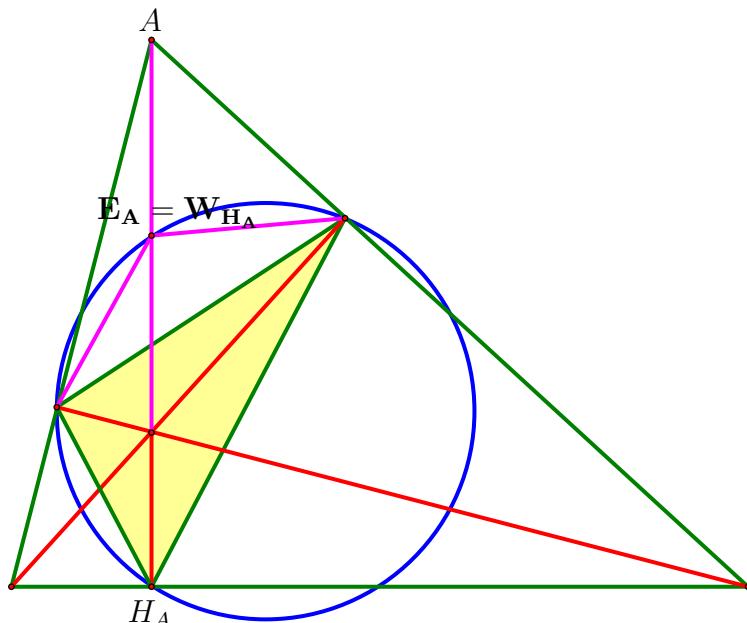


Рис. 9.20: Ортотреугольник и точки W

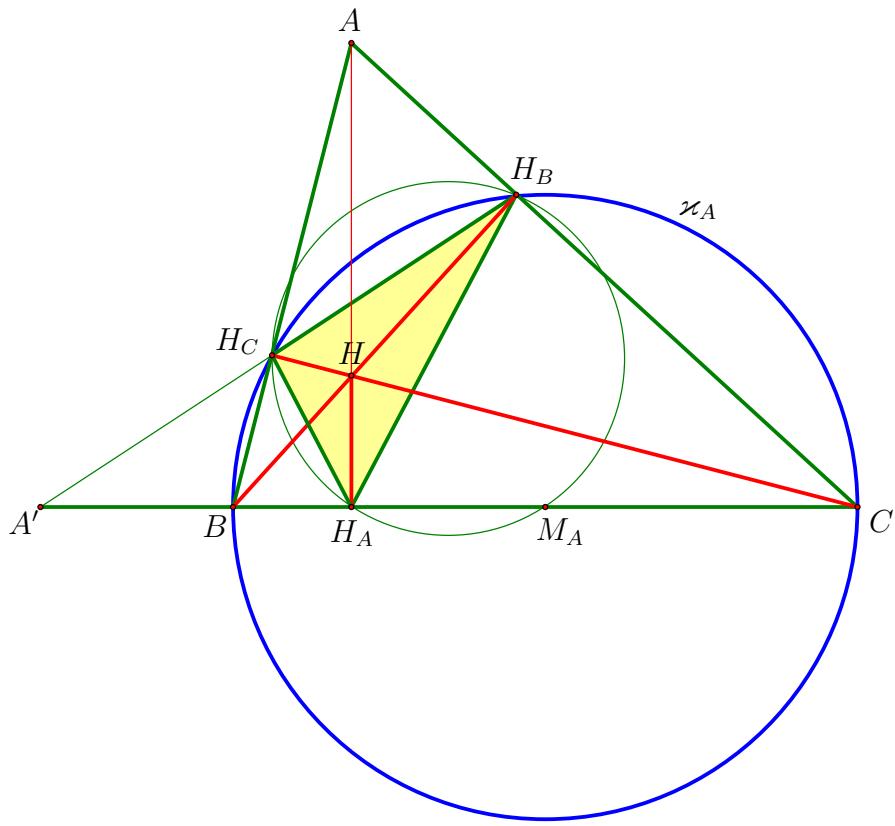


Рис. 9.21: Ортотреугольник и окружность Аполлония

Отметим, что второе доказательство выглядит более сложным, но зато оно более четко демонстрирует связь окружности Аполлония и высот в треугольнике. Оказывается, что уже знакомая нам по сюжету об окружности Эйлера окружность ν_A является окружностью Аполлония: $\nu_A = \text{Apoll}(A', H_A)$!

Задача 9.15 (*). Позволит ли развитая нами техника решить задачу 2.11?

Но существует еще одна замечательная окружность, связанная с окружностью Эйлера, — это окружность ν^A . Является ли эта окружность окружностью Аполлония для некоторой пары точек?!

Оказывается, да! Причем таких пар можно указать сразу две!

Начнем с более простой пары. Для этого обозначим через Q точку пересечения высоты AH_A и прямой H_BH_C (см. рис. 9.22).

Задача 9.16. Докажите, что $\nu^A = \text{Apoll}(H_A, Q)$.

Теперь перейдем к изучению второй (и более интересной!) пары точек, превращающей окружность ν^A в окружность Аполлония. Оказывается, с этой окружностью связано замечательное утверждение⁵.

Задача 9.17. Рассмотрим точку F пересечения окружности ν_A с высотой AH_A . Тогда отрезок $A'F$ является касательной к окружности ν_A (см. рис. 9.23).

⁵Которое интересно не только с точки зрения евклидовой геометрии, но и оказывается полезным в геометрии Лобачевского!

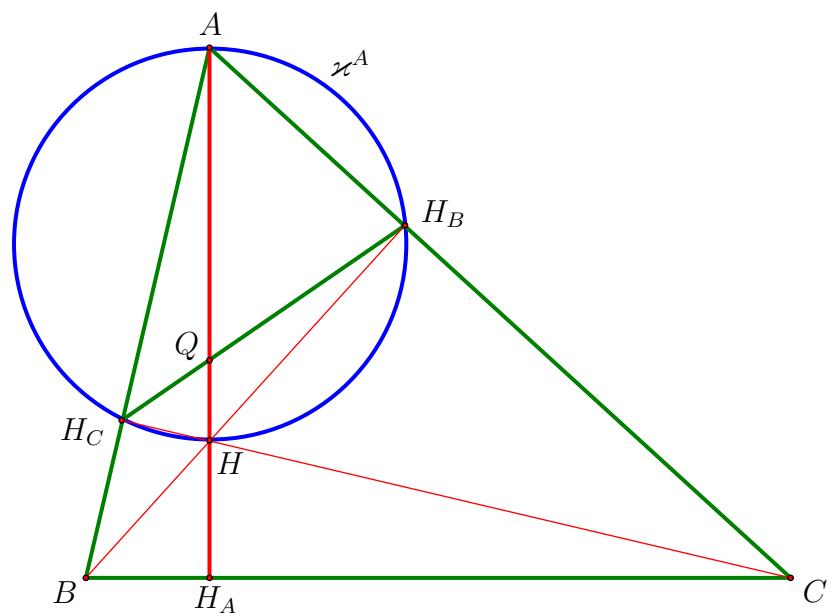


Рис. 9.22: κ^A — окружность Аполлония

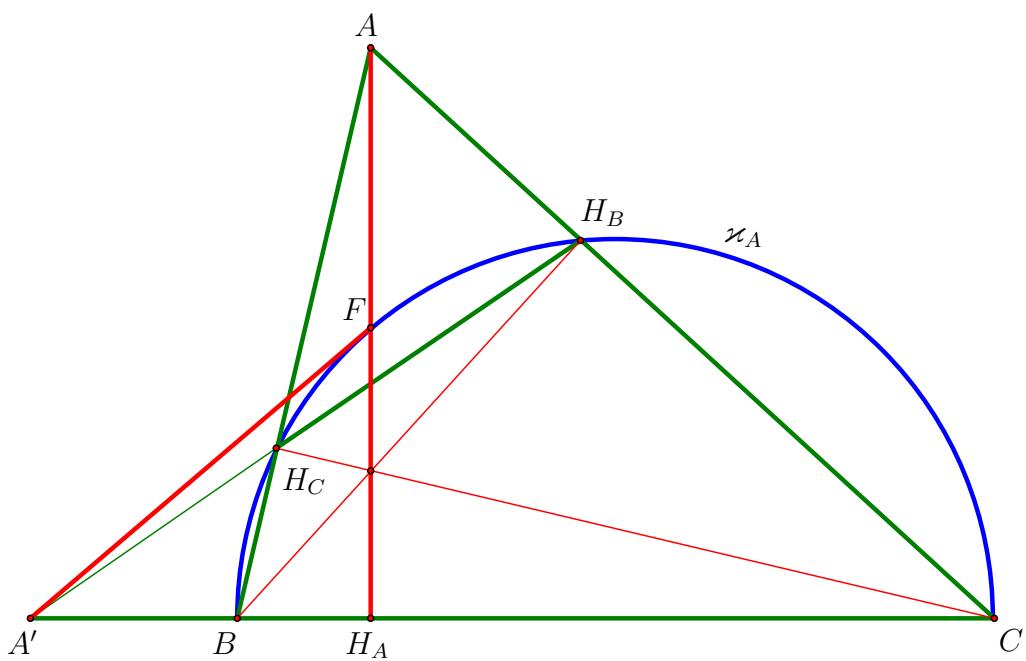


Рис. 9.23: Высоты и касательная

Точка F подсказывает нам вторую пару точек, превращающих κ^A в окружность Аполлония.

Задача 9.18. Рассмотрим точку F' , симметричную точке F относительно прямой BC . Тогда окружность κ^A является окружностью Аполлония для пары точек F и F' (см. рис. 9.24).

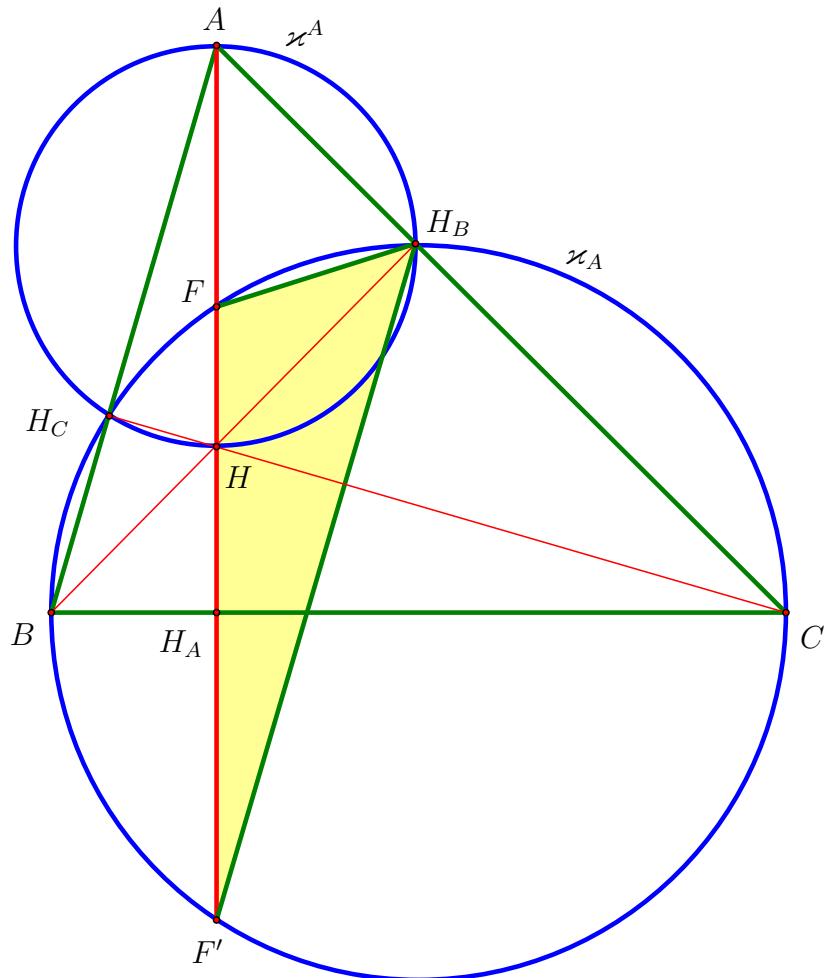


Рис. 9.24: κ^A — окружность Аполлония

9.8 Задача Фаньяно и теорема синусов

Теорема об ортотреугольнике позволяет решить одну из самых известных геометрических задач на максимум и минимум: задачу Фаньяно. Звучит эта задача следующим образом: *вписать в данный треугольник треугольник минимального периметра*. В этом разделе мы решим эту задачу и выведем из ее решения теорему синусов — одну из самых важных теорем школьной геометрии, используемых для вычислений.

Теорема (о треугольнике наименьшего периметра). *Треугольником наименьшего периметра, вписаным в данный остроугольный треугольник, является ортотреугольник.*

Доказательство. Рассмотрим произвольный *остроугольный* треугольник ABC (дело в том, что для прямо- и тупоугольных треугольников решение задачи Фаньяно вырожденное: ответом является высота, проведенная к наибольшей стороне) и произвольный треугольник $A_1B_1C_1$, вписанный в него. Поскольку вычислять периметр такого треугольника, просто складывая длины его сторон, неудобно, поступим следующим образом. Попробуем *выпрямить* эти стороны, т.е. каким-то образом перебросить их на отрезки, лежащие на одной прямой. Самый простой способ сделать это — осевая симметрия. Рассмотрим образы A'_1C_1 и A''_1B_1 отрезков A_1C_1 и A_1B_1 при осевых симметриях относительно прямых AB и AC соответственно.

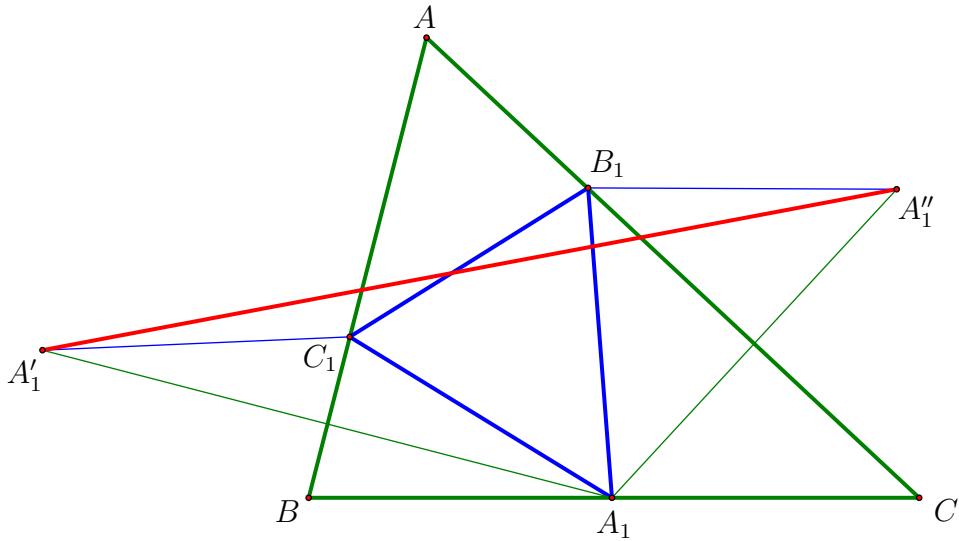


Рис. 9.25: «Выпрямление» сторон вписанного треугольника

Задача 9.19. Докажите, что для того, чтобы периметр треугольника $A_1B_1C_1$ был бы минимальным, необходимо, чтобы точки B_1 и C_1 лежали бы на отрезке $A'_1A''_1$.

Отметим, что уже по этому соображению можно доказать, что ответом в задаче Фаньяно действительно является ортотреугольник. В самом деле, из предыдущего рассуждения следует, что стороны AB и AC являются биссектрисами внешних углов треугольника $A_1B_1C_1$. Ясно, что и сторона BC будет биссектрисой. Теорема доказана.

Теперь давайте попробуем вычислить периметр найденного треугольника.

Задача 9.20.

- Докажите, что треугольник $AA'_1A''_1$ является равнобедренным.
- Пусть $\angle BAC = \alpha$. Чему тогда равен $\angle A'_1AA''_1$?
- Докажите, что выполнены равенства $p(\triangle A_1B_1C_1) = A'_1A''_1 = AA_1 \cdot \sin \alpha$, где $p(\triangle A_1B_1C_1)$ — полупериметр треугольника $A_1B_1C_1$.
- Докажите, что полупериметр треугольника $A_1B_1C_1$ будет минимальным тогда и только тогда, когда AA_1 — высота треугольника ABC .

Итак, вершина A_1 треугольника $A_1B_1C_1$ минимального периметра должна совпадать с основанием высоты. Осталось провести аналогичные рассуждения для вершин B_1 и C_1 .

□

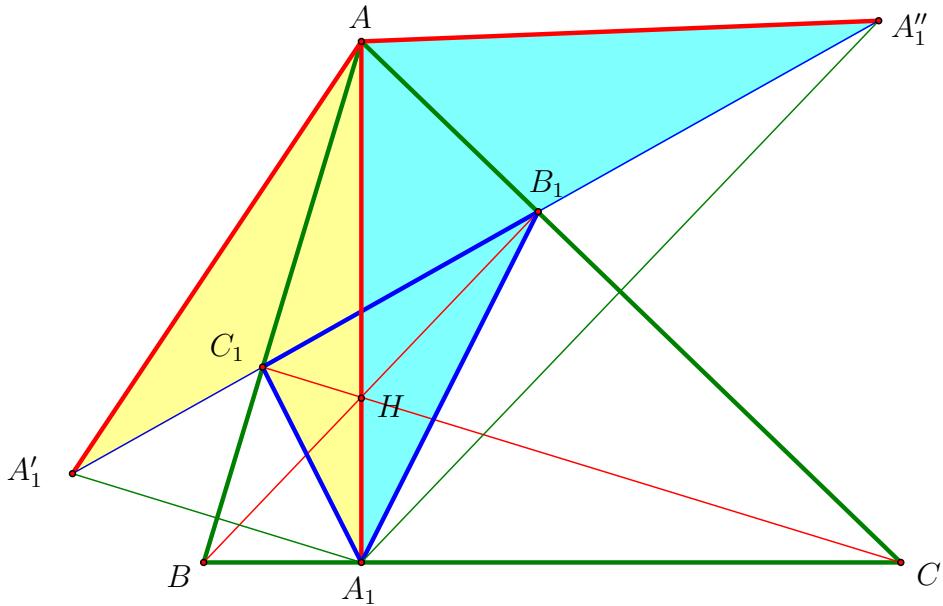


Рис. 9.26: Треугольник $AA'_1A''_1$

Таким образом нами доказана следующая замечательная формула (или, точнее, формулы):

$$h_a \cdot \sin \alpha = h_b \cdot \sin \beta = h_c \cdot \sin \gamma = p(\triangle A_1 B_1 C_1) \quad (9.2)$$

(здесь h_a, h_b, h_c — длины высот, проведенных из вершин A, B, C треугольника ABC соответственно, α, β, γ — это градусные меры его углов, а $p(\triangle A_1 B_1 C_1)$ — полупериметр его ортотреугольника).

Это равенство — первое тригонометрическое соотношение в *произвольном* (не прямоугольном!) треугольнике⁶. Это действительно невероятно, ведь по своему определению синусы и косинусы вычисляются лишь в прямоугольных треугольниках, поэтому трудно ожидать их появления где-либо еще. А на самом деле они появляются в абсолютно любых треугольниках, причем в гораздо более разнообразных формах!

Правда, здесь можно возразить, что хоть и доказанная нами формула красива, она вряд ли может быть использована на практике. Все же чаще в условиях задач встречаются длины a, b, c сторон треугольника, а не длины его высот...

Однако высоты порождают прямоугольные треугольники! Давайте попробуем этим воспользоваться. А именно, выражим длины высот h_b и h_c через длины сторон b и c и угол α . Имеем: $h_b = c \cdot \sin \alpha$ и $h_c = b \cdot \sin \alpha$. Подставляя эти равенства в (9.2) и упрощая, получаем следующее равенство: $\frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$. Проводя аналогичное рассуждение для пары сторон a и b , получаем, что $\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta}$. Таким образом, справедливо следующее равенство:

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}. \quad (9.3)$$

Это равенство и называется *теоремой синусов*.

⁶Хотя в начале решения задачи Фанъяно мы договорились, что будем рассматривать только остроугольные треугольники, рассуждения, которые приводят к вычислению полупериметра ортотреугольника, справедливы всегда.

По сути эта теорема является вычислительным аналогом второго признака равенства треугольников, утверждающего, что два треугольника равны по стороне и двум прилежащим к ней углам. Т.е., зная длину стороны a и градусные меры углов β и γ , можно однозначно задать весь треугольник. Теорема синусов (9.3) как раз и позволяет явно вычислить стороны b и c , зная величины a , β и γ : сначала мы находим угол $\alpha = 180^\circ - \beta - \gamma$, а затем получаем

$$b = a \cdot \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} \quad \text{и} \quad c = a \cdot \frac{\sin \gamma}{\sin \alpha}.$$

Замечание. Оказывается, что теорему синусов можно уточнить. А именно, верно еще одно соотношение:

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R,$$

где R — радиус описанной окружности треугольника. Именно в таком виде эта теорема наиболее часто используется в задачах. Однако для ее доказательства, по всей видимости, необходимо использовать вписанные углы.

Глава 10

Пропорциональные отрезки в треугольнике

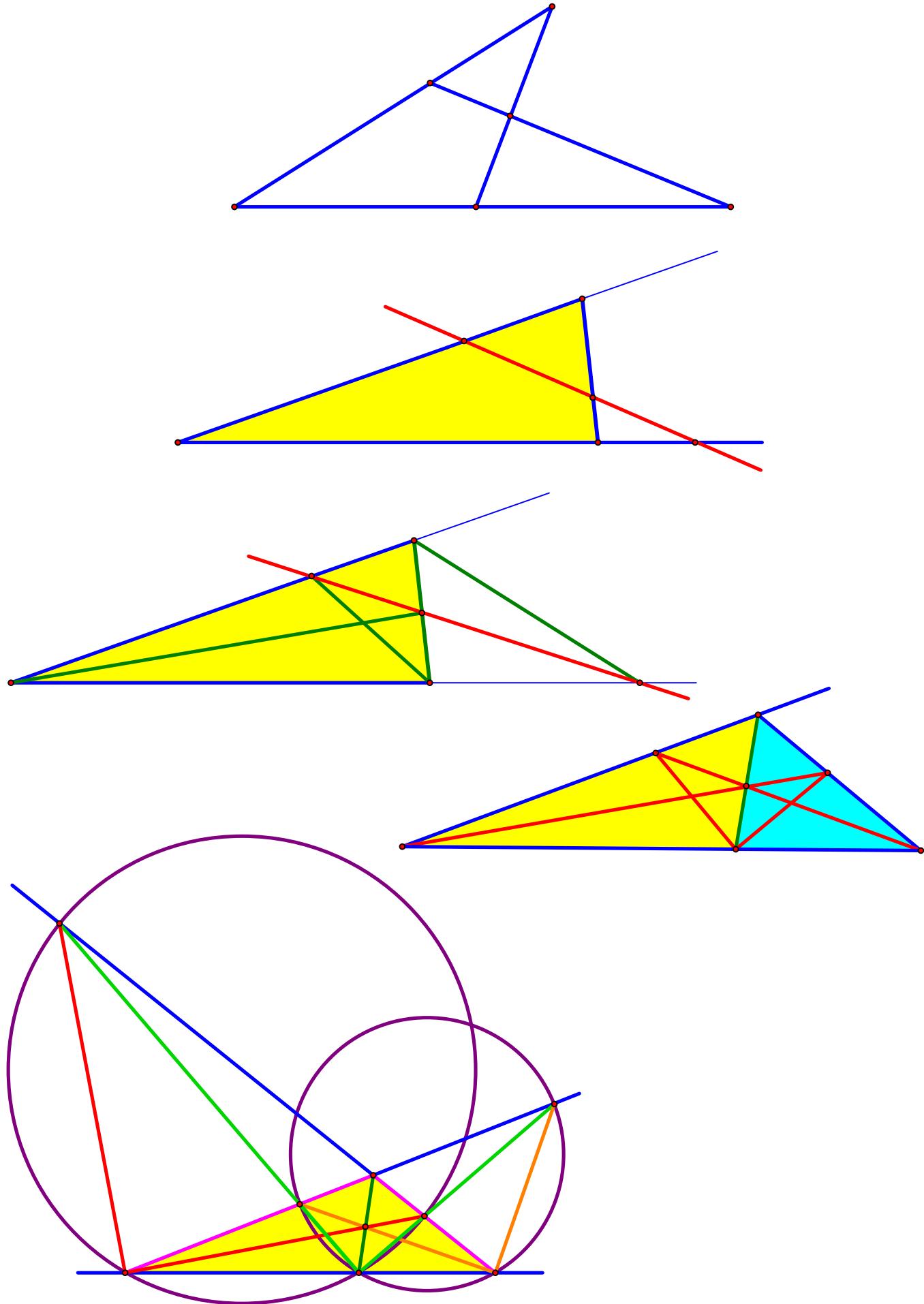
В предыдущей главе мы увидели, насколько содержательным оказывается рассмотрение отношений и пропорциональных отрезков.

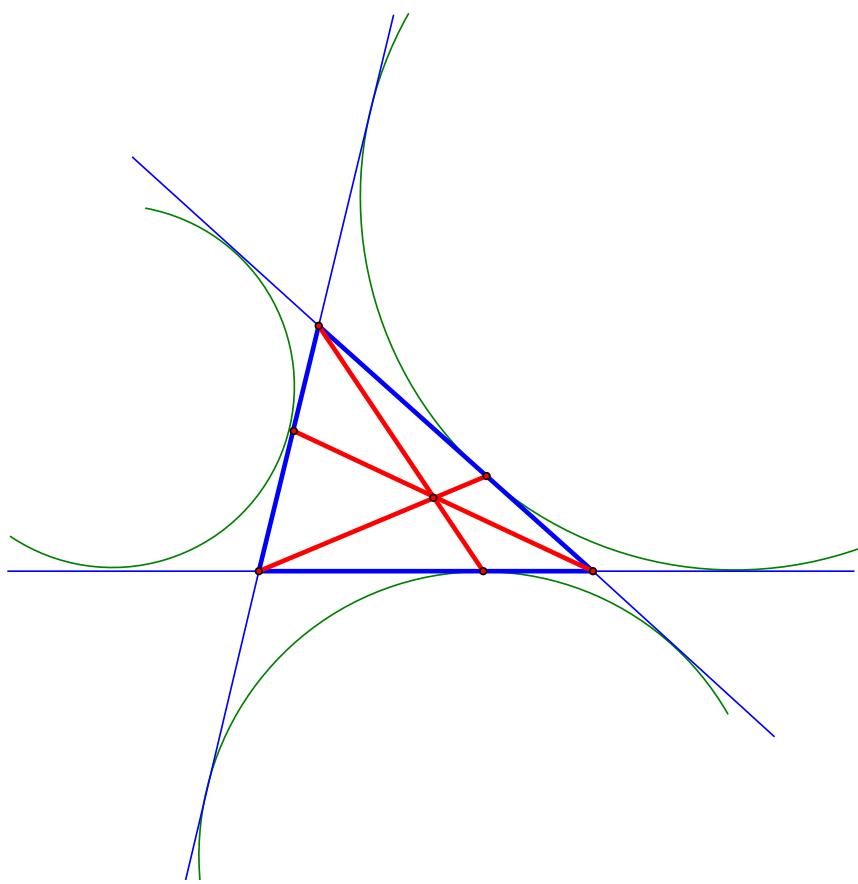
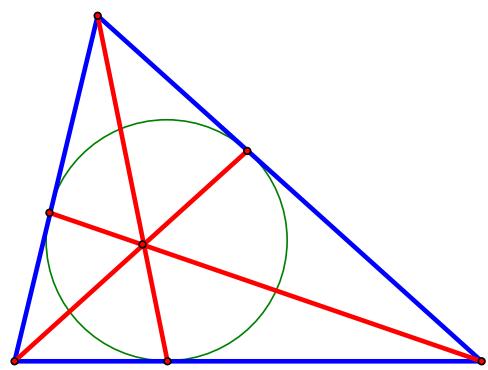
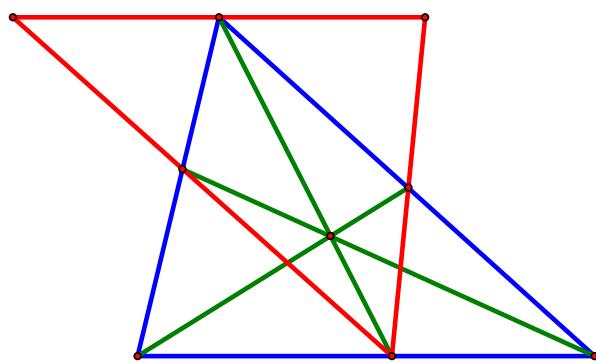
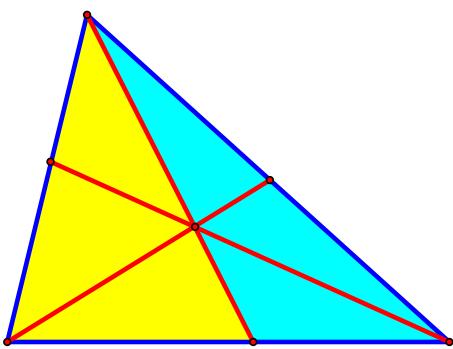
На данный момент нам известны две ключевые конструкции, имеющие дело с отношениями длин: теорема о пропорциональных отрезках и теорема о биссектрисах треугольника (которая тесно связана с окружностью Аполлония). Однако и там, и там есть существенные ограничения на выбор отрезков: либо параллельные прямые, либо равные углы. Хотелось бы расширить класс конфигураций, в которых можно было бы считать отношения длин отрезков. Один из способов добиться этого — подобия. В данной главе мы рассмотрим другой способ, который является обобщением теоремы о пересечении медиан в треугольнике.

Разработанная в этой главе техника позволит нам не только доказать ряд утверждений общего характера, но также поможет ответить на некоторые ранее поставленные вопросы.

Для освоения этой главы достаточно владения следующим материалом:

- первые восемь параграфов учебника Погорелова;
- главы 2 и 9 настоящей книги.





10.1 Теорема Менелая и пропорциональные отрезки в треугольнике

Предыдущую главу мы начали с упоминания связи пропорциональных отрезков и параллельных прямых. Однако пропорциональные отрезки встречаются и в конфигурациях с произвольными прямыми!

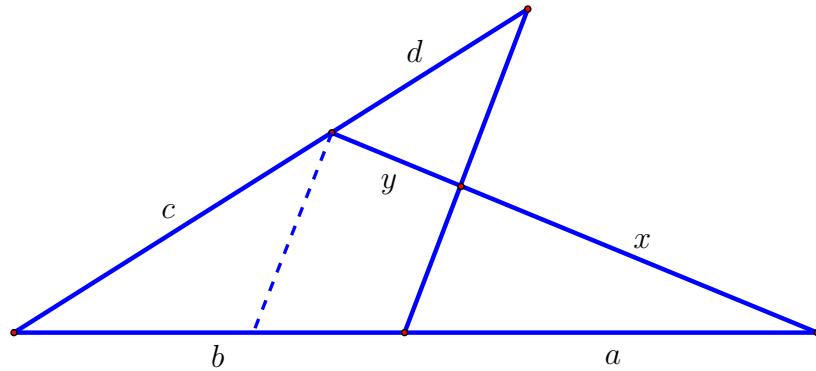


Рис. 10.1: Теорема о пропорциональных отрезках

Задача 10.1. Докажите, что выполнено соотношение

$$\frac{x}{y} = \frac{a}{b} \cdot \left(\frac{c}{d} + 1 \right). \quad (10.1)$$

Данное утверждение мгновенно позволяет установить связь между пропорциональными отрезками и нахождением трех точек на одной прямой. Речь идет о теореме, которая впервые была обнаружена в труде древнегреческого ученого Менелая Александрийского ¹.

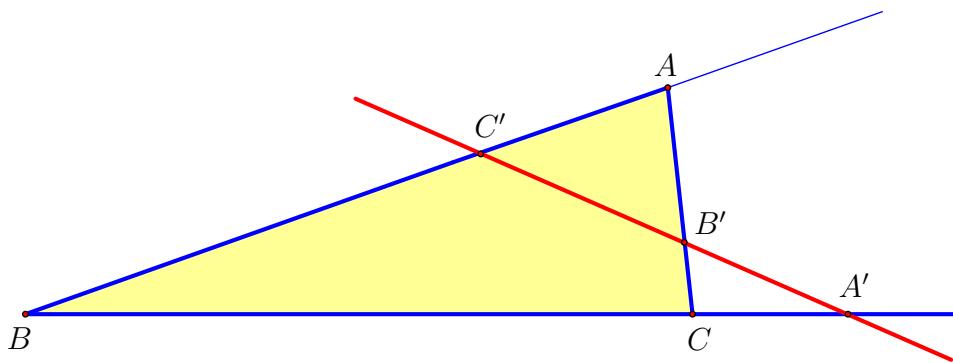


Рис. 10.2: Теорема Менелая

Оказывается, что эти теоремы тесно связаны с гомотетией! Эту связь мы обсудим в разделе 11.6.

¹Работа Менелая была выполнена около 100 года до н.э. Примечательно, что в ней обсуждаемая теорема доказывается не только для плоской, но и для сферической геометрии! Это было важно для приложений. Сфериальная теорема Менелая была основным средством, с помощью которого решались разнообразные прикладные задачи позднеантичной и средневековой астрономии и геодезии.

Теорема (Менелай). Точки A' , B' и C' , лежащие соответственно на сторонах BC , CA и AB треугольника ABC или на их продолжениях, принадлежат одной прямой тогда и только тогда, когда выполнено соотношение

$$\frac{AB'}{B'C} \cdot \frac{CA'}{A'B} \cdot \frac{BC'}{C'A} = 1. \quad (10.2)$$

Задача 10.2. Докажите теорему Менелая.

С какими объектами в треугольнике естественно связаны отношения? С биссектрисами, конечно! Покажем, как теорема Менелая позволяет мгновенно получить нетривиальные свойства, связанные с биссектрисами.

Задача 10.3. Докажите, что основания биссектрис двух внутренних углов L_B , L_C и основание биссектрисы внешнего угла L'_A лежат на одной прямой (см. рис. 10.3).

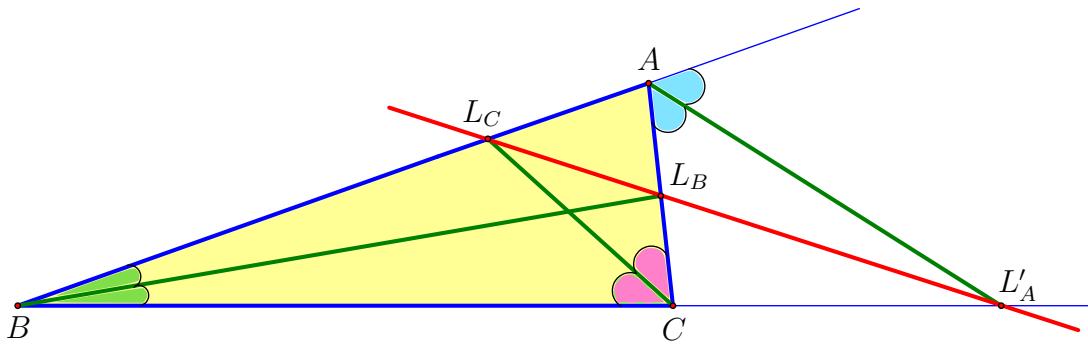


Рис. 10.3: Основания трех биссектрис

Иногда этот факт называют утверждением о четвертой биссектрисе, поскольку если рассмотреть треугольник $L_A L_B L_C$, образованный основаниями биссектрис внутренних углов произвольного треугольника ABC , и продлить его стороны до пересечения с продолжениями сторон исходного треугольника, то полученная точка пересечения будет основанием биссектрисы внешнего угла треугольника ABC — той самой четвертой биссектрисы (см. рис. 10.4).

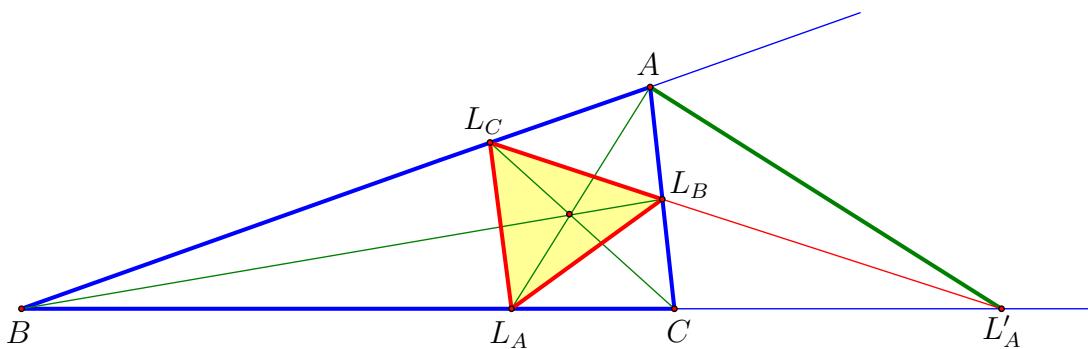


Рис. 10.4: Четвертая биссектриса

Аналогичные рассуждения можно провести и для трех биссектрис внешних углов.

Задача 10.4. Докажите, что основания биссектрис трех внешних углов L'_A , L'_B , L'_C лежат на одной прямой (см. рис. 10.5).

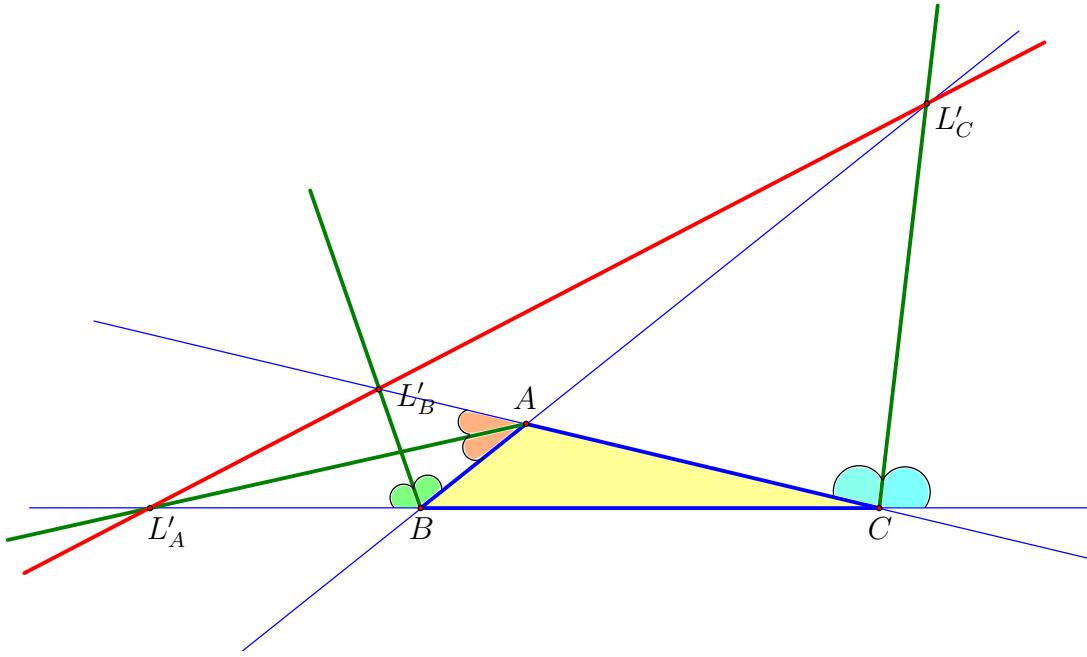


Рис. 10.5: Основания трех биссектрис внешних углов

Глубокое обобщение этих результатов мы получим в разделе 11.6.2 с использованием гомотетии.

Следующее следствие теоремы Менелая приводит к ряду замечательных наблюдений, поэтому мы выделим его в отдельный раздел.

10.2 Теорема Чевы

Речь пойдет о теореме, которое носит свое название в честь итальянского инженера Джованни Чевы².

В этой теореме речь пойдет о трех прямых, пересекающихся в одной точке. А именно, рассмотрим точки A', B', C' , лежащие на сторонах BC , AC и AB треугольника ABC соответственно.

Теорема (Чева). *Прямые AA' , BB' и CC' пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда выполнено соотношение³*

$$\frac{AB'}{B'C} \cdot \frac{CA'}{A'B} \cdot \frac{BC'}{C'A} = 1. \quad (10.3)$$

Задача 10.5. Докажите теорему Чевы.

Такие отрезки AA' , BB' , CC' , пересекающиеся в одной точке, называются чевианами.

²Доказательство Чевы было опубликовано в 1678 году, то есть как минимум через примерно 11000 лет после появления теоремы Менелая. Представляется очень странным, что теорема Чевы не была известна ранее. В некоторых источниках указывают, что эта теорема была доказана за 600 лет до Чевы арабским правителем и ученым Юсуфом ал-Мутамидом.

³Обратите внимание, как похожи теоремы Чевы и Менелая! Кажется, что речь в них идет о разных конструкциях: три точки, лежащие на одной прямой, и три прямые, пересекающиеся в одной точке. На самом деле эти конструкции тесно связаны. Причина этой связи вскрывается при изучении проективной геометрии.

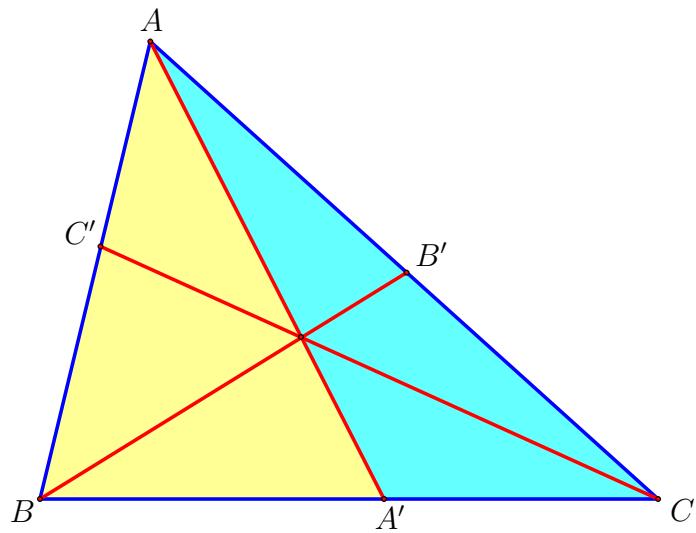


Рис. 10.6: Теорема Чевы

Продемонстрируем, как работает теорема Чевы, приведя несколько ключевых задач. Во-первых, заметим, что в конфигурации с произвольными чевианами можно отыскать медиану.

Задача 10.6. В треугольнике ABC проведена чевиана AP . На ней отмечена произвольная точка D , через которую проведены чевианы BK и CL . Прямые PK и PL пересекают прямую, параллельную стороне BC и проходящую через вершину A , в точках X и Y соответственно. Докажите, что $AX = AY$ (см. рис. 10.7).

Во-вторых, теорема Чевы также позволяет установить связь между высотами и биссектрисами.

Задача 10.7. В треугольнике ABC проведена высота AH_A . На ней отмечена произвольная точка D , через которую проведены чевианы BK и CL . Докажите, что AH_A — биссектриса угла $\angle K H_A L$ (см. рис. 10.8).

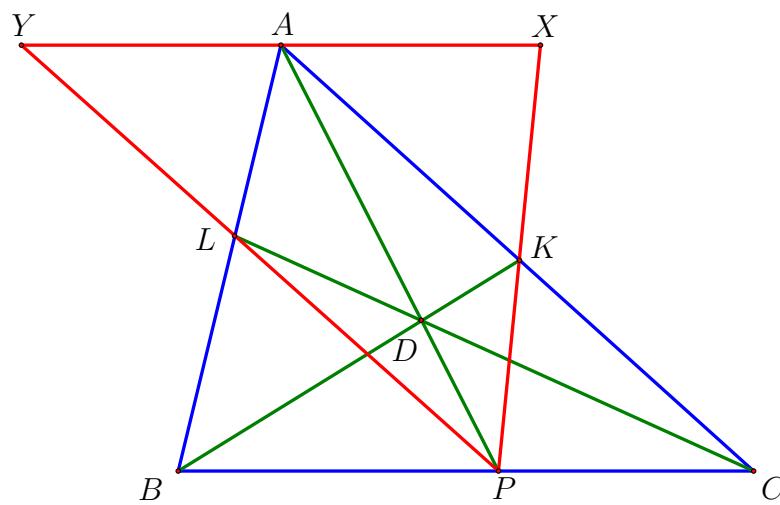


Рис. 10.7: Чевиана оказывается медианой

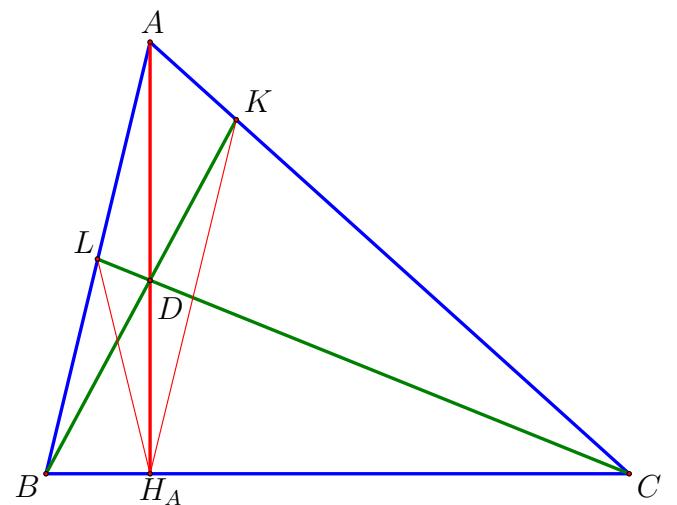


Рис. 10.8: Высота оказывается биссектрисой

10.3 Еще замечательные точки в треугольнике

Итак, биссектрисы, медианы и высоты... Какие еще замечательные чевианы связанны с произвольным треугольником? Во всяком случае, у нас уже есть претенденты на эту роль. Ведь на стороне треугольника, кроме оснований высоты, биссектрисы и медианы, лежат еще некоторые замечательные точки. Речь идет о точках касания вписанной и вневписанных окружностей.

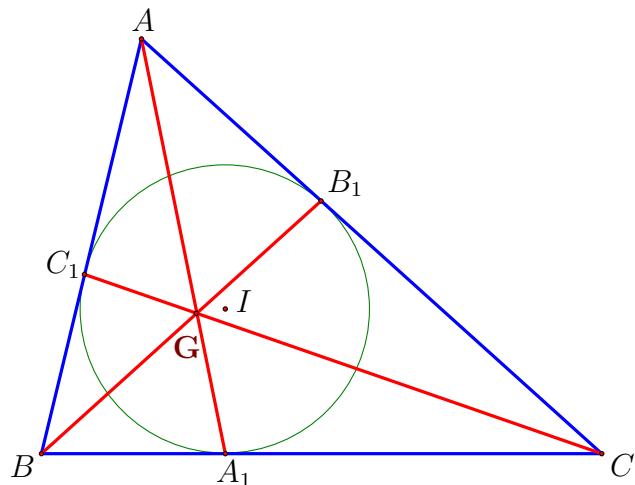


Рис. 10.9: Точка Жергонна

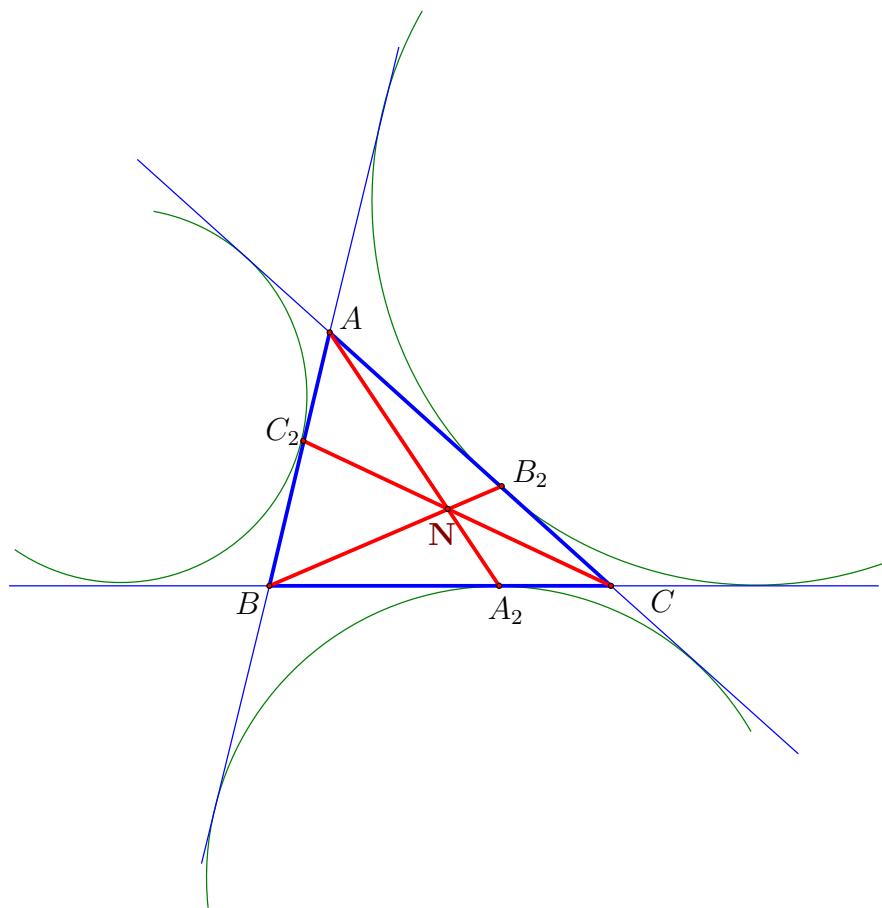


Рис. 10.10: Точка Нагеля

Начнем с вписанной окружности.

Задача 10.8. Докажите, что отрезки AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в одной точке (см. рис. 10.9).

Это точка называется точкой Жергонна и обозначается через G .

Для точек касания вневписанных окружностей со стороной выполнено аналогичное утверждение.

Задача 10.9. Докажите, что отрезки AA_2, BB_2, CC_2 пересекаются в одной точке (см. рис. 10.10).

Это точка называется точкой Нагеля и обозначается через N .

С точками Жергонна и Нагеля также связана красивая геометрия. Но для ее изучения необходима, по всей видимости, мощная техника, связанная в первую очередь с гомотетией, а также с вписанными углами и проективной геометрией.

10.4 И снова о биссектрисах

Центральным объектом исследования в главах 9 и 10 были пропорциональные отрезки. А с ними, как мы уже отмечали, неразрывно связаны биссектрисы треугольника. В то же самое время не будем забывать, что у нас осталось несколько до сих пор не решенных задач, связанных именно с биссектрисами. В первую очередь речь идет о задачах 2.11 и 2.15. Можно ли надеяться, что развитая нами техника позволит решить эти задачи?

Давайте попробуем! Начнем с утверждения, обратного к теореме об ортотреугольнике. Обратите внимание, что поскольку AK, BL и CM — биссектрисы заштрихованного треугольника, они являются чевианами треугольника ABC .

Задача 10.10. Решите задачу 2.11.

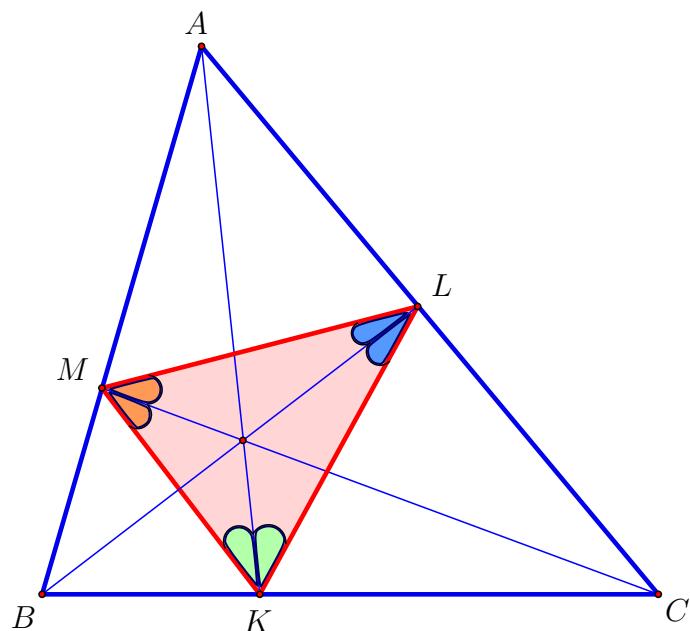


Рис. 10.11: Обратная теорема верна?

Теперь давайте попробуем вскрыть и задачу 2.15. Напомним, что эта задача возникла у нас в главе 2 при исследовании треугольника $L_A L_B L_C$, образованного основаниями биссектрис. Оказалось, что если один из углов исходного треугольника равен 120° , то треугольник $L_A L_B L_C$ будет прямоугольным (см. задачу 2.14). Напомним, что ключом к этой задаче было следующее наблюдение: точка L_B является точкой I_B для треугольника ABL_A , а точка L_C — точкой I_C для треугольника ACL_A ! Поэтому $L_A L_B$ и $L_A L_C$ также являются биссектрисами, причем биссектрисами смежных углов. Теперь легко видеть, что на рисунке 10.12 на самом деле не три биссектрисы, а целых семь!

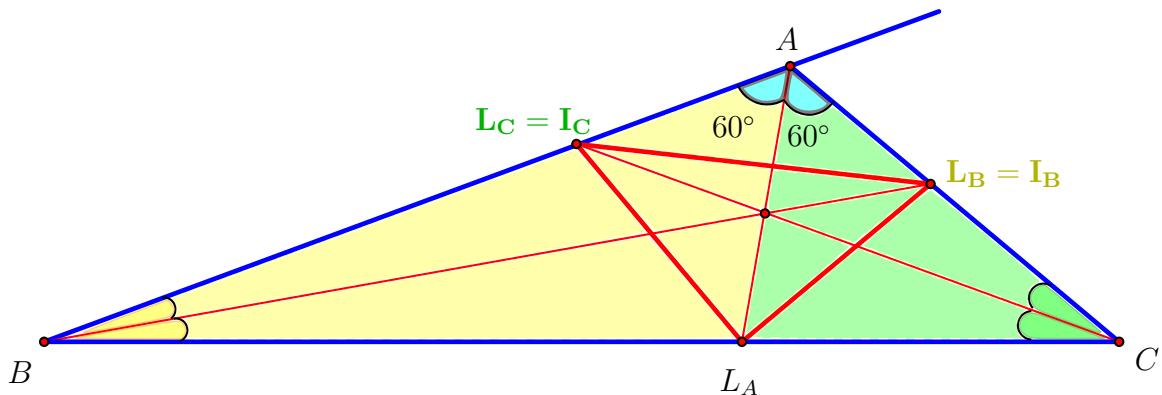


Рис. 10.12: Семь биссектрис

Теперь нам дано, что $\angle L_B L_A L_C = 90^\circ$. Нужно доказать, что $\angle BAC = 120^\circ$. Иными словами нам нужно доказать, что AC — биссектриса внешнего угла треугольника ABL_A . Продлим отрезок $L_A L_B$ до пересечения с продолжением стороны BA и получим точку L'_C .

Задача 10.11. Докажите, что CL'_C — биссектриса внешнего угла треугольника ABC .

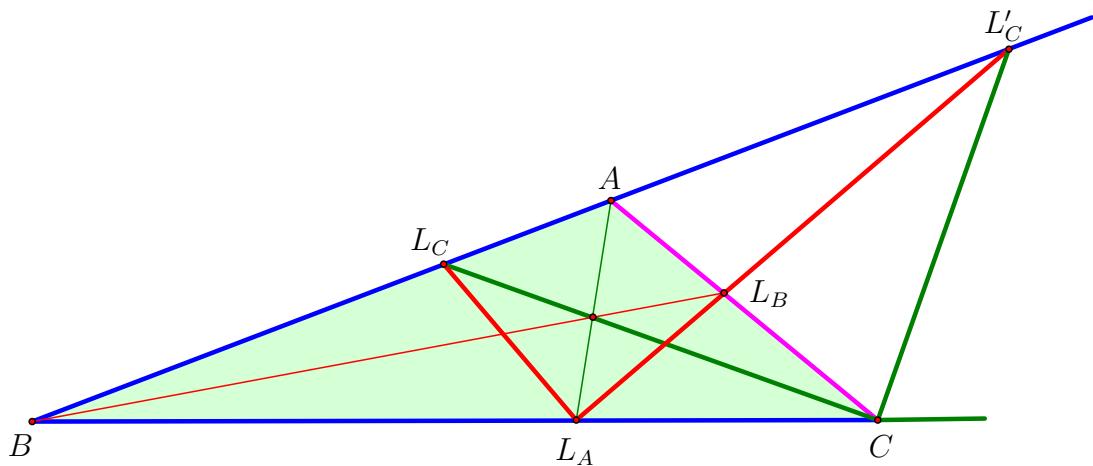


Рис. 10.13: Угол 120° : биссектриса внешнего угла

Задача 10.12.

а) Докажите, что точки L_C, L_A, C, L'_C лежат на одной окружности.

- б) Что это за окружность?
 в) Докажите, что $L_A L_B$ — биссектриса угла $\angle AL_A C$.
 г) Докажите, что AC — биссектриса угла $\angle L_A A L'_C$
 и, тем самым, что $\angle BAC = 120^\circ$.

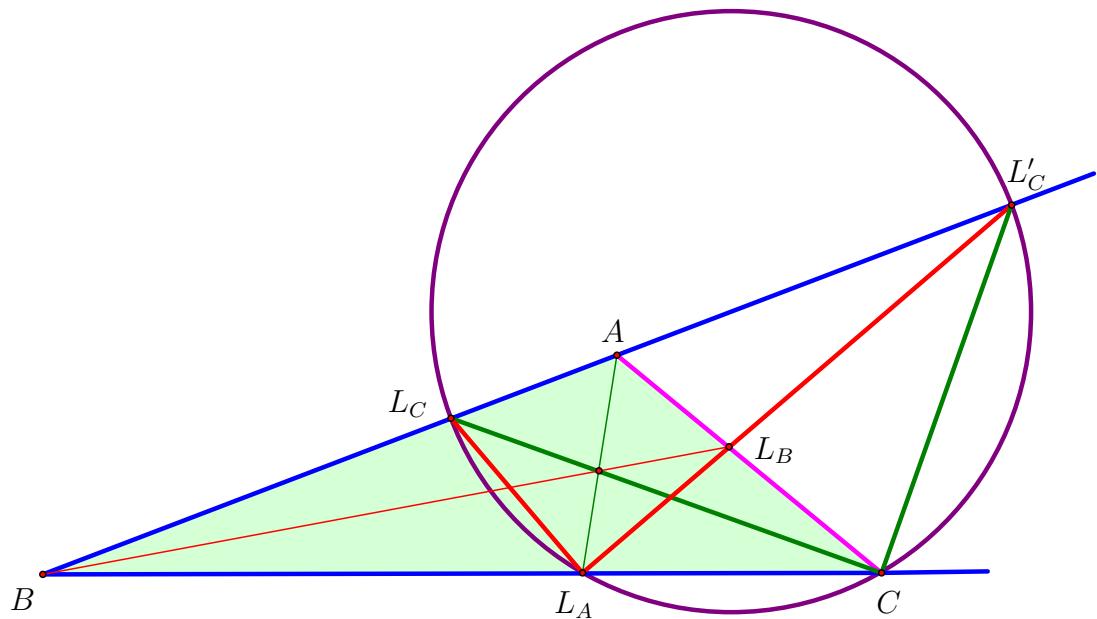


Рис. 10.14: Угол 120°

Проведенные рассуждения позволяют построить замечательную картинку с девятью биссектрисами.

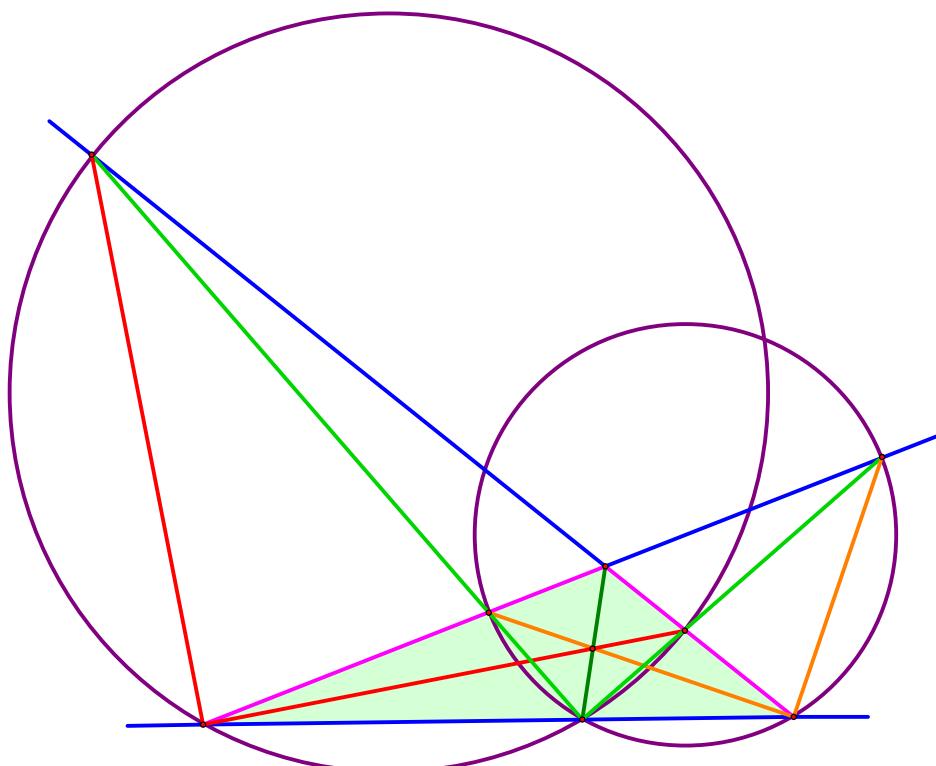


Рис. 10.15: Угол 120° : девять биссектрис

P. S.

В геометрии нет царского пути.

Евклид

Мысль никогда не должна подчиняться ни догме, ни направлению, ни предвзятой идее.

Анри Планкаре

Подсказки

- 1.1. Для доказательства утверждения «тогда» продлите медиану на свою длину.
- 1.7. Используйте сумму углов треугольника ABC .
- 1.9. Сколькими точками однозначно задается окружность? Сколько общих точек у окружностей с этими диаметрами?
- 1.11. На рисунке 1.15 мы продлеваем среднюю линию на свою длину.
- 2.3. Чем является описанная окружность треугольника ABC для треугольника $I_AI_BI_C$?
- 2.6. $\angle BIC = 90^\circ + \alpha/2$, $\angle BI_AC = 90^\circ - \alpha/2$, $\angle BW_AC = 180^\circ - \alpha$, $\angle BW^AC = \alpha$.
- 2.7. Вам поможет рисунок 2.7.
- 2.10. Эта задача имеет несколько решений. Можно воспользоваться результатом задачи 2.6, а можно доказать, что сумма отмеченных на рисунке 2.14 углов равна 180° , используя теорему о сумме внешних углов треугольника!
- 2.12. Ищите биссектрисы внешних углов.
- 2.14. На рисунке 2.21 больше биссектрис, чем можно вначале подумать. Как связаны биссектрисы и прямой угол?
- 4.9. Вернитесь к задаче 1.14.
- 5.1. $W^A M_A = (r_b + r_c)/2$.
- 5.2. $W_A M_A = (r_a - r)/2$.
- 6.1. $AC_1 = p - a$, где p — полупериметр треугольника ABC .
- 6.2. $AM = p$, $BA_2 = p - c$.
- 7.5. $\angle I_1CI_2 = 45^\circ$, $\angle CI_1I_2 = 45^\circ + \beta$, $\angle CI_2I_1 = 45^\circ + \alpha$.
- 7.7. Начните с доказательства того, что $CM = CN$.
- 8.9. $KL = (a - b)/2$.
- 8.11. Обратите внимание на маленький треугольник с основанием A_1X .
- 8.14. Радиусы окружностей равны $ab/2(a + b)$.
- 9.12. Для доказательства гипотезы 9.2 докажите, что AB — биссектриса треугольника AMK , и рассмотрите осевую симметрию S_{AB} относительно AB .
Для доказательства гипотезы 9.3 воспользуйтесь утверждением задачи 9.5.
- 10.10. Обратите внимание, что AK , BL и CM — чевианы треугольника ABC . Что нам известно о произвольных чевианах треугольника (кроме того, что они пересекаются в одной точке)?

Глава 11

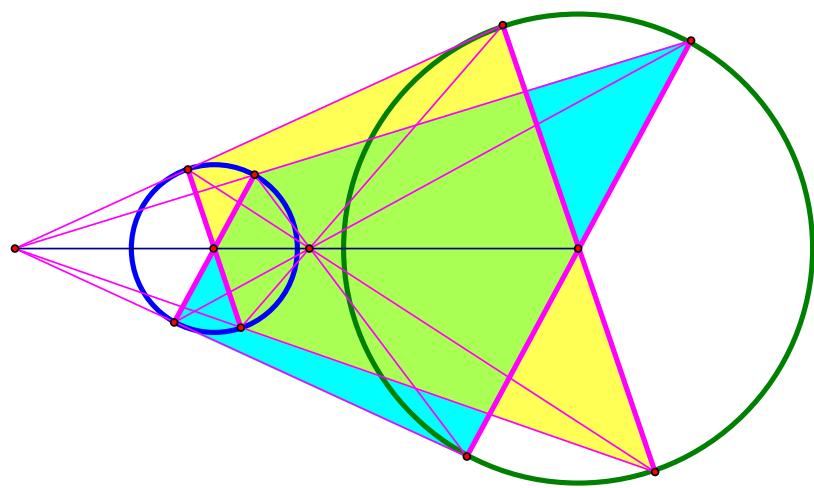
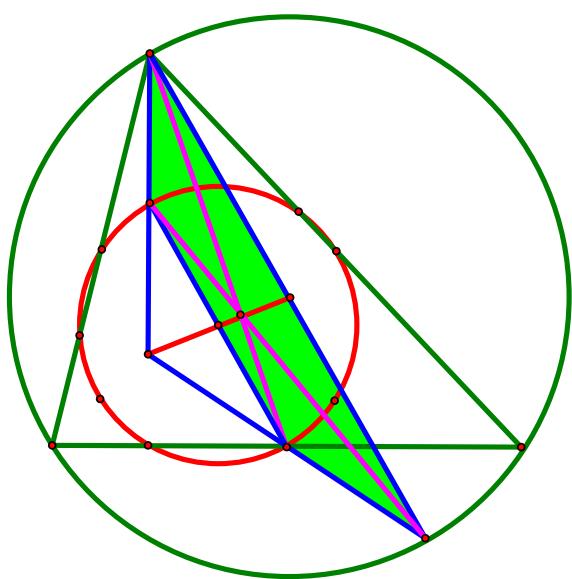
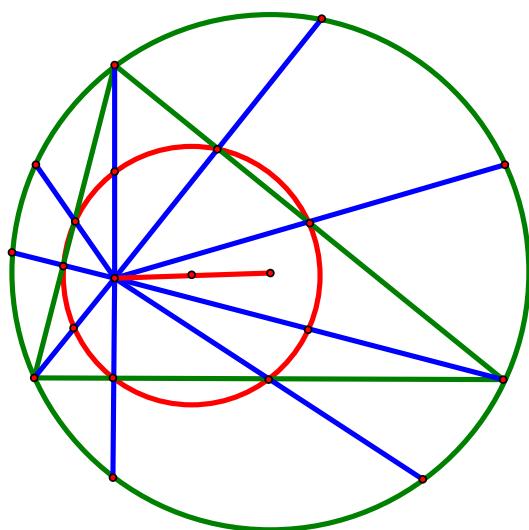
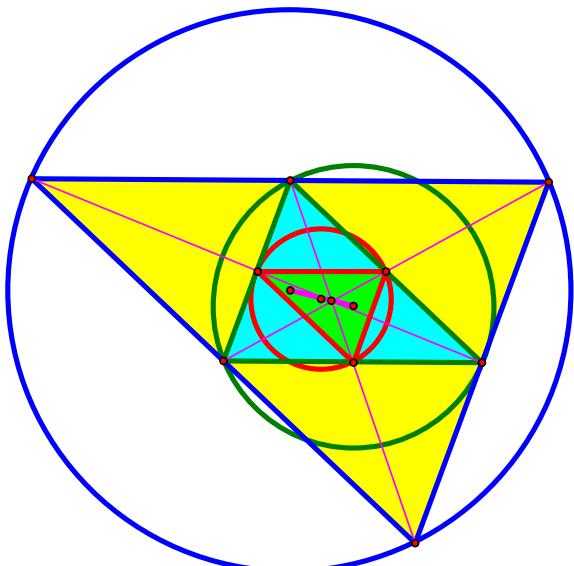
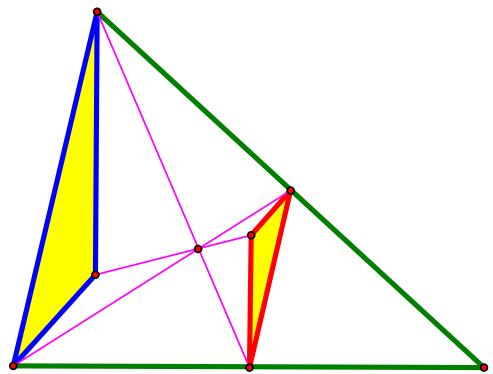
Добавление: вокруг гомотетии

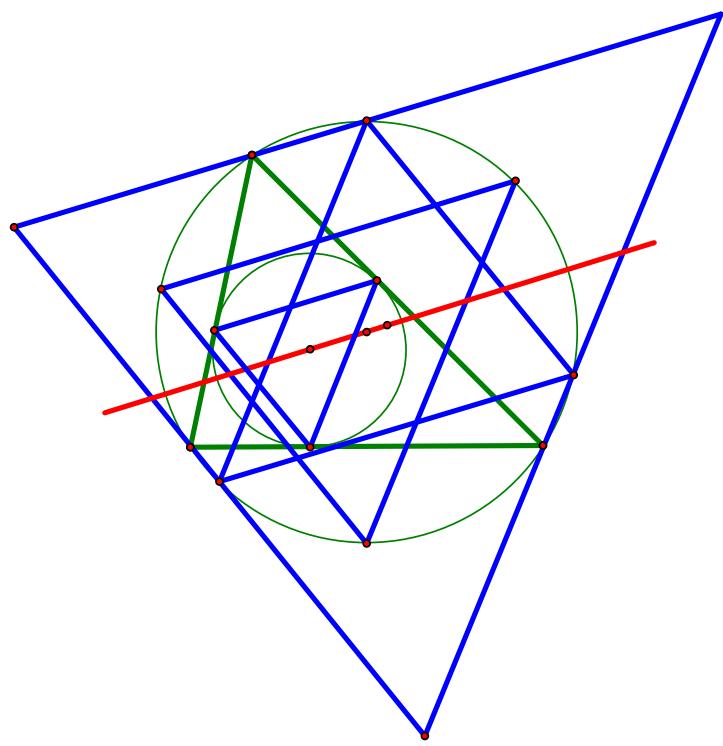
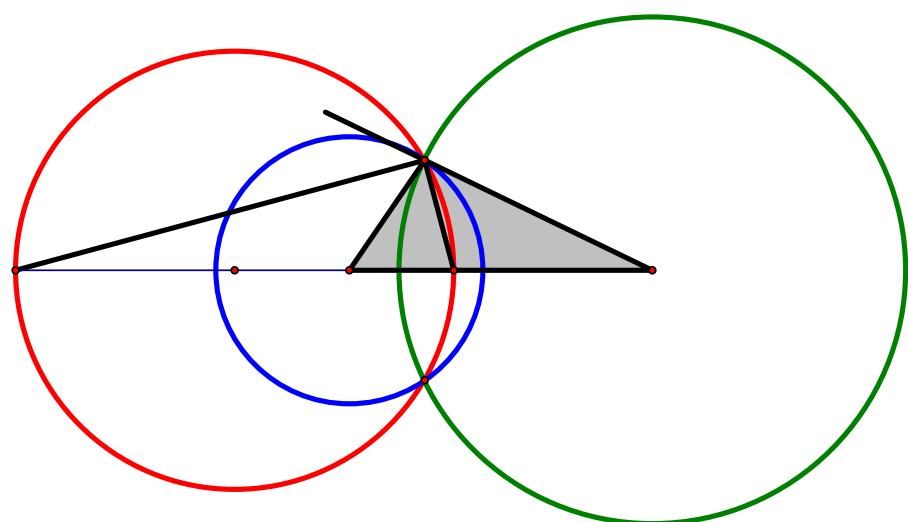
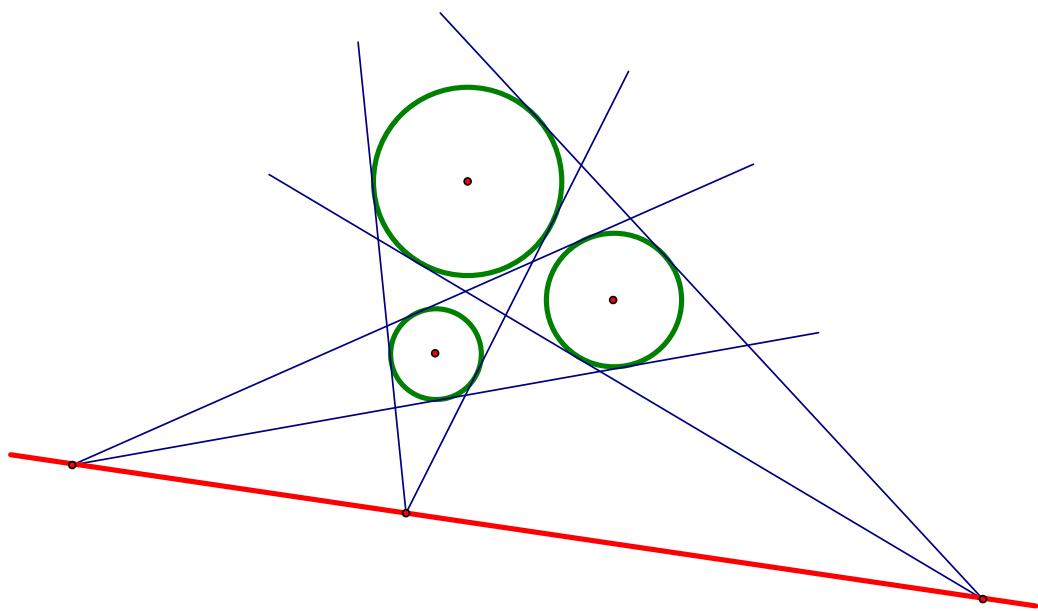
Гомотетия является одним из ключевых понятий в курсе школьной геометрии. Это обусловлено сразу несколькими причинами, выгодно выделяющими это преобразование из широкой массы других геометрических преобразований. Во-первых, гомотетия является примером преобразования плоскости, что позволяет привнести в курс геометрии совершенно новую технику, новый язык. Этот язык называется функциональным и позволяет выстроить мостик между геометрической интуицией, связанной с наглядными образами, и серьезными математическими понятиями, зачастую абстрактными (например, с понятием диффеоморфизма гладкого многообразия)¹. Во-вторых, гомотетия является формализацией естественного наглядного образа, связанного с раздутием или сжатием, поэтому она, как правило, легче воспринимается и лучше узнается. Наконец, в-третьих, именно гомотетия является наиболее часто встречающимся геометрическим преобразованием, которое позволяет быстро решать задачи совершенно невероятной сложности.

Тем не менее, зачастую в школьном курсе геометрии гомотетии не уделяется должного внимания. Во многом это обусловлено естественной причиной: гомотетия для эффективного применения требует использования совершенно нового языка, разговаривать на котором школьники не умеют (просто ни разу до этого не возникала такая необходимость). Однако именно с этим языком столкнутся многие учащиеся физико-математических школ, планирующие продолжать свое математическое образование. Поэтому представляется чрезвычайно важным научить школьников понимать этот функциональный язык и разговаривать на нем. На наш взгляд, гомотетия является отличным способом, позволяющим это сделать, поскольку помимо собственно развития функционального языка мы параллельно проведем ряд замечательных геометрических исследований, которые во многом будут продолжением работы, проделанной нами на протяжении всей книги.

Мы предлагаем знакомство с гомотетией в конце 8 класса. С одной стороны, это дает большее время на привыкание и освоения нового языка. С другой стороны, именно гомотетия позволит нам дать ответы на многие вопросы, тесно связанные с рассматриваемыми на протяжении всей книги конструкциями. Для освоения материала данного добавления мы не предполагаем никаких знаний, выходящих за рамки программы геометрии 8 класса. Ввиду сложности изложенного ниже материала мы проводим доказательство всех ключевых фактов и в конце представляем решение всех ключевых задач.

¹Более того, развитию именно этого языка была посвящена Эрлангенская программа Феликса Клейна (1872 год), в которой фактически дается определение того, что есть геометрия как наука.





11.1 Основные свойства гомотетии

Перед тем как рассматривать определение и свойства гомотетии, напомним определение и свойства подобий.

Напоминание: подобия

Определение. Подобием называется преобразование плоскости, при котором расстояния между точками изменяются в одно и то же число раз. Это число называется коэффициентом подобия.

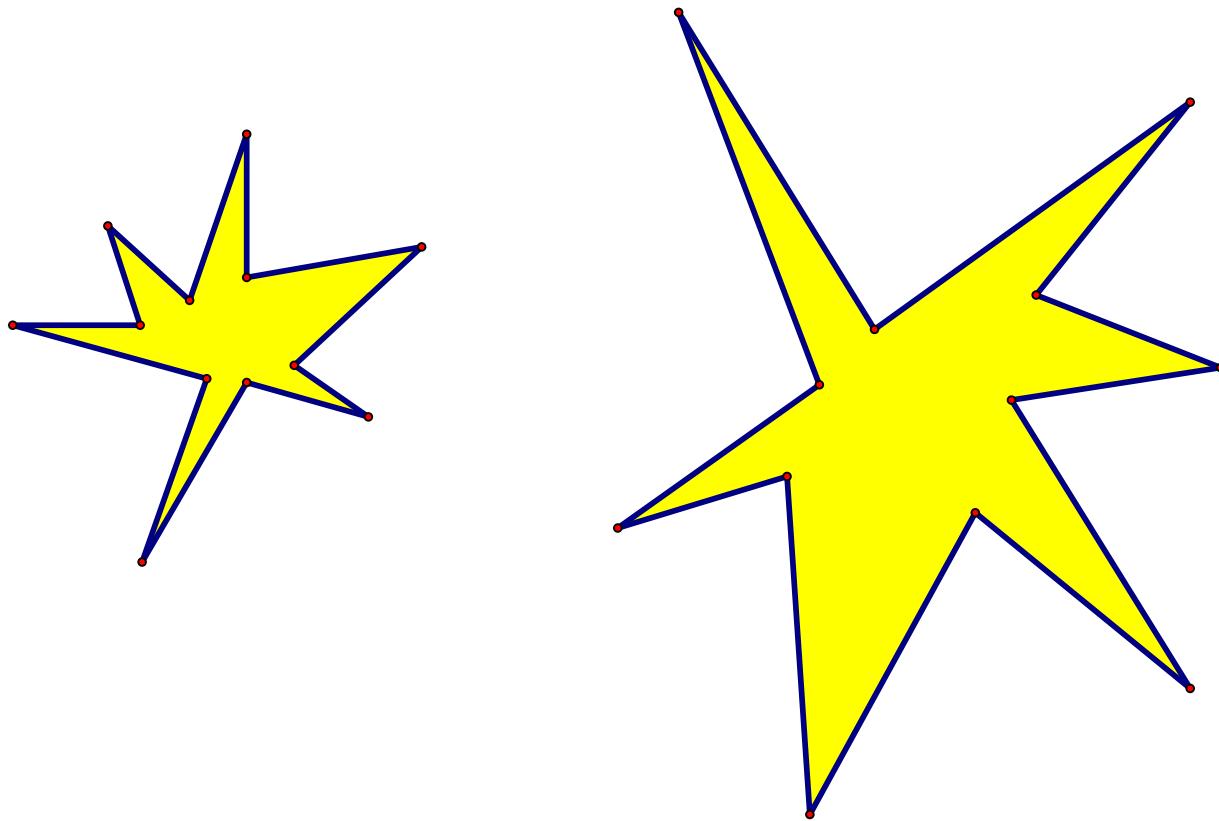


Рис. 11.1: Подобные фигуры

Если у нас есть два подобия F_1 и F_2 с коэффициентами k_1 и k_2 , то их *композиция* (т.е. последовательное применение) $F_2 \circ F_1$ также будет подобием с коэффициентом $k_1 k_2$ (напомним, что значок \circ обозначает последовательное применение, и первым применяется преобразование, стоящее справа). Кроме того, для любого подобия F найдется такое подобие F^{-1} , что $F \circ F^{-1} = F^{-1} \circ F = \text{id}$ — тождественное преобразование (просто подобие F^{-1} возвращает все точки, сдвинутые подобием F , на свои места: если $F(X) = Y$, то $F^{-1}(Y) = X$). Это означает, что множество всех подобий образует *группу*, которая называется группой подобий.

Заметим, что множество движений $\text{Isom}(2)$ образует *подгруппу* в группе подобий. Возникает естественный вопрос: насколько эта подгруппа велика? Какие есть подобия, отличные от движений? Оказывается, что в некотором смысле есть только одно подобие, отличное от движения. Это гомотетия.

Гомотетия

Напомним собственно определение гомотетии.

Определение. Гомотетией с центром в точке O и коэффициентом $k \neq 0$ называется преобразование плоскости H_O^k , которое переводит произвольную точку X в такую точку X' , что $OX' = |k| \cdot OX$ и

- точка X' лежит на луче $[OX)$ при $k > 0$,
- точка X' лежит на луче, дополнительном к $[OX)$, при $k < 0$ (см. рис. 11.2).

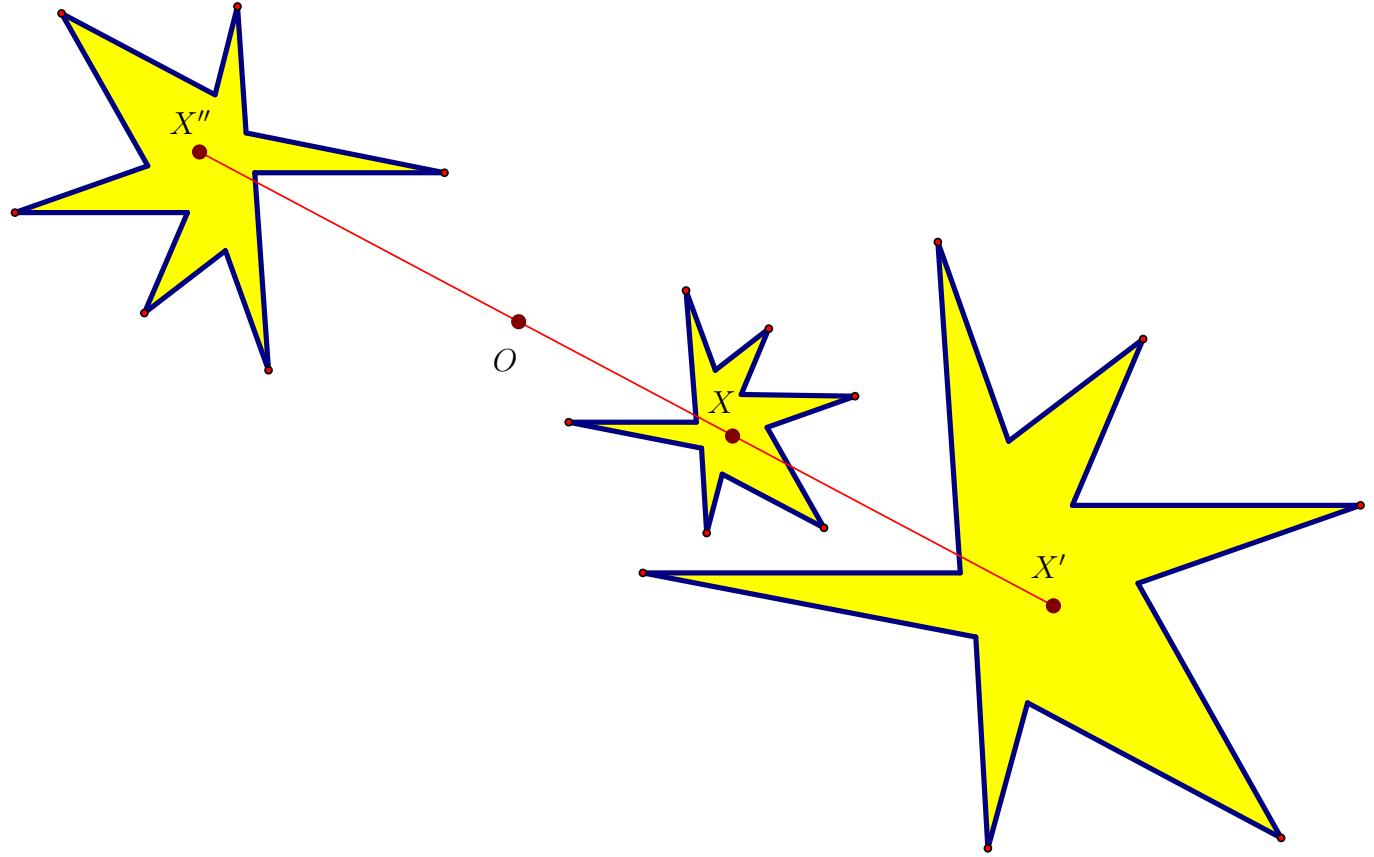


Рис. 11.2: Определение гомотетии

Замечание. Гомотетия с коэффициентом 1 является тождественным преобразованием, а гомотетия с коэффициентом -1 — центральной симметрией: $H_O^1 = \text{id}$, $H_O^{-1} = Z_O$.

Гомотетия является первым и основным примером *подобия*, т.е. преобразования плоскости, при котором расстояния между точками изменяются в одно и то же число раз. Однако это утверждение нуждается в доказательстве. Казалось бы, что тут доказывать? Ведь по определению гомотетии $OX'/OX = |k|$! Однако мы должны доказать более сильное утверждение: расстояние между *любыми* точками X и Y изменяется в одно и то же число раз: $X'Y'/XY = |k|$, где $X' = H_O^k(X)$ и $Y' = H_O^k(Y)$.

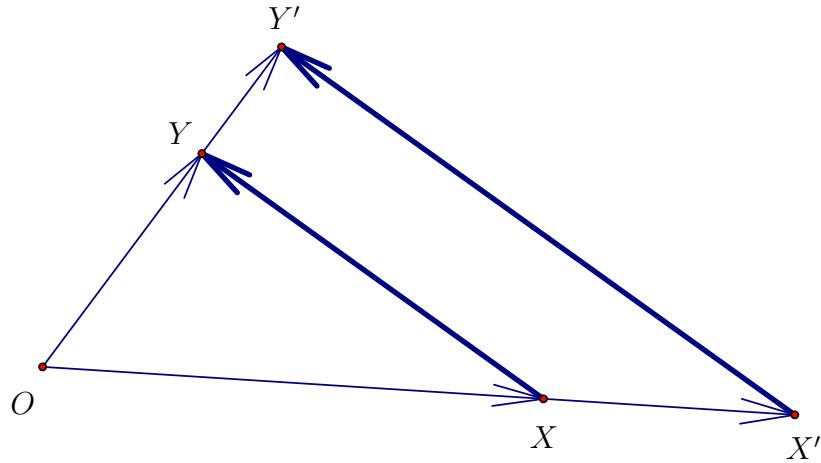


Рис. 11.3: Гомотетия есть подобие

Доказательство. Для доказательства воспользуемся векторами (см. рис. 11.3). А именно, рассмотрим вектор \overline{XY} . Тогда $\overline{XY} = \overline{OY} - \overline{OX}$. Поскольку $\overline{OX'} = k \cdot \overline{OX}$ и $\overline{OY'} = k \cdot \overline{OY}$ (обратите внимание, здесь модуль у коэффициента не ставится, поскольку при отрицательном k векторы \overline{OX} и \overline{OY} должны поменять направление), то

$$\overline{X'Y'} = \overline{OY'} - \overline{OX'} = k \cdot \overline{OY} - k \cdot \overline{OX} = k \cdot \overline{XY},$$

откуда $|\overline{X'Y'}| = |k| \cdot |\overline{XY}|$, что и требовалось доказать. \square

Простейшие свойства

В этом разделе мы докажем простейшие свойства гомотетии. Поскольку гомотетия есть подобие, то гомотетия обладает всеми свойствами подобий, а именно:

- прямая переходит в прямую, луч в луч, отрезок в отрезок;
- угол переходит в равный ему угол;
- окружность переходит в окружность, центр окружности переходит в центр окружности, касательная к окружности перейдет в касательную к окружности.

Однако гомотетия обладает рядом свойств, характерных именно для нее. Эти свойства наиболее часто применяются при доказательстве теорем и решении задач.

Теорема 1 (Простейшие свойства гомотетии).

1. Гомотетия переводит прямую в параллельную ей прямую или совпадающую с ней.
2. Гомотетия с центром на окружности переводит эту окружность в окружность, касающуюся исходной.

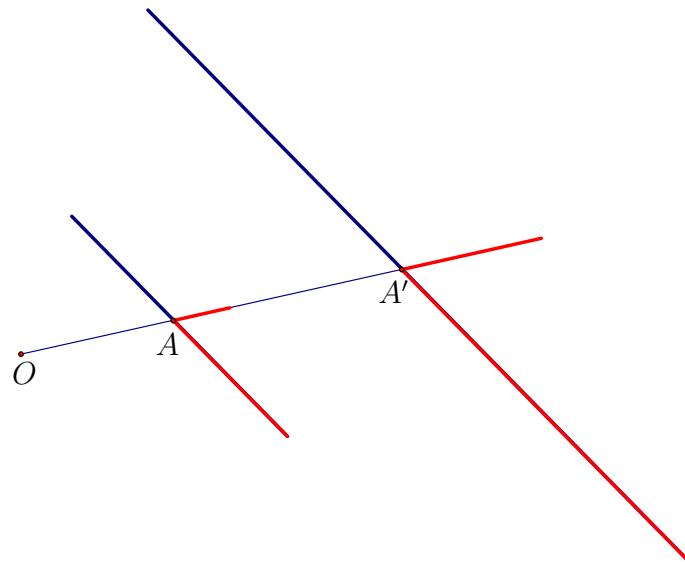


Рис. 11.4: Прямые в параллельные прямые

Доказательство. 1. Рассмотрим гомотетию H_O и прямую, проходящую через точку A . Пусть гомотетия переводит точку A в точку A' . Тогда отмеченный угол с вершиной A перейдет в отмеченный угол с вершиной A' (см. рис. 11.4). Т.к. гомотетия сохраняет углы, то отмеченные углы равны. Значит, прямые параллельны, т.к. накрест лежащие углы равны.

2. Рассмотрим окружность ω_1 с центром в точке O_1 и гомотетию с центром в точке $O \in \omega$. Тогда $H_O(\omega_1) = \omega_2$ — окружность с центром в точке O_2 . По определению гомотетии точки O_1 , O_2 и O лежат на одной прямой. Значит, окружности ω_1 и ω_2 касаются, так как их точка пересечения лежит на линии центров (см. рис. 11.5).

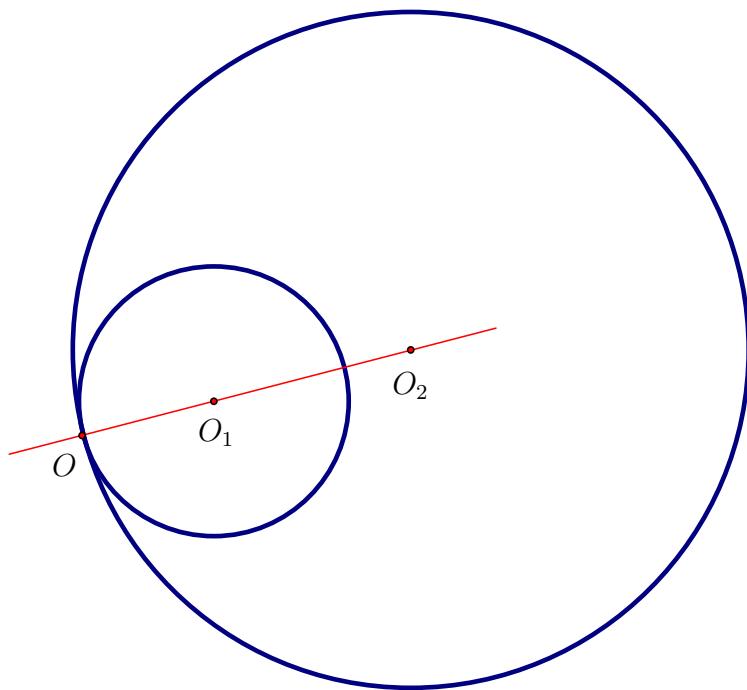


Рис. 11.5: Окружность в касающуюся окружность

□

Следствие. Гомотетия задается центром и образом одной точки.

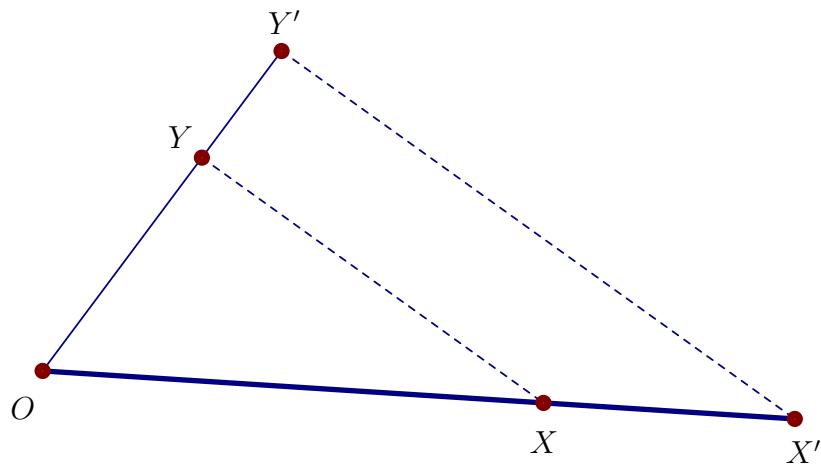


Рис. 11.6: Достаточно образа одной очки

Доказательство. Разумеется, образ одной точки позволяет однозначно вычислить коэффициент гомотетии и тем самым задает ее. Однако часто бывает полезно описать геометрически построение образа Y' произвольной точки Y , если известен образ X' данной точки X .

Построить точку Y' можно следующим образом (см. рис. 11.6). Если точка Y не лежит на прямой (OX) , то возьмем прямую (XY) и проведем через X' прямую, параллельную (XY) . Точка Y' пересечения этой прямой с (OY) и будет образом точки Y при гомотетии H_O , переводящей X в X' . В самом деле, образ точки Y должен лежать на прямой (OY) по определению гомотетии. С другой стороны, образ точки Y должен лежать на образе прямой (XY) . Построить образ этой прямой можно, указав образ лишь одной ее точки, в данном случае точки X (точка тащит за собой всю прямую!). Значит, точка Y' лежит и на прямой (OY) , и на прямой, проходящей через X' параллельно (XY) .

Если же точка Y лежит на прямой (OX) , то можно сначала «выйти» с этой прямой, построив образ произвольной точки $Z \notin (OX)$, а затем построить образ точки Y , пользуясь уже точками Z и Z' . \square

Замечание. Отметим, что это, казалось бы, простое следствие играет огромную роль при практическом использовании гомотетии. А именно, зачастую при применении гомотетии нет необходимости следить сразу за всей фигурой, поскольку это очень сложно. Часто бывает достаточно проследить лишь за образом одной единственной точки. Грамотно выбрав эту точку, можно получить полную информацию и о гомотетии, и об образе фигуры; говорят, что *точка тащит за собой всю фигуру*. Например, точка на прямой тащит за собой всю прямую (поскольку согласно свойству 1 прямая переходит в параллельную), или точка на окружности тащит за собой всю окружность (согласно свойству 2 окружность перейдет в касающуюся).

Теперь поясним, почему именно гомотетия играет столь значимую роль в задачах, связанных с подобиями. Имеет место следующая теорема.

Теорема 2. *Любое подобие есть композиция гомотетии и движение.*

Доказательство. Рассмотрим подобие F с коэффициентом k . Тогда композиция $F \circ H^{1/k}$ является подобием с коэффициентом $k \cdot (1/k) = 1$, т.е. движением G . Таким образом, $F = G \circ (H^{1/k})^{-1} = G \circ H^k$, что и требовалось доказать. \square

В заключение этого раздела сформулируем важный вопрос, ответ на который мы со временем получим: *что собой представляет композиция двух гомотетий?* Ясно, что это подобие, но какое? Ответ на этот вопрос мы узнаем в разделе 11.6.

11.2 Гомотетия в трапеции

В этом разделе мы приступим к изучению различных применений гомотетии в геометрических конфигурациях. Из свойств гомотетии видно (теорема 1), что она наиболее тесно связана либо с параллельными прямыми, либо с окружностями. Сейчас мы рассмотрим связь гомотетии с параллельными прямыми и типичные задачи, в которых она бывает полезна.

Основной геометрический объект, в котором присутствуют параллельные прямые, — это трапеция (параллелограмм может быть изучен с помощью свойств центральной симметрии).

11.2.1 Подобные трапеции и среднее геометрическое

Одной из первых задач, связанных с подобием, является следующая: *найти длину отрезка, параллельного основаниям a и b трапеции и делящего ее на две подобные трапеции*. Есть большой соблазн сказать, что любой отрезок, параллельный основанию, делит трапецию на две подобные: углы-то у получившихся трапеций равны! Однако это неверно. Ведь *подобные фигуры — это фигуры, которые можно совместить преобразованием подобия*. Разумеется, на практике гораздо удобнее пользоваться какими-то признаками подобия, однако удобные признаки подобия есть только для треугольников! Поэтому поиск подобных четырехугольников (или многоугольников с большим числом сторон) должен начинаться с поиска преобразования подобия, переводящего один из них в другой.

Давайте рассмотрим отрезок PQ , делящий трапецию $ABCD$ на две подобные, и подумаем, какое подобие может их совместить. Нетрудно видеть, что этим подобием является гомотетия с центром в точке E пересечения боковых сторон трапеции.

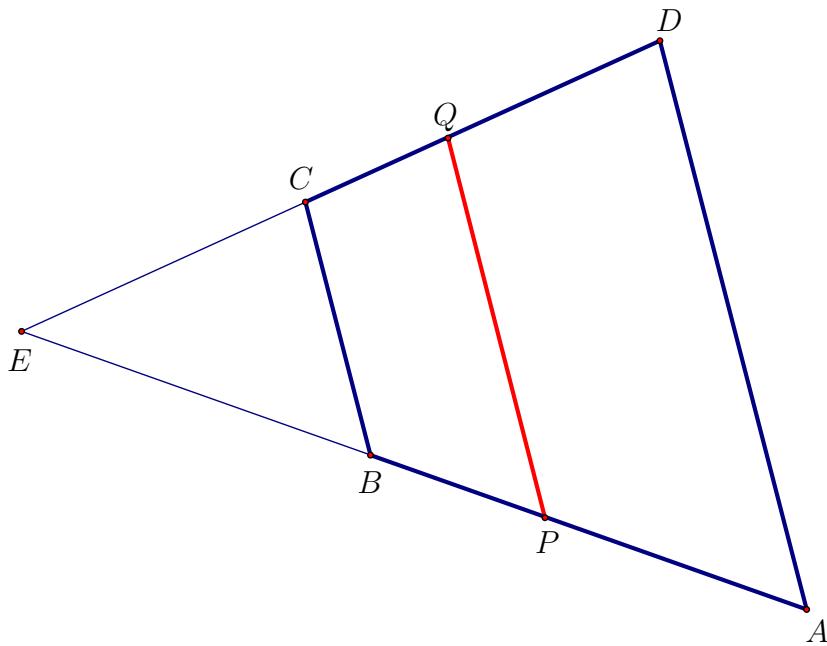


Рис. 11.7: Среднее геометрическое в трапеции

В самом деле, выберем коэффициент гомотетии таким образом, чтобы точка B перешла в точку P (напомним, что гомотетия задается своим центром и образом

одной точки). В таком случае точка C перейдет в точку Q (поскольку точка B потащит за собой весь отрезок BC : образ точки C должен лежать на прямой (ED) с одной стороны и на прямой (PQ) с другой стороны, т.е. прямая (BC) перейдет в параллельную прямую (PQ)). Тогда точка P перейдет в A , а точка Q — в D (поскольку трапеции $PBCQ$ и $APQD$ подобны).

Осталось записать пропорциональность оснований этих подобных трапеций:

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{b} \Leftrightarrow x = \sqrt{ab}.$$

Величина \sqrt{ab} называется *средним геометрическим* для a и b и часто встречается в различных задачах (например, высота прямоугольного треугольника равна среднему геометрическому отрезков основания, или длина общей касательной к двум касающимся окружностям равна удвоенному среднему геометрическому их радиусов).

Замечание. Напомним, что длина средней линии трапеции равна $(a + b)/2$ и называется *средним арифметическим* для a и b .

11.2.2 Среднее гармоническое

Теперь рассмотрим еще одну среднюю величину, связанную с трапецией.

Утверждение 1. Пусть в трапеции $ABCD$ диагонали пересекаются в точке F . Проведем отрезок KL через точку F , параллельный основаниям трапеции. Тогда $KF = FL$ и $KL = 2ab/(a + b)$.

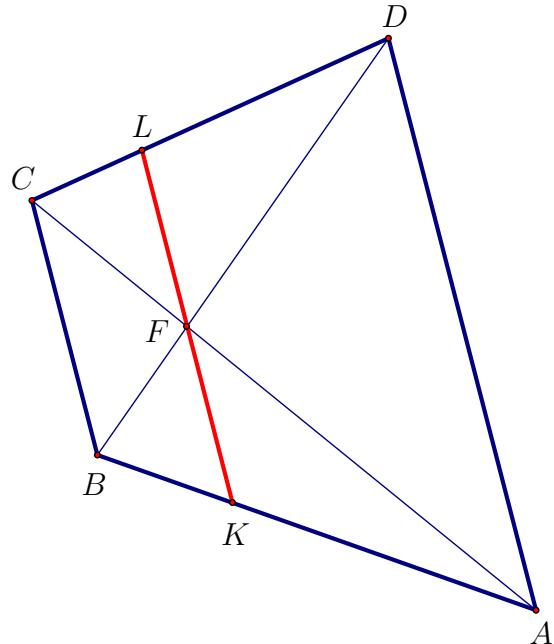


Рис. 11.8: Среднее гармоническое в трапеции

Замечание. Величина $2ab/(a + b)$ называется *средним гармоническим* для a и b .

Доказательство. Заметим, что гомотетия H_F с центром в точке F , переводящая точку B в точку D , переводит точку C в точку A (см. рис. 11.8). В самом деле, прямая (BC) перейдет в прямую, параллельную (BC) (по свойству гомотетии прямая переходит в параллельную прямую) и проходящую через точку D , т.е. в (AD) . Поэтому точка $C = (BC) \cap (AC)$ перейдет в точку

$$H_F(C) = H_F(BC) \cap H_F(AC) = (AD) \cap (AC) = A.$$

Отсюда следует, что $BF/BD = CF/AC = a/(a+b) = k$.

Рассмотрим композицию гомотетий $G = H_C^{1/k} \circ H_B^k$. Гомотетия H_B^k переведет отрезок KF в отрезок AD , а гомотетия $H_C^{1/k}$ переведет отрезок AD в отрезок FL . Но композиция этих гомотетий есть подобие с коэффициентом $k \cdot (1/k) = 1$, т.е. движение. Поэтому $G(KF) = FL$. Наконец, $KL = 2k \cdot AD = 2ab/(a+b)$, что и требовалось доказать. \square

11.2.3 Замечательное свойство трапеции

В двух предыдущих разделах мы связали с трапецией две гомотетии: у одной из них центр в точке E пересечения боковых сторон, у другой — в точке F пересечения диагоналей. Рассмотрение обеих этих гомотетий приводит к следующему замечательному факту.

Задача 11.1. Докажите, что середины оснований трапеции, точка пересечения диагоналей и точка пересечения боковых сторон лежат на одной прямой (см. рис. 11.9).

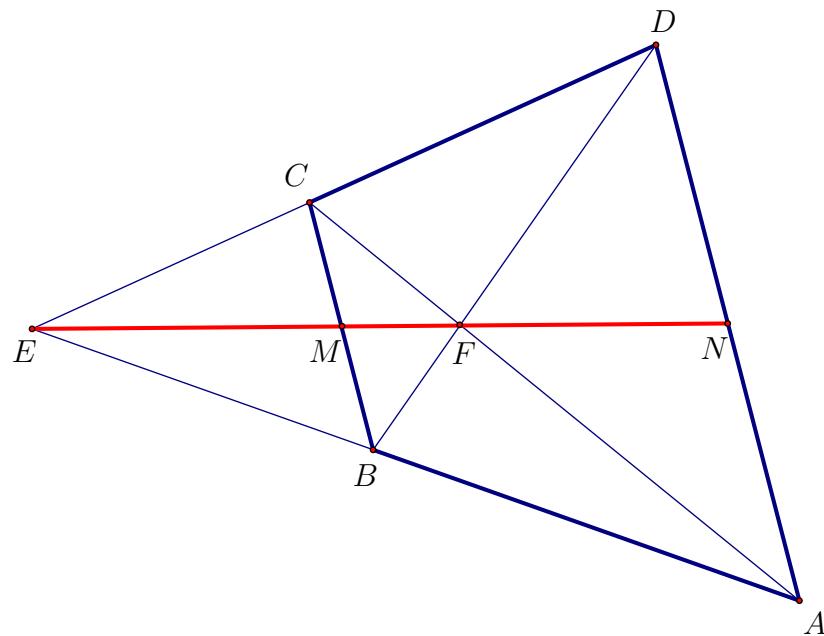


Рис. 11.9: Замечательное свойство трапеции

11.3 Гомотетия и прямая Эйлера

В этом и следующем разделах мы покажем, как гомотетия работает в уже известных нам теоремах и фактах об окружности и прямой Эйлера. Оказывается, что использование гомотетии не только позволяет получить соответствующие результаты гораздо быстрее, но и помогает взглянуть на них с совершенно новой стороны.

Ниже мы рассмотрим теорему о прямой Эйлера. Как ни странно, можно начать с нее, а не с окружности Эйлера, как это было в нашем прошлом изложении.

Начнем со следующего подготовительного утверждения.

Утверждение 2. Треугольник $M_AM_BM_C$ с вершинами в серединках сторон треугольника ABC гомотетичен треугольнику $\triangle ABC$ с центром в точке пересечения медиан M и коэффициентом -2 : $H_M^{-2}(\triangle M_AM_BM_C) = \triangle ABC$.

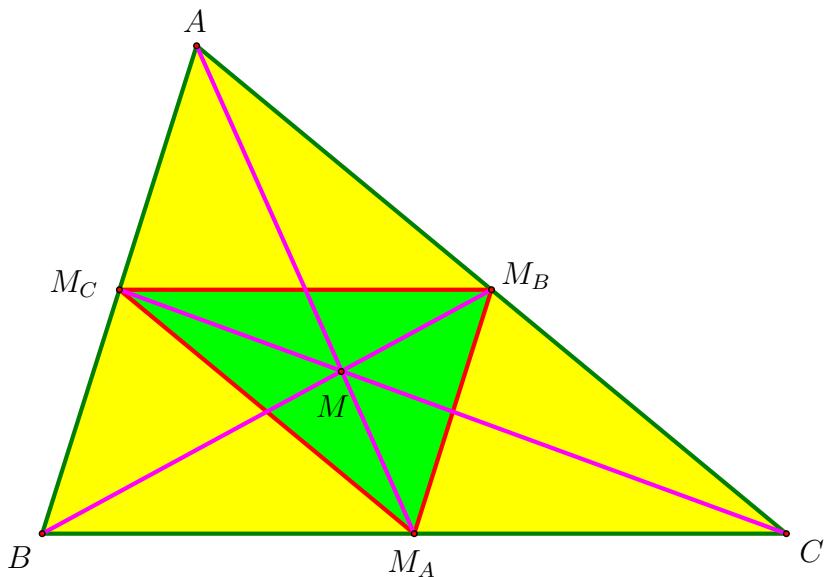


Рис. 11.10: $H_M^{-2}(\triangle M_AM_BM_C) = \triangle ABC$

Замечание. В формулировке утверждения мы не уточняли, точка пересечения медиан какого треугольника нами рассматривается, $M_AM_BM_C$ или ABC . На самом деле это неважно, поскольку точки пересечения медиан этих треугольников совпадают. Это следует из рис. 11.10 и замечательного свойства трапеции $BM_CM_BM_C$.

Доказательство. Рассмотрим медианы AM_A , BM_B и Cm_C треугольника ABC , пересекающиеся в точке M . Согласно теореме о пересечении медиан треугольника, $AM : M_AM = BM : M_BM = CM : M_CM = 2 : 1$. Поэтому гомотетия H_M^{-2} с центром в точке M и коэффициентом -2 переводит точки M_A , M_B , M_C в точки A , B , C соответственно. По свойству гомотетии «отрезок в отрезок» эта же гомотетия переведет отрезок M_AM_B в AB , M_BM_C — BC и M_CM_A — в CA . Таким образом, $H_M^{-2}(\triangle M_AM_BM_C) = \triangle ABC$, что и требовалось доказать. \square

Замечание. Обратите внимание, как осуществлялся перевод одного треугольника в другой. Мы не доказывали, что произвольная точка треугольника $M_AM_BM_C$ переходит в некоторую точку треугольника ABC . Наоборот, мы выбрали ключевые точки (вершины), которые потянули за собой весь треугольник. Это типичное соображение при применении гомотетии: мы смотрим не сразу на образ всей

фигуры, а только на конкретные точки, которые *задают* эту фигуру (вершины треугольника, центр окружности и т.д.). Точки *поташат за собой всю фигуру*.

Это несложное утверждение оказывается ключевым при доказательстве теоремы о прямой Эйлера. По сути, все доказательство сосредоточено именно в нем.

Задача 11.2. Докажите, что точки H , M и O произвольного треугольника ABC лежат на одной прямой, причем точка M делит отрезок HO в отношении $2 : 1$, считая от точки H .

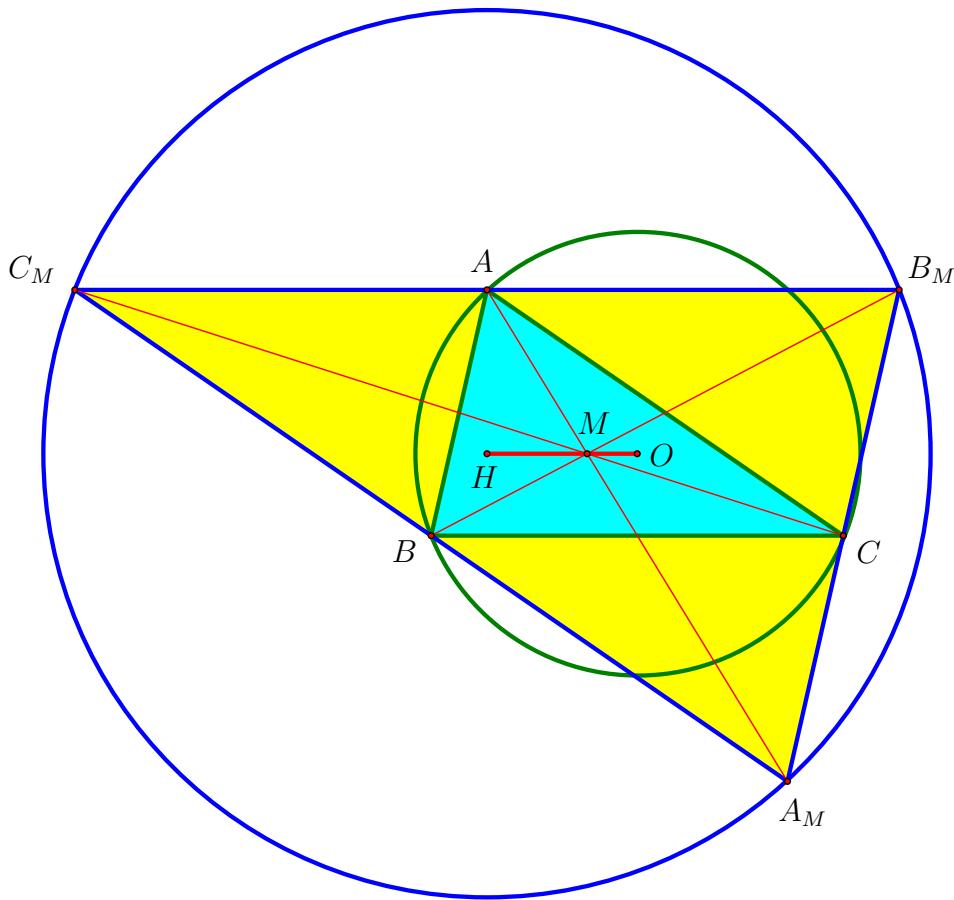


Рис. 11.11: Прямая Эйлера: H, M, O

Данное утверждение можно переформулировать в терминах, не использующих треугольник $A_M B_M C_M$. Иногда это бывает полезно.

Задача 11.3. Докажите, что треугольники ABH и $M_A M_B O$ гомотетичны с центром в точке M и коэффициентом -2 : $H_M^{-2}(\triangle M_A M_B O) = \triangle ABH$.

Замечание. Из этого утверждения мы незамедлительно получаем следующий факт: $AH = 2 \cdot OM_A$. В самом деле, эти отрезки гомотетичны с коэффициентом -2 , а значит длина одного в 2 раза больше длины другого.

Заметим, что в доказанной нами теореме отсутствует точка E — центр окружности Эйлера. Теорему об окружности Эйлера мы докажем в следующем разделе, однако загнать точку E на прямую HMO можно уже сейчас. Для этого определим точку E как центр описанной окружности серединного треугольника $M_A M_B M_C$. Оказывается, что этого достаточно для доказательства следующего утверждения.

Задача 11.4. Докажите, что точки E , M и O лежат на одной прямой, причем $MO : ME = 2 : 1$.

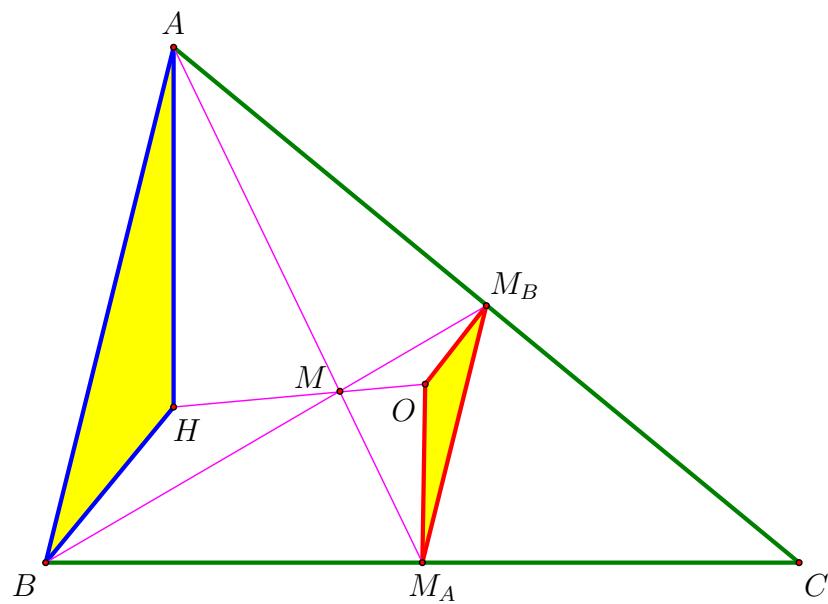


Рис. 11.12: $H_M^{-2}(\triangle MAM_BO) = \triangle ABH$

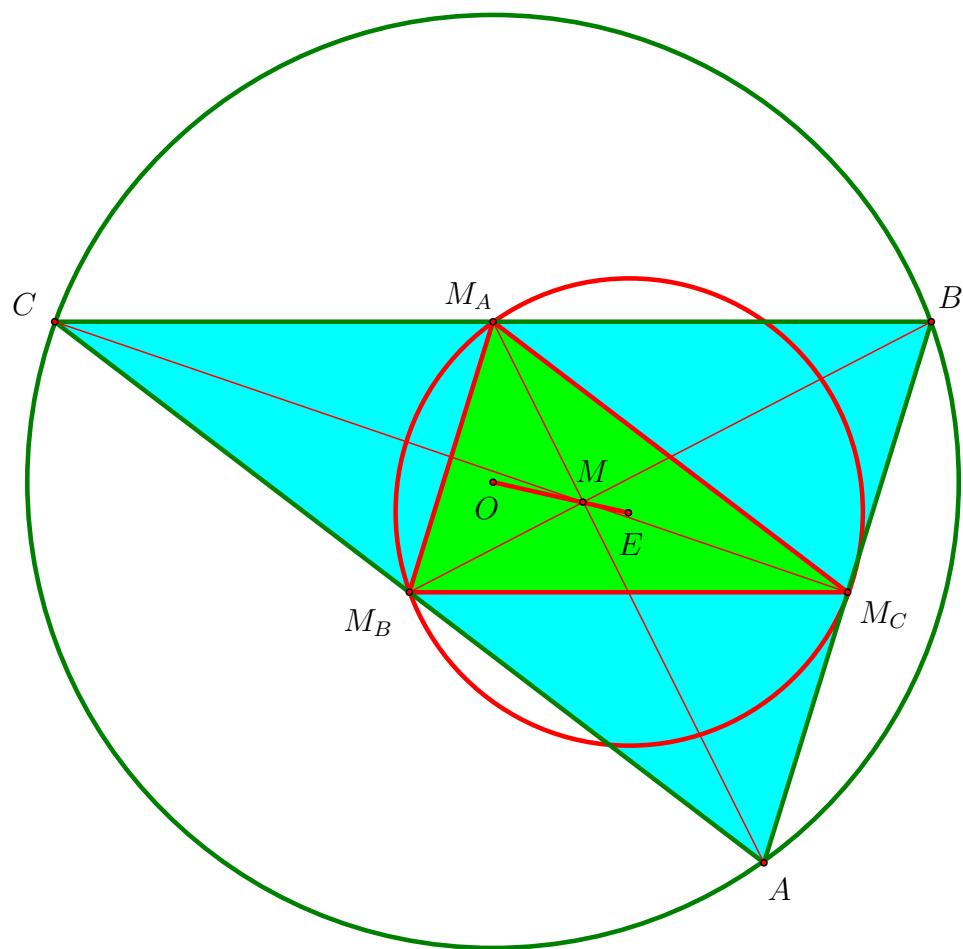


Рис. 11.13: Прямая Эйлера: E, M, O

Из этих двух утверждений мы незамедлительно получаем теорему о прямой Эйлера: *точки H , M , E , O лежат на одной прямой*, причем $HM : MO = MO : ME = 2 : 1$ (см. рис. 11.14).

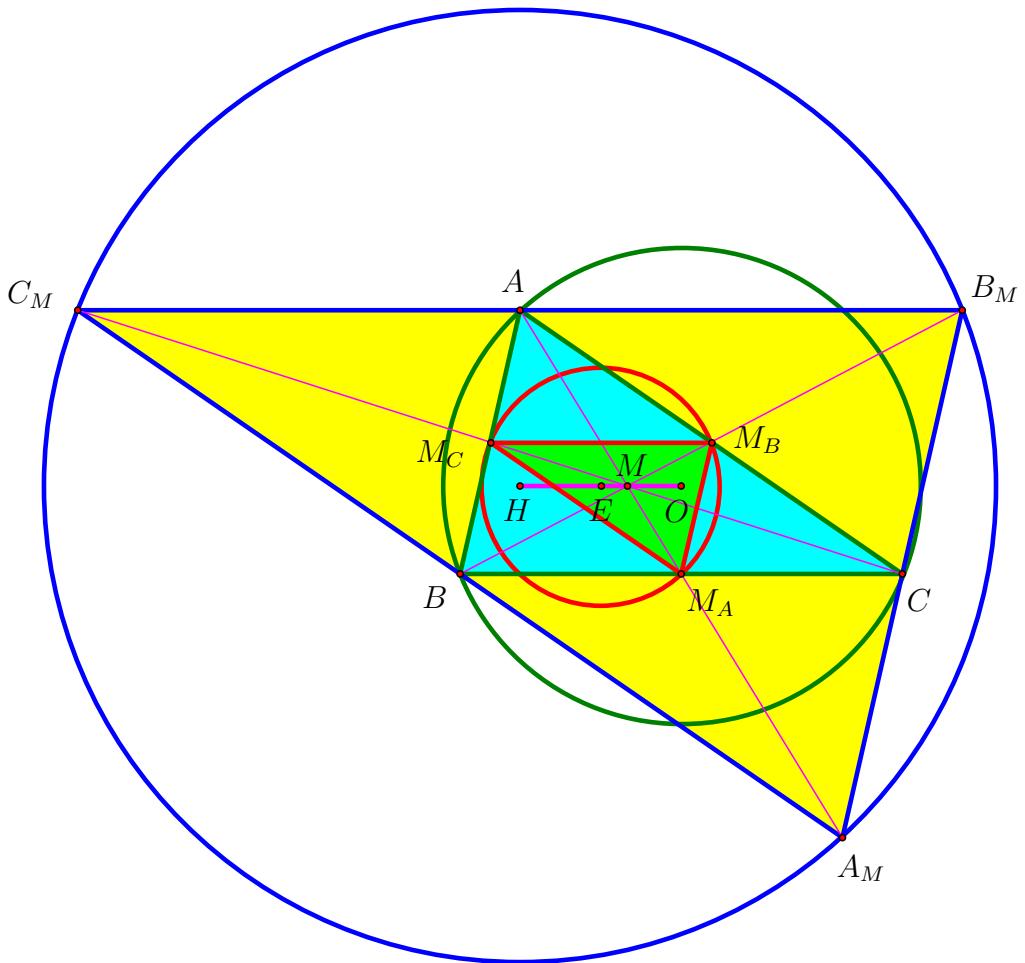


Рис. 11.14: Прямая Эйлера: H, E, M, O

Отметим также, что окружность Эйлера и описанная окружность треугольника гомотетичны с центром в точке M и коэффициентом -2 . В частности, отсюда следует, что радиус описанной окружности треугольника в 2 раза больше радиуса его окружности Эйлера.

11.4 Гомотетия и окружность Эйлера

Итак, гомотетия помогла нам получить короткое и изящное доказательство теоремы о прямой Эйлера. Возникает естественный вопрос: нельзя ли с помощью похожих соображений доказать и теорему об окружности Эйлера? Конечно, окружность Эйлера у нас уже появлялась, но в усеченном варианте: мы рассматривали ее лишь как окружность, описанную вокруг серединного треугольника. Для доказательства теоремы о прямой Эйлера с помощью гомотетии этого уже оказалось достаточно. Но можно ли теперь загнать на эту окружность еще шесть замечательных точек (три основания высот и три середины отрезков, соединяющих вершины с ортоцентром)? Оказывается, можно!

Начнем со следующего утверждения.

Утверждение 3. Точки, симметричные ортоцентру треугольника относительно стороны и середины стороны, лежат на описанной окружности (см. рис. 11.15). Более того, точка, центрально-симметричная ортоцентру, диаметрально противоположна вершине треугольника

Замечание. Разумеется, ранее мы уже доказывали это утверждение. Однако сейчас мы дадим другое доказательство, основанное на технике работы со вписанными четырехугольниками.

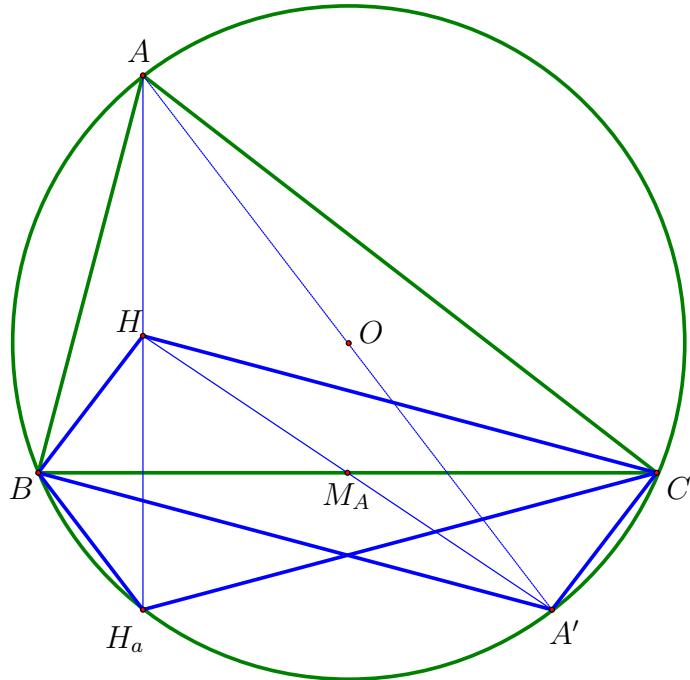


Рис. 11.15: Точки H^S и A'

Доказательство. Пусть $H_a = S_{BC}(H)$ и $A' = Z_{M_A}(H)$ — точки, симметричные ортоцентру H треугольника ABC относительно стороны BC и ее середины M_A соответственно. Докажем, что четырехугольники $ABC A'$ и $ABCH_a$ являются вписанными. Для этого докажем, что сумма их противоположных углов равна 180° .

Пусть $\angle BAC = \alpha$. Тогда угол $\angle BHC = 180^\circ - \alpha$ (поскольку в четырехугольнике AH_BHH_C два угла прямые). Так как $\angle BH_aC = S_{BC}(\angle BHC)$ и $\angle BA'C = Z_{M_A}(\angle BHC)$ и движение переводит угол в равный ему угол, что $\angle BH_aC = \angle BA'C = \angle BHC = 180^\circ - \alpha$. Отсюда незамедлительно получаем, что $\angle BAC + \angle BH_aC = \angle BAC + \angle BA'C = 180^\circ$, что и требовалось доказать.

Теперь докажем, что точка A' диаметрально противоположна точке A . Для этого заметим, что $A'C \parallel BH$ (поскольку центральная симметрия переводит прямую в параллельную прямую). Так как угол между прямыми BH и AC прямой (поскольку BH — высота), то и угол между $A'C$ и AC прямой. Поскольку прямой угол, вписанный в окружность, смотрит на диаметр, то отрезок AA' является диаметром, а значит, его серединой является точка O . \square

Каким образом это утверждение может нам помочь при доказательстве теоремы об окружности Эйлера? Оказывается, мы уже все доказали! Осталось просто посмотреть на картинку *sub alia specie*²...

²Под другим углом зрения

Теорема 3. В произвольном треугольнике середины сторон, основания высот и середины отрезков, соединяющих вершины с ортоцентром, лежат на одной окружности.

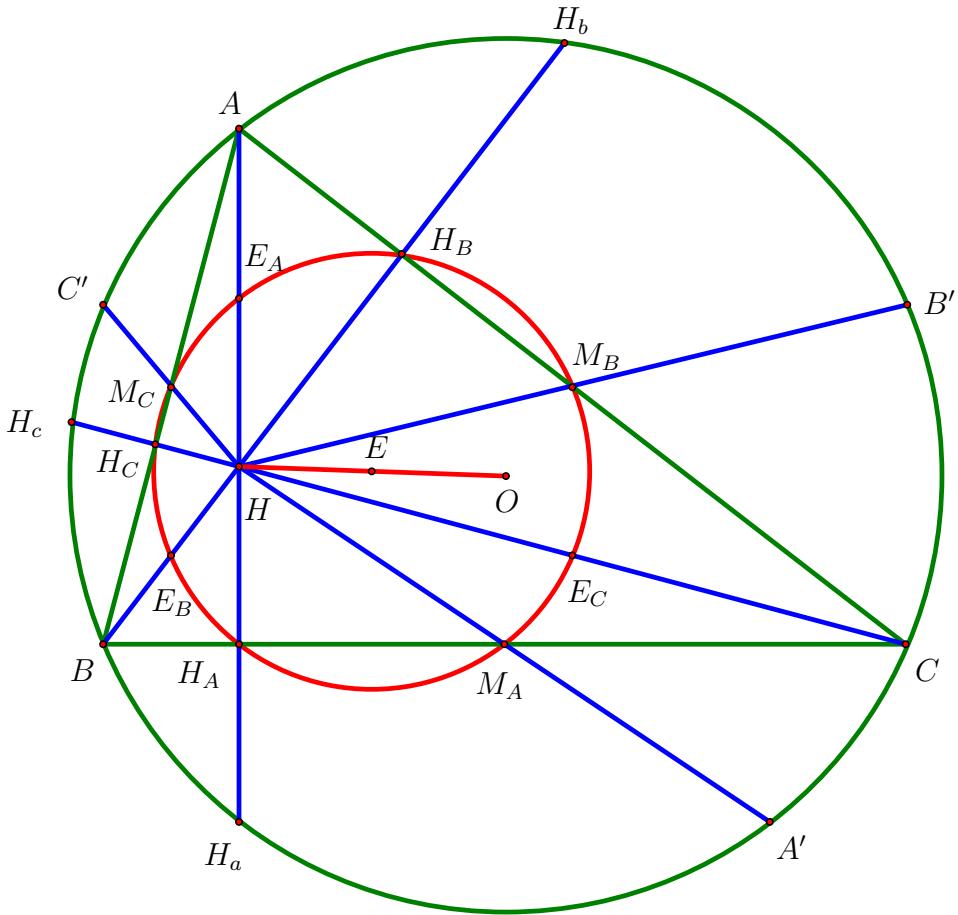


Рис. 11.16: Окружность Эйлера

Доказательство. Рассмотрим описанную окружность треугольника ABC . Как следует из утверждения 3, на этой окружности лежат девять точек: A' , B' , C' ; H_a , H_b , H_c ; A , B , C . Подвернем теперь эту конструкцию гомотетии с центром в точке H и коэффициентом $1/2$ (см. рис. 11.16). Тогда точки, диаметрально противоположные вершинам, перейдут в середины сторон, точки, симметричные ортоцентру, перейдут в основания высот, а вершины треугольника перейдут в середины отрезков, соединяющих вершины с ортоцентром. Поскольку гомотетия переводит окружность в окружность, то все эти новые точки будут лежать на образе описанной окружности при такой гомотетии. Эта окружность и будет окружностью Эйлера. \square

Замечание. Из этой теоремы также следует, что радиус окружности Эйлера вдвое меньше радиуса описанной окружности, а также что точки H , E , O лежат на одной прямой, причем E — середина HO (поскольку гомотетия переводит центр окружности в центр окружности, то $H_H^{1/2}(O) = E$).

Замечание. Из теорем 11.4 и 3 следует, что существует две гомотетии, переводящие описанную окружность в окружность Эйлера: это $H_M^{-1/2}$ и $H_H^{1/2}$.

Данное доказательство теоремы об окружности Эйлера позволяет также получить еще одну интерпретацию прямой Эйлера. Для этого обратим внимание на рис. 11.17 и четырехугольник $AA'M_AE_A$.

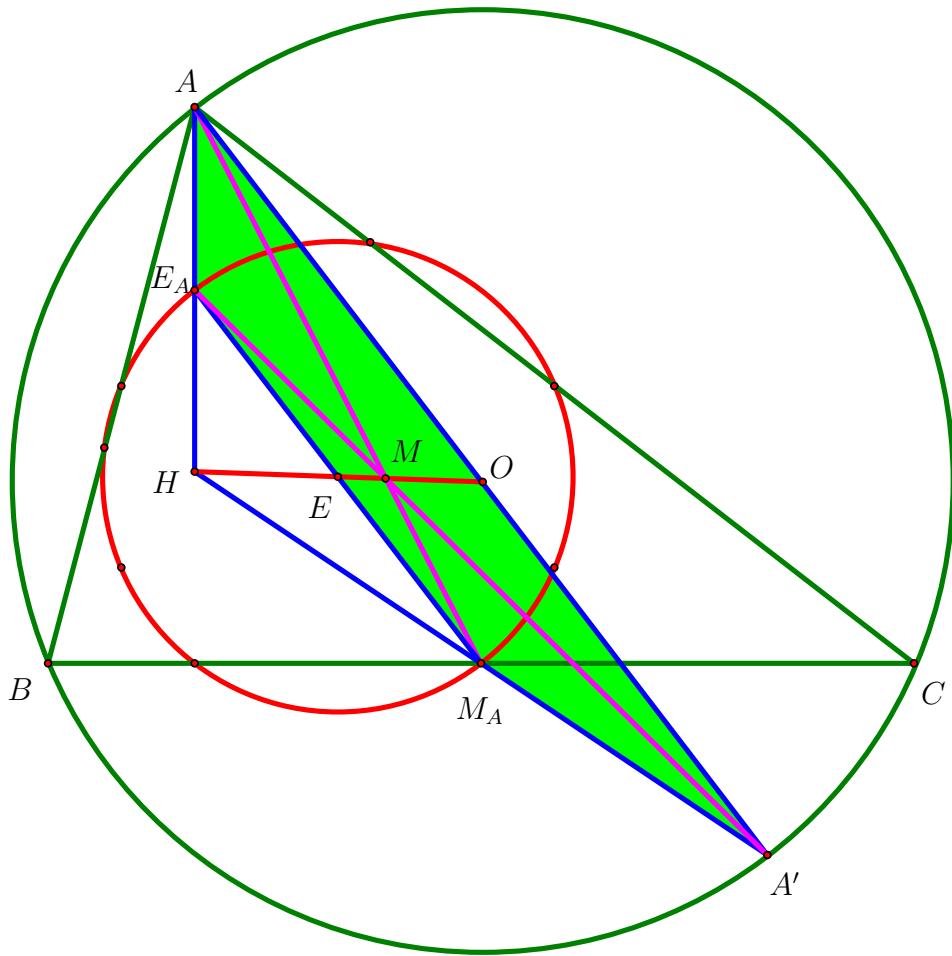


Рис. 11.17: Прямая Эйлера и замечательное свойство трапеции

Он является трапецией (поскольку $H_H^{1/2}(AA') = E_A M_A \parallel AA'$). Точки O и E являются серединами оснований AA' и $E_A M_A$ (поскольку эти основания являются диаметрами описанной окружности и окружности Эйлера соответственно), точка H является точкой пересечения продолжений боковых сторон (поскольку $H_H^{1/2}(A) = E_A$ и $H_H^{1/2}(A') = M_A$ по доказательству теоремы 3), а точка M является точкой пересечения диагоналей (поскольку гомотетия с центром в M переводит окружность Эйлера в описанную окружность, она переведет точку M_A в точку A , а диаметр $M_A E_A$ — в параллельный ему диаметр AA'). Значит, точки H, E, M, O лежат на одной прямой — это замечательное свойство трапеции $AA'M_AE_A$!

Об одной композиции гомотетий

Выше мы задали естественный вопрос: *чем является композиция гомотетий?* В общем виде мы дадим ответ на него в разделе 11.6. Однако сейчас доказанные нами результаты позволяют доказать следующую замечательную теорему, дающую ответ на этот вопрос в одном частном случае.

Теорема 4. Имеет место следующее равенство: $H_H^2 \circ H_M^{-1/2} = \mathcal{Z}_O$.

Мы дадим сразу два доказательства этой теоремы. Первое будет более коротким и функциональным, второе — более длинным и геометрическим.

Доказательство I. Пусть $H_H^2 \circ H_M^{-1/2} = F$. Заметим, что F — движение. В самом деле, мы знаем, что композиция подобий есть подобие, причем коэффициент композиции равен произведению коэффициентов сомножителей. Поскольку $|1/2| \cdot |-2| = 1$, то F является подобием с коэффициентом 1, т.е. движением.

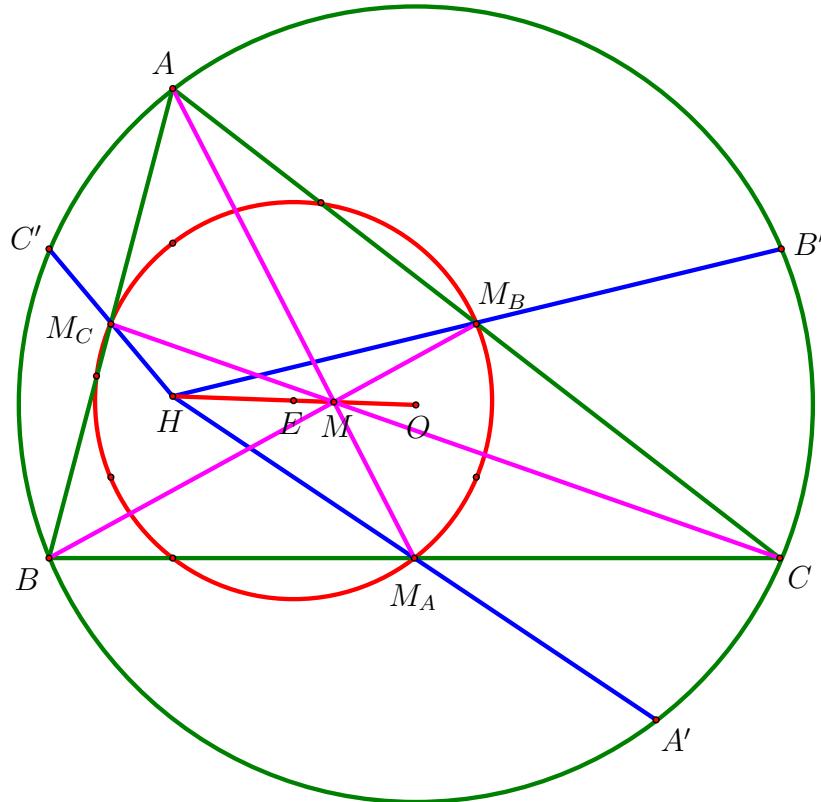


Рис. 11.18: $H_H^2 \circ H_M^{-1/2} = \mathcal{Z}_O$

Далее заметим (см. рис. 11.18), что $F(A) = A' = \mathcal{Z}_O(A)$, $F(B) = B' = \mathcal{Z}_O(B)$, $F(C) = C' = \mathcal{Z}_O(C)$. Таким образом, движения F и \mathcal{Z}_O совпадают на трех точках, не лежащих на одной прямой (т.к. это вершины треугольника). Согласно лемме о трех гвоздях, эти движения тождественно равны, т.е. $F = \mathcal{Z}_O$, что и требовалось доказать. \square

Доказательство II. Рассмотрим произвольную точку X . Пусть $H_M^{-1/2}(X) = X'$ и $H_H^2(X') = X''$ (см. рис. 11.19). Наша цель — доказать, что точка O — середина отрезка XX'' . Рассмотрим отрезок XX' . Поскольку $HX' = X'X''$, то XX' — медиана треугольника HXX'' . Поскольку $MX : MX' = 2 : 1$, то точка M — это точка пересечения медиан треугольника HXX'' . Тогда рассмотрим медиану HO' треугольника HXX'' , выходящую из точки H . Тогда $HM : MO' = 2 : 1 = HM : MO$ (последнее равенство следует из теоремы о прямой Эйлера). Но тогда точки O и O' совпадают, поскольку в силу аксиомы 3 на луче $[MO)$ можно отложить лишь один отрезок, равный $HM/2$. Значит, точка O — середина XX'' и $\mathcal{Z}_O(X) = X''$, что и требовалось. \square

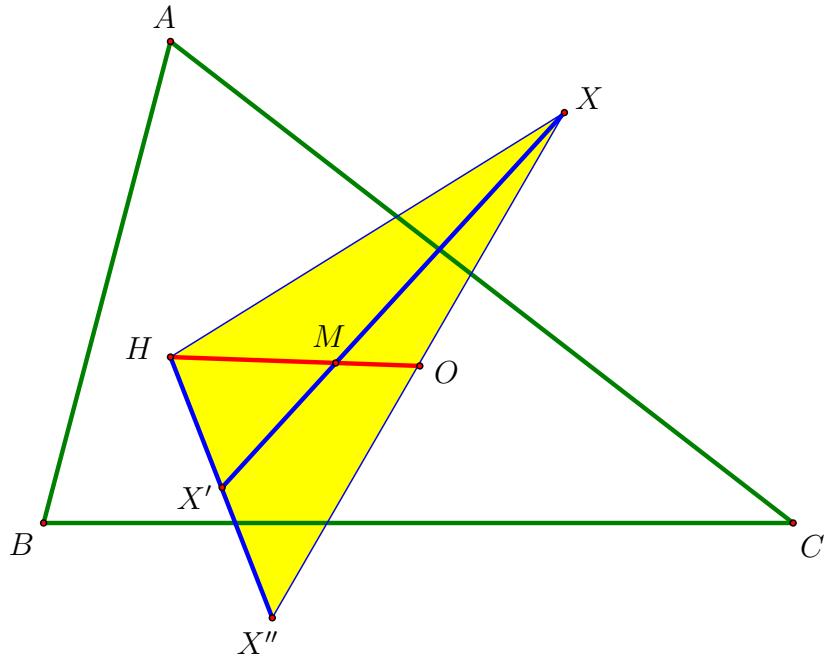


Рис. 11.19: $H_M^{-1/2} \circ H_H^2 = \mathcal{Z}_O$

Следствие. Имеет место следующее равенство: $H_M^{-1/2} \circ H_H^2 = \mathcal{Z}_E$.

Доказательство. Мы проведем здесь лишь аналог первого доказательства теоремы 4. А именно, заметим, что композиция $H_M^{-1/2} \circ H_H^2 = G$ также является движением, и что $G(M_A) = E_A = \mathcal{Z}_E(M_A)$, $G(M_B) = E_B = \mathcal{Z}_E(M_B)$, $G(M_C) = E_C = \mathcal{Z}_E(M_C)$. Применяя лемму о трех гвоздях, получаем требуемое. \square

Замечание. Как видно, композиция гомотетий некоммутативна:

$$H_H^2 \circ H_M^{-1/2} \neq H_M^{-1/2} \circ H_H^2.$$

В заключение отметим, что именно второе доказательство послужит нам основой для вычисления композиции произвольных гомотетий.

11.5 Гомотетия и пара окружностей

Мы отмечали, что существуют две гомотетии, переводящие описанную окружность в окружность Эйлера. Вполне естественно поставить общий вопрос: *сколько существует гомотетий, переводящих одну окружность в другую?* Как устроены центры этих гомотетий? Как можно построить эти центры? С какими геометрическими конфигурациями они связаны?

В данном разделе мы дадим ответы на эти вопросы. Оказывается, что эти вопросы очень глубоки и содержательны: они обнаруживают связь с самыми разными разделами геометрии.

11.5.1 Общие касательные

Начнем со случая, когда окружности ω_1 и ω_2 не пересекаются и не содержатся одна внутри другой. Попробуем понять, как устроены гомотетии, переводящие одну из них в другую. Для определенности мы всегда будем переводить меньшую в большую, т.е. раздувать окружности.

Когда мы просто произносим слово «раздутие», то на ум приходит следующая естественная геометрическая конструкция. Давайте проведем к окружностям общие внешние касательные, пересекающиеся в точке A . Также проведем общие внутренние касательные, пересекающиеся в точке B (см. рис. 11.20).

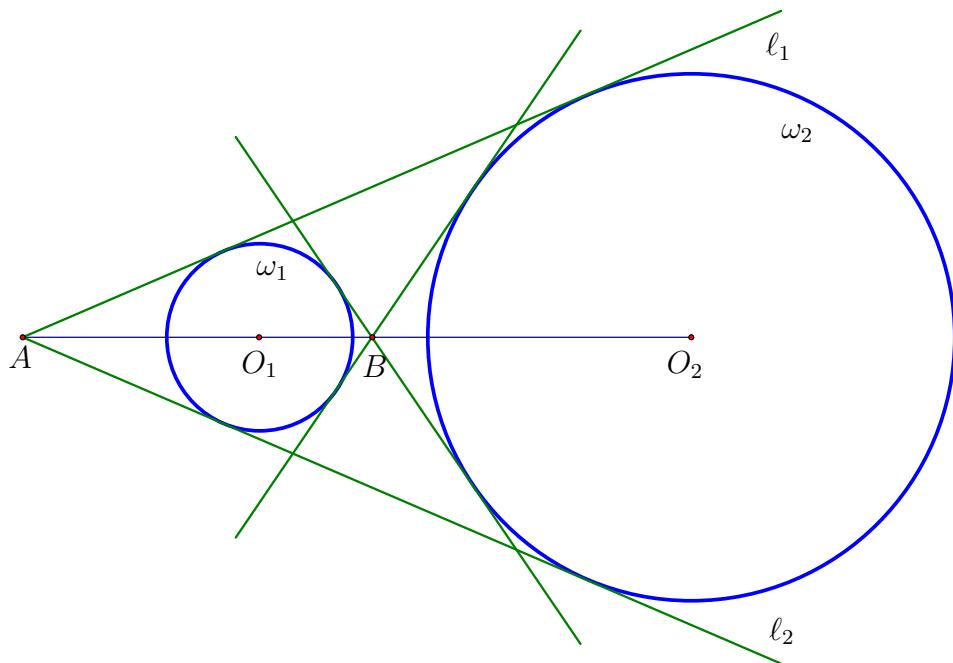


Рис. 11.20: Общие касательные

Замечание. Понятно, что если наши окружности равны, то общие внешние касательные параллельны. В этом случае точки A не существует, а окружности совмещаются не гомотетией, а параллельным переносом. Поэтому мы в дальнейшем не будем рассматривать такой случай равных окружностей, хотя иногда, допуская вольность речи, говорят, что равные окружности совмещаются гомотетией с центром в бесконечно удаленной точке.

Также мы будем считать, что наши окружности неконцентрические, поскольку в противном случае очевидно, что единственным центром гомотетии является их общий центр (который должен оставаться на месте).

Теорема 5. *Существует гомотетия H_A с центром в точке A и положительным коэффициентом, переводящая ω_1 в ω_2 : $H_A(\omega_1) = \omega_2$. Аналогично, существует гомотетия H_B с центром в точке B и отрицательным коэффициентом, переводящая ω_1 в ω_2 : $H_B(\omega_1) = \omega_2$.*

Доказательство. Ключевым соображением в доказательстве этой теоремы (а также других теорем, связанных с гомотетией) является рассмотрение не образа целий окружности ω_1 , а лишь одной ее точки, которая однозначно эту окружность задает. Эту точку можно выбирать по-разному, однако наиболее естественно попытаться совместить гомотетией центры O_1 и O_2 наших окружностей, а затем доказать, что центр потянет за собой всю окружность.

Итак, рассмотрим гомотетию H_A такую, что $H_A(O_1) = O_2$. Такая гомотетия существует и единственна, поскольку гомотетия однозначно задается образом одной точки. Докажем, что тогда $H_A(\omega_1) = \omega_2$. В самом деле, поскольку гомотетия переводит касание в касание (единственность точки пересечения сохраняется), то окружность ω_1 , вписанная в угол $\ell_1\ell_2$, перейдет в окружность с центром в точке O_2 , которая также вписана в угол $\ell_1\ell_2$. Но существует ровно одна окружность с центром в точке O_2 , которая вписана в угол $\ell_1\ell_2$ — это окружность ω_2 (в самом деле, чтобы задать такую окружность, достаточно указать ее радиус; но радиус равен расстоянию от O_2 до сторон угла и тем самым однозначно задается точкой O_2). Поэтому $H_A(\omega_1) = \omega_2$, что и требовалось доказать.

Рассуждения для точки B абсолютно аналогичны. \square

Замечание. Поскольку гомотетии переводят радиус в радиус, то $k_1 = r_2/r_1$ и $k_2 = -r_2/r_1$, где k_1 и k_2 — коэффициенты гомотетий H_A и H_B соответственно.

11.5.2 Параллельные диаметры и лемма Евклида

Естественная конструкция, полученная нами в теореме 5, обладает двумя существенными недостатками. Во-первых, непонятно, существуют ли другие гомотетии (с другими центрами), которые переводят окружности друг в друга. Во-вторых, окружности могут располагаться так, что общих касательных не существует (возможно, только внутренних, а возможно, еще и внешних); например, описанная окружность и окружность Эйлера не имеют общих касательных, однако мы знаем две гомотетии, которые переводят их друг в друга. Можно ли указать какую-то более общую конструкцию, позволяющую, с одной стороны, находить такие гомотетии для произвольно расположенных окружностей, а с другой стороны, доказывать единственность таких гомотетий?

Оказывается, такая конструкция есть! Она является модификацией нашего рассуждения из раздела 11.4 про замечательное свойство трапеции!

Рассмотрим линию центров O_1O_2 и проведем в окружностях два диаметра d_1 и d_2 , перпендикулярные линии центров. Предположим, что существует гомотетия, переводящая окружность ω_1 в окружность ω_2 . Тогда эта гомотетия переведет диаметр d_1 в диаметр d_2 . В самом деле, центр O_1 переходит в центр O_2 , поэтому диаметр d_1 перейдет в диаметр, параллельный d_1 , т.е. в d_2 (поскольку по аксиоме 9 существует единственный диаметр в окружности ω_2 , параллельный d_1). С другой стороны, если какая-то гомотетия переведет d_1 в d_2 , то она же переведет ω_1 в

ω_2 , поскольку середина d_1 перейдет в середину d_2 (т.е. центр O_1 перейдет в центр O_2) и радиус r_1 перейдет в радиус r_2 (т.к. отношение радиусов равно отношению длин диаметров).

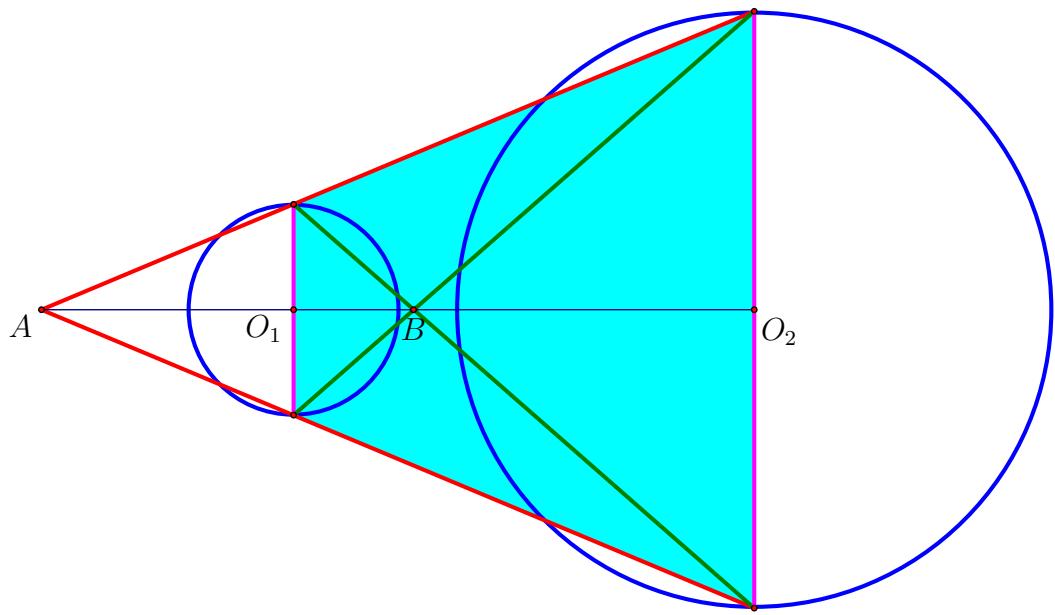


Рис. 11.21: Перпендикулярные диаметры

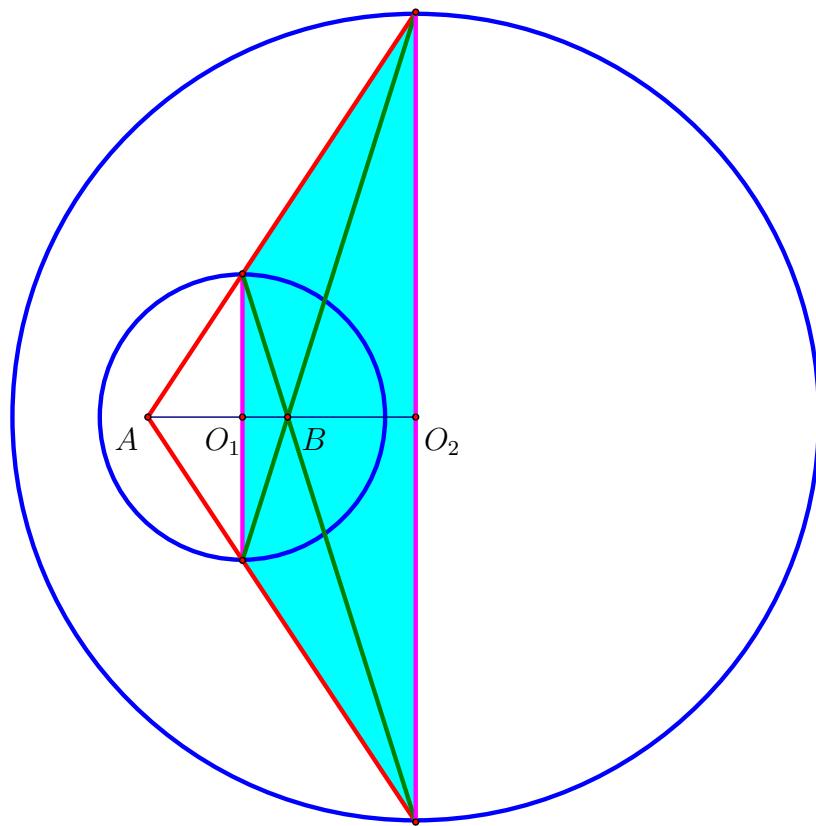


Рис. 11.22: Перпендикулярные диаметры

Таким образом, для того, чтобы переводить окружность ω_1 в окружность ω_2 , необходимо и достаточно перевести диаметр d_1 в диаметр d_2 ! Диаметр потащит за собой всю окружность!

Теперь поймем, как можно совместить гомотетией два параллельных диаметра. Поскольку концы диаметра d_1 должны перейти в концы диаметра d_2 , то либо эти концы надо соединить «соответственно» (верхний с верхним, нижний с нижним), либо «крест-накрест» (верхний с нижним, нижний с верхним). В результате мы получим ровно две точки A и B , которые и будут центрами искомых гомотетий. При этом гомотетия H_A имеет положительный коэффициент $k_1 = r_2/r_1$, а гомотетия H_B — отрицательный: $k_2 = -r_2/r_1$.

Тем самым нами доказана следующая теорема.

Теорема 6. Для любых двух неравных неконцентрических окружностей ω_1 и ω_2 существуют ровно две гомотетии H_A и H_B , переводящие ω_1 в ω_2 . При этом точки A и B являются точками пересечения прямых, проходящих через концы диаметров, перпендикулярных линии центров (см. рис. 11.21 и 11.22).

Замечание. Из замечательного свойства голубой трапеции следует, что центры A и B гомотетий лежат на линии центров O_1 и O_2 .

Замечание. Из теоремы 6 немедленно следует, что если к окружностям ω_1 и ω_2 можно провести общие касательные, то они пройдут либо через точку A (если они внешние), либо через точку B (если они внутренние): это просто два разных способа построения центров гомотетии, которых существует ровно два согласно теореме 6. Отдельно отметим, что общие касательные не проходят через концы диаметров (см. рис. 11.21 и 11.22), поэтому эти два способа построения действительно разные.

Теперь заметим, что при построении центров A и B гомотетии мы наложили одно условие на диаметры d_1 и d_2 : мы выбрали их перпендикулярными линии центров O_1O_2 . Сделали мы это для того, чтобы задать диаметры однозначно. однако теперь мы можем рассмотреть пару произвольных параллельных диаметров. И если провести для них те же самые рассуждения, получается следующая замечательная теорема.

Теорема 7 (лемма Евклида о параллельных диаметрах). Рассмотрим произвольные параллельные диаметры в двух неравных неконцентрических окружностях. Тогда точки пересечения пар прямых, проходящих через соответствующие концы этих диаметров, не зависят от выбора диаметров (см. рис. 11.23 и 11.24).

Доказательство. Рассмотрим центры A и B гомотетий H_A и H_B наших окружностей (они существуют и единственны по теореме 6) и произвольный диаметр D_1 окружности ω_1 . Тогда гомотетии H_A и H_B переведут D_1 в диаметр окружности ω_2 (гомотетия переводит диаметр в диаметр), который параллелен D_1 . Но такой диаметр единственный по аксиоме 9 (через точку O_2 можно провести единственную прямую, параллельную D_1). Значит, это диаметр D_2 и $H_A(D_1) = H_B(D_1) = D_2$. Это и означает, что прямые, соединяющие соответствующие концы диаметров, пересекаются либо в точке A (если проходят через «верхние» и «нижние» концы), либо в точке B (если проходят «крест-накрест»). \square

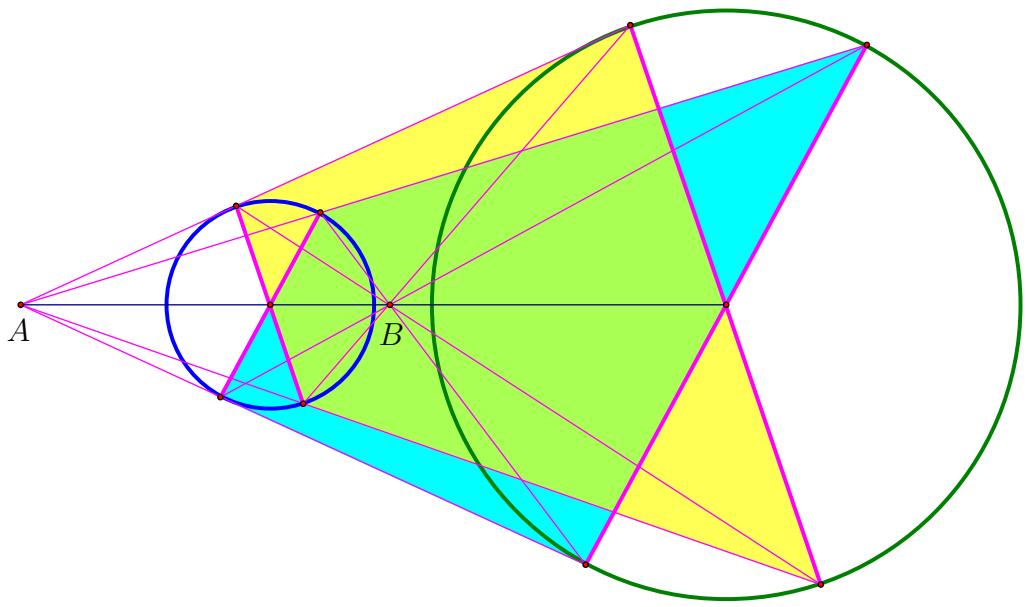


Рис. 11.23: Параллельные диаметры

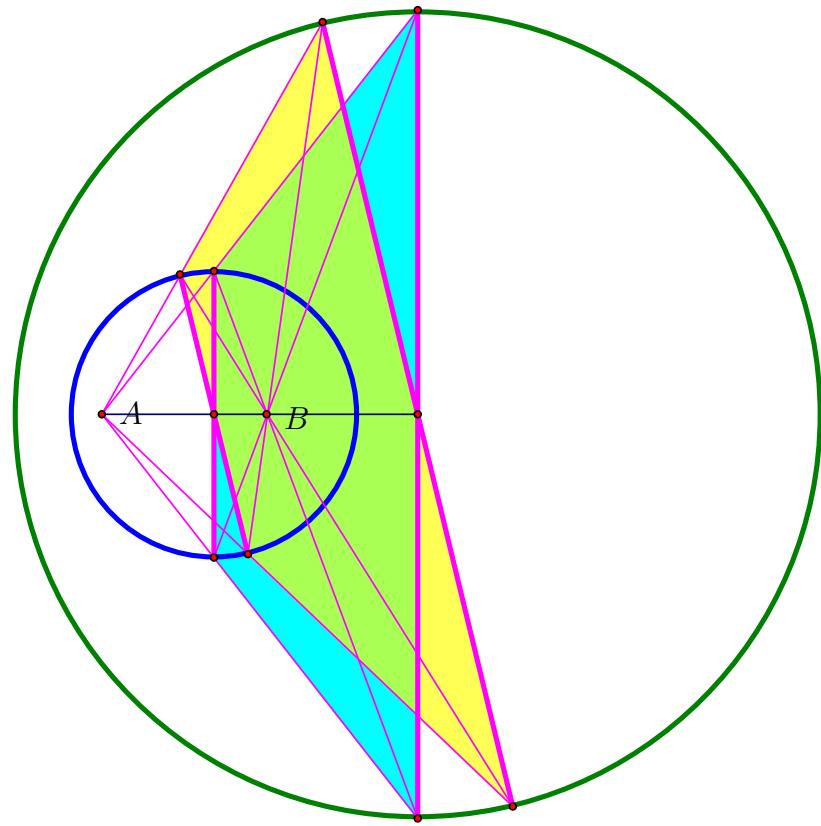


Рис. 11.24: Параллельные диаметры

11.5.3 Связь с биссектрисами и окружностью Аполлония

Совершенно невероятным образом удается обнаружить связь центров гомотетий двух окружностей с биссектрисами и окружностью Аполлония! А именно, справедливо следующее утверждение.

Задача 11.5. Пусть окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точке P . Рассмотрим

центры гомотетий A и B этих окружностей. Докажите, что отрезки PA и PB являются биссектрисами внешнего и внутреннего углов треугольника O_1O_2P (см. рис. 11.25).

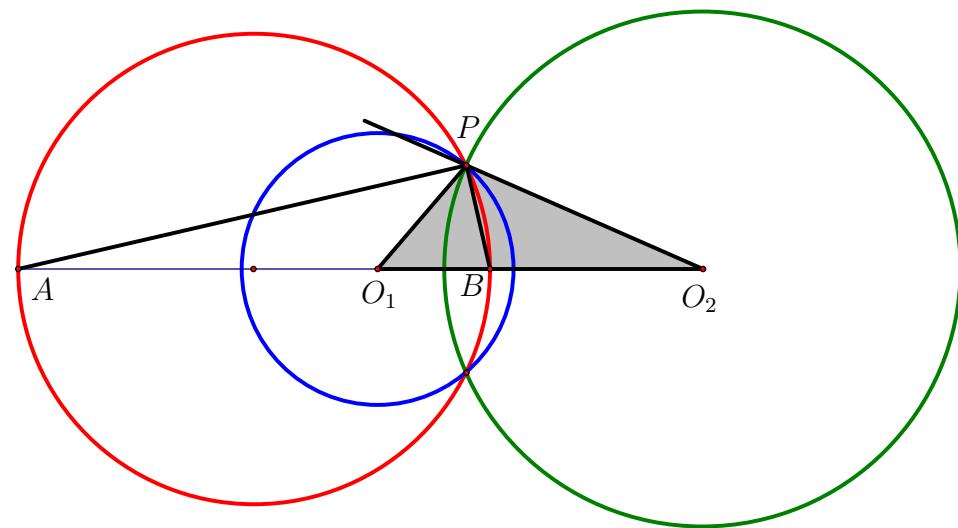


Рис. 11.25: Окружность Аполлония

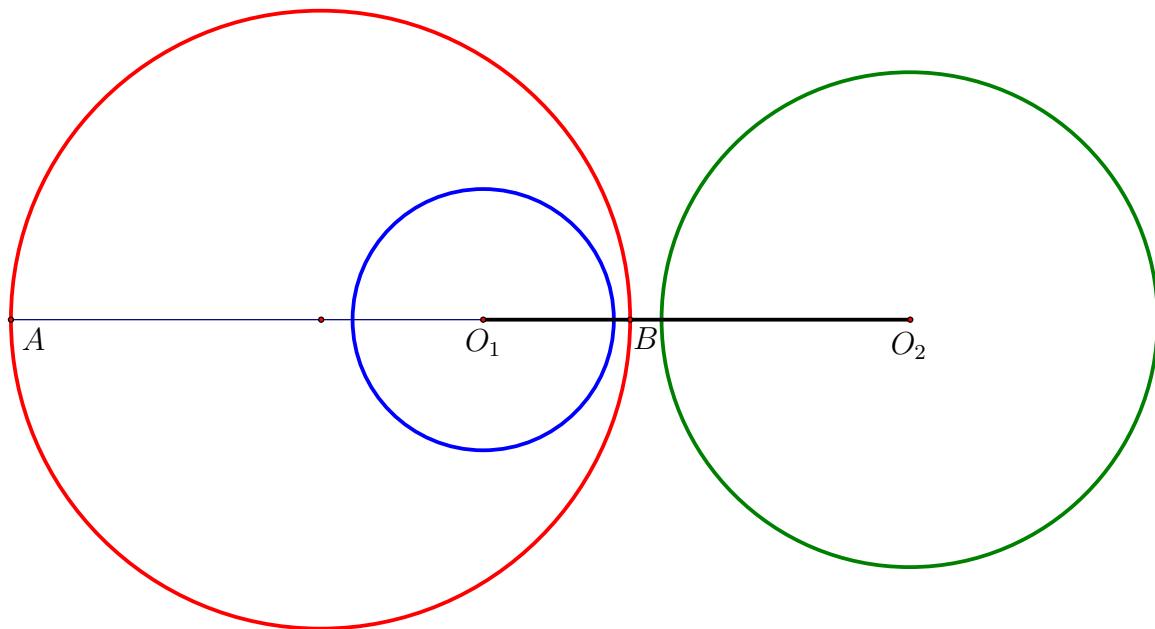


Рис. 11.26: Окружность Аполлония

Следствие. *Окружность, построенная на отрезке AB как на диаметре, является окружностью Аполлония треугольника O_1O_2P .*

Возникает естественный вопрос: можно ли обобщить эти результаты на случай непересекающихся окружностей?

Задача 11.6. Докажите, что окружность, построенная на отрезке AB как на диаметре, является окружностью Аполлония $Apoll(O_1, O_2)$ (см. рис. 11.26).

11.6 Композиция гомотетий

11.6.1 Формулировка и доказательство

Множество всех подобий образует группу: композиция подобий есть подобие (с коэффициентом, равным произведению коэффициентов двух исходных подобий). С другой стороны, мы знаем, как устроены все подобия: любое подобие есть композиция гомотетии и движения. Поэтому иногда говорят, что гомотетия — это единственное подобие с точностью до движения.

Раз так, то возникает естественный вопрос: *как устроена композиция гомотетий?* Ясно, что это подобие (раз гомотетия — это подобие), но какое? Оказывается, имеет место следующая важная теорема.

Теорема 8. *Композиция $H_{O_2}^{k_2} \circ H_{O_1}^{k_1}$ есть гомотетия $H_{O_3}^{k_3}$, где $k_3 = k_1 k_2$, а точка O_3 лежит на прямой $O_1 O_2$.*

Замечание. Частным случаем этой теоремы является теорема 4, утверждающая, что в произвольном треугольнике $H_H^2 \circ H_M^{-1/2} = \mathcal{Z}_O$. В самом деле, композиция $H_H^2 \circ H_M^{-1/2}$ есть центральная симметрия (гомотетия с коэффициентом $2 \cdot (-1/2) = -1$) с центром на прямой Эйлера HM . Но точка O сохраняется при такой композиции, т.к. $H_M^{-1/2}(O) = E$ и $H_H^2(E) = O$, поэтому центром этой симметрии является точка O .

Доказательство. Доказательство этой теоремы состоит из двух частей.

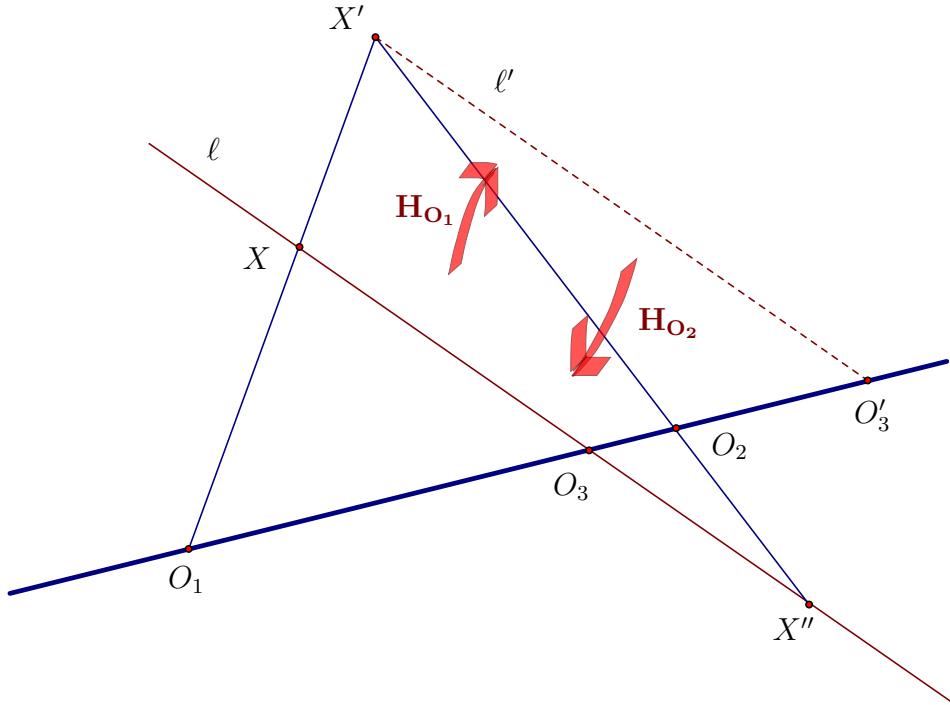


Рис. 11.27: Композиция гомотетий

1. Строим точку O_3 . В этой части мы построим на прямой O_1O_2 точку O_3 , неподвижную относительно композиции $H_{O_2}^{k_2} \circ H_{O_1}^{k_1}$ (т.е. $H_{O_2}^{k_2} \circ H_{O_1}^{k_1}(O_3) = O_3$). Для этого рассмотрим произвольную точку X , не лежащую на прямой O_1O_2 , и ее

образы $X' = H_{O_1}^{k_1}(X)$ и $X'' = H_{O_2}^{k_2}(X')$. Пересечем прямые (O_1O_2) и $\ell = (XX'')$ и обозначим точку пересечения через O_3 .

Докажем, что точка O_3 неподвижна при композиции $H_{O_2}^{k_2} \circ H_{O_1}^{k_1}$. В самом деле, рассмотрим точку $O'_3 = H_{O_1}^{k_1}(O_3)$. Тогда гомотетия $H_{O_1}^{k_1}$ переводит прямую ℓ в параллельную ей прямую ℓ' , проходящую через точки O'_3 и X' . Гомотетия $H_{O_2}^{k_2}$ переводит ℓ' обратно в ℓ (X' переходит в X'' и тащит за собой всю прямую). Значит, $H_{O_2} \circ H_{O_1}(\ell) = \ell$. Кроме того $H_{O_2} \circ H_{O_1}(O_1O_2) = (O_1O_2)$, поэтому точка $O_3 = \ell \cap (O_1O_2)$ остается на месте.

2. *Корректность.* Теперь нам необходимо доказать, что точка O_3 не зависит от выбора точки X , с помощью которой мы ее строили (это и есть корректность построения). Для доказательства этого утверждения построим точку O_3 указанным выше способом и рассмотрим произвольную точку Y , отличную от X . Наша цель — доказать, что точки Y , O_3 и Y'' лежат на одной прямой.

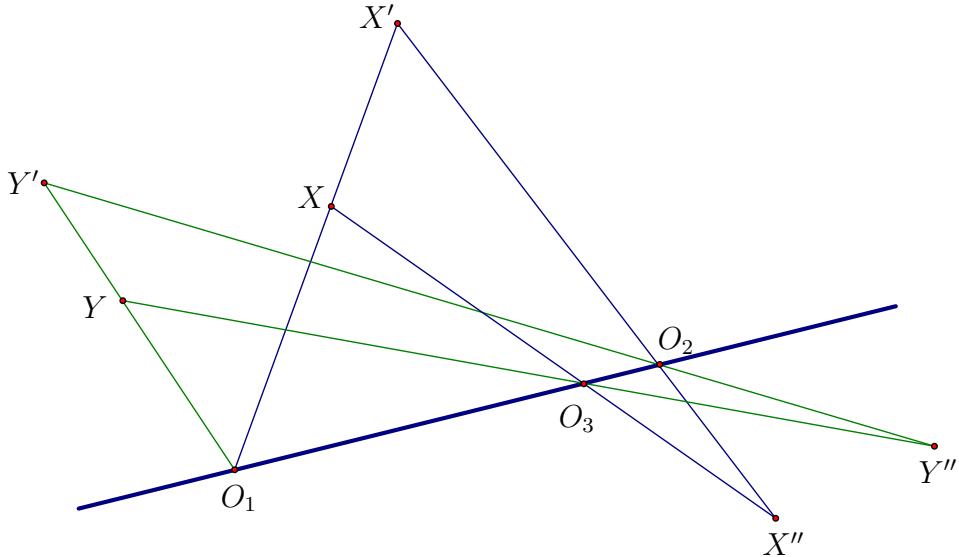


Рис. 11.28: Композиция гомотетий

Докажем это. Рассмотрим прямые (YO_3) , $(Y'O'_3)$ и $(Y''O_3)$. Поскольку $H_{O_1}^{k_1}(O_3) = O'_3$ и $H_{O_2}^{k_2}(O'_3) = O_3$, то $H_{O_1}^{k_1}(YO_3) = (Y'O'_3)$ и $H_{O_2}^{k_2}(Y'O'_3) = (Y''O_3)$. Но гомотетия переводит прямую в параллельную, поэтому $(YO_3) \parallel (Y'O'_3) \parallel (Y''O_3)$. Т.к. прямые (YO_3) и $(Y''O_3)$ имеют общую точку O_3 , то они совпадают. Значит, точки Y , O_3 и Y'' лежат на одной прямой.

Таким образом, мы доказали, что композиция $H_{O_2}^{k_2} \circ H_{O_1}^{k_1}$ переводит любую точку X в точку X'' , лежащую на прямой (XO_3) . Кроме того, $\overline{O_3X''} = k_2 \cdot \overline{O'_3X'} = k_1 k_2 \cdot \overline{O_3X}$. Но это и есть определение гомотетии с центром в точке O_3 и коэффициентом $k_1 k_2$. \square

Замечание. Из этой теоремы следует, что множество всех гомотетий образует *подгруппу в группе подобий*. Отметим, что эта подгруппа некоммутативна: вообще говоря, $H_2 \circ H_1 \neq H_1 \circ H_2$.

Данная теорема является одним из немногих примеров классификационных теорем в школьной геометрии, который может быть использован для доказательства различных геометрических утверждений. Сейчас мы приведем лишь один пример такого применения.

11.6.2 Теорема о трех колпаках

Теорема 9 (Теорема о трех колпаках). *Рассмотрим три окружности, ни одна из которых не лежит внутри другой. Точки пересечения пар внешних касательных, проведенных к любым двум окружностям, лежат на одной прямой (см. рис. 11.29).*

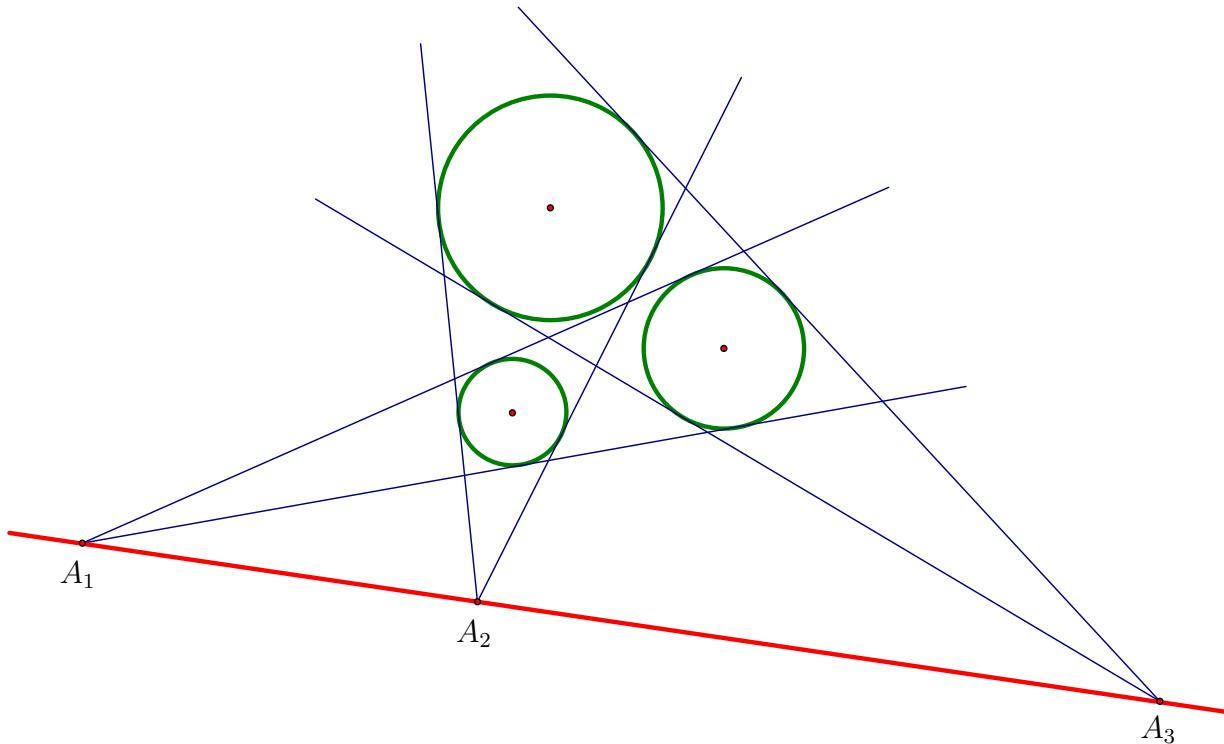


Рис. 11.29: Теорема о трех колпаках: внешние касательные

Доказательство. Рассмотрим точки A_1, A_2, A_3 (см. рис. 11.29). Согласно теореме 5, эти точки являются центрами гомотетий с положительными коэффициентами, переводящих эти окружности друг в друга. Рассмотрим композицию $H_{A_2} \circ H_{A_1}$. Эта композиция переводит окружность ω_2 в окружность ω_1 и является гомотетией согласно теореме 8. Но по теореме 6 существует единственная гомотетия с положительным коэффициентом, переводящая ω_2 в окружность ω_1 . Значит, $H_{A_2} \circ H_{A_1} = H_{A_3}$. Согласно теореме 8, центры A_1, A_2, A_3 всех трех гомотетий лежат на одной прямой. \square

Отметим, что эта теорема может быть усиlena. А именно, рассмотрим три неконцентрические окружности и отметим из центров гомотетий: внешние A_1, A_2, A_3 и внутренние B_1, B_2, B_3 .

Задача 11.7. Докажите, что каждая тройка этих точек, в которых содержится четное количество внутренних центров гомотетий, лежит на одной прямой (см. рис. 11.30).

Кроме того, если построить на отрезках $[A_iB_i]$ окружности Аполлония (см. задачу 11.5), то три такие окружности пройдут через две точки (см. рис. 11.31).

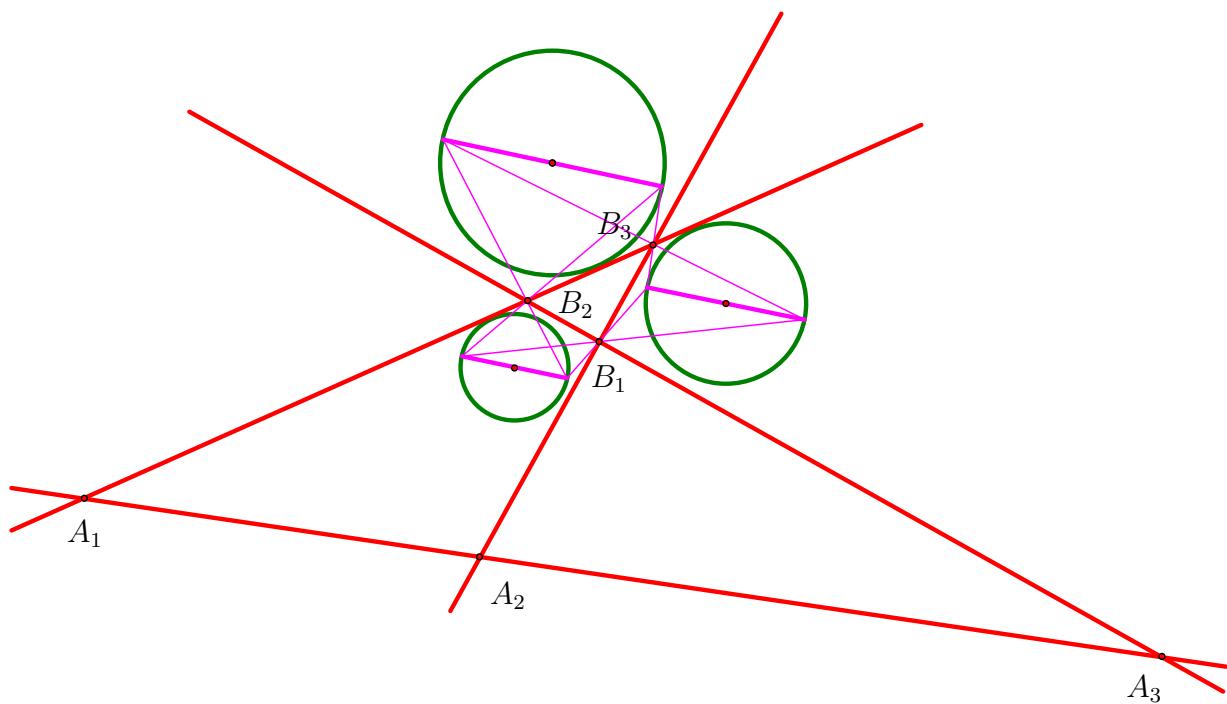


Рис. 11.30: Теорема о трех колпаках: внутренние касательные

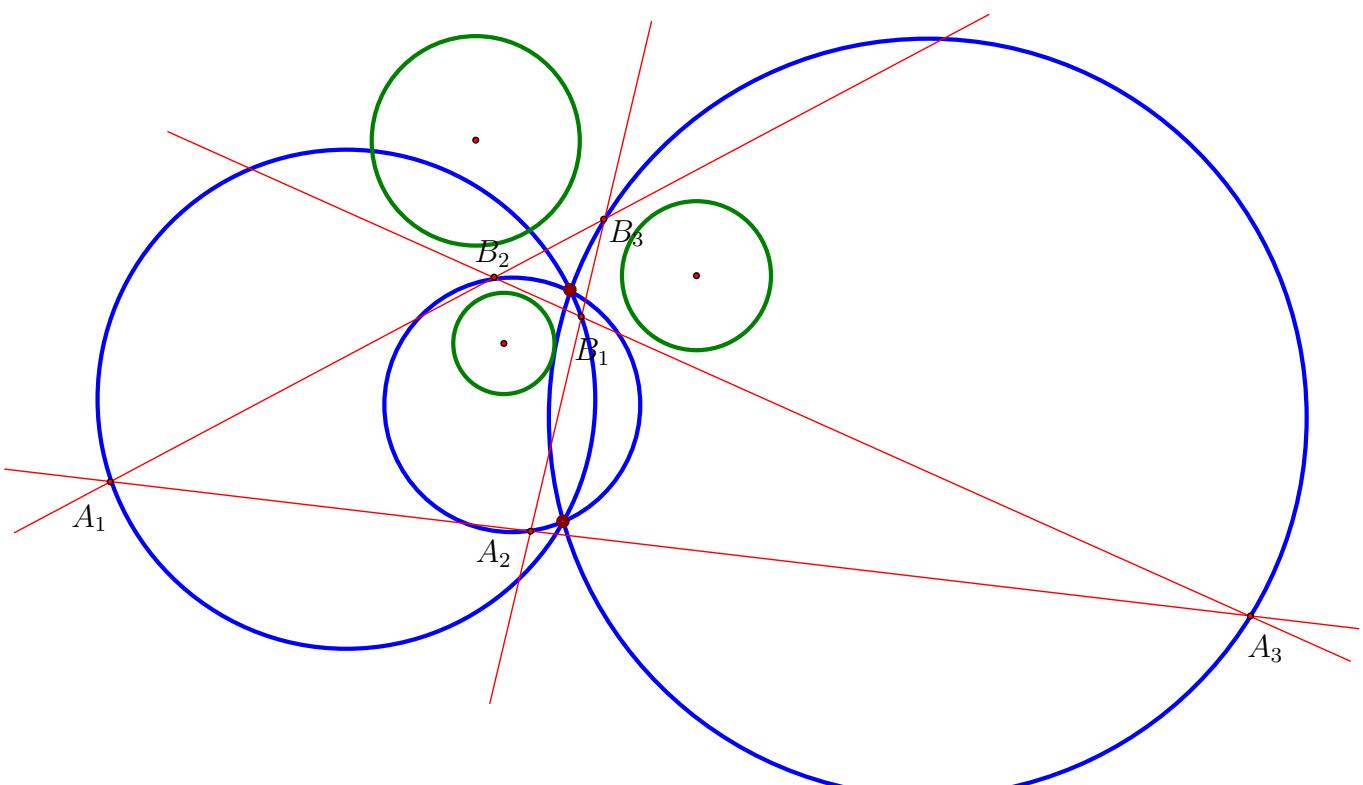


Рис. 11.31: Теорема о трех колпаках: окружности Аполлония

Нельзя не упомянуть о связи теоремы о композиции гомотетий и теоремы о пропорциональных отрезках (см. задачу 10.1).

Заметим, что $H_{O_2}^{k_2} \circ H_{O_1}^{k_1} = H_{O_3}^{k_3}$ (см. рис. 11.32). Равенство $x/y = a/b \cdot (c/d + 1)$ есть не что иное, как утверждение о коэффициенте композиции гомотетий $k_2 \cdot k_1 = k_3$!

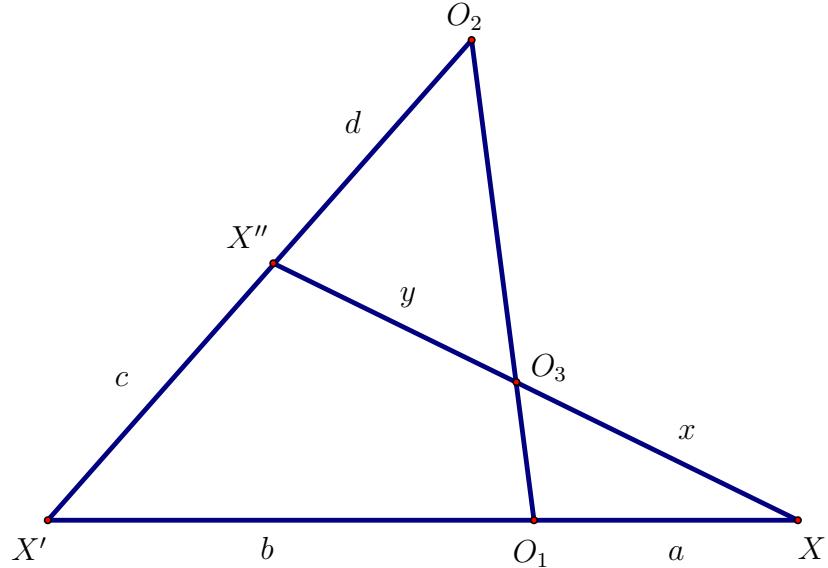


Рис. 11.32: Теорема о пропорциональных отрезках

Аналогичный геометрический смысл имеет и теорема Менелая. Действительно, имеем $H_{O_3}^{-1} \circ H_{O_2} \circ H_{O_1}^{k_1} = id$ (см. рис. 11.33). Вот почему выполнено соотношение $X''O_3/O_3X \cdot X'O_2/O_2X'' \cdot XO_1/O_1X' = 1$! Коэффициент композиции этих трех гомотетий есть единица, поскольку композиция есть тождественное преобразование!

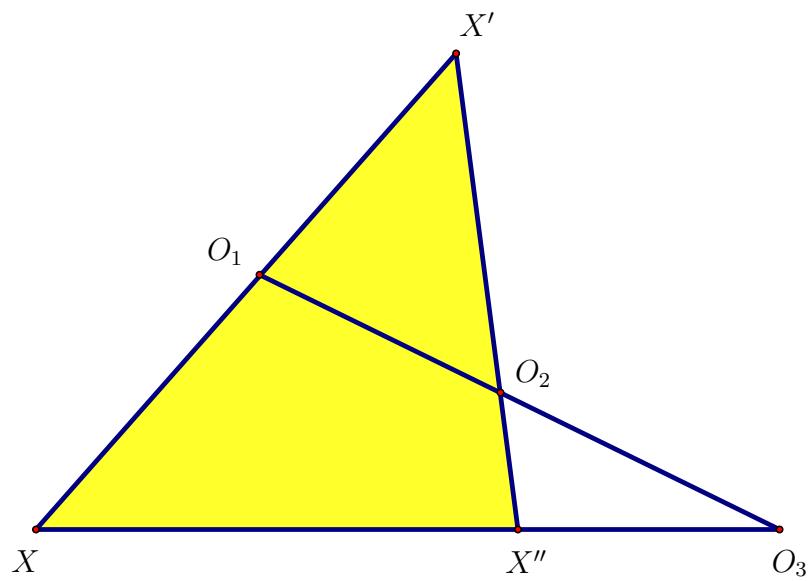


Рис. 11.33: Теорема Менелая

11.7 Гомотетия и касающиеся окружности и прямые

Цель этого раздела — подробнее разобрать ситуации, связанные с применением гомотетии в случае касающихся окружностей и прямых. Такие конфигурации выделяются особыми свойствами, к которым необходимо привыкнуть.

11.7.1 Параллельные секущие и касательные

В качестве примера применения гомотетии в конфигурациях, связанных с касающимися окружностями и прямыми, приведем такое утверждение.

Утверждение 4. *Рассмотрим две окружности, касающиеся друг друга внешним образом и касающиеся пары параллельных прямых, каждая из которых не пересекает отрезок, соединяющий центры окружностей (см. рис. 11.34). Тогда три точки касания лежат на одной прямой.*

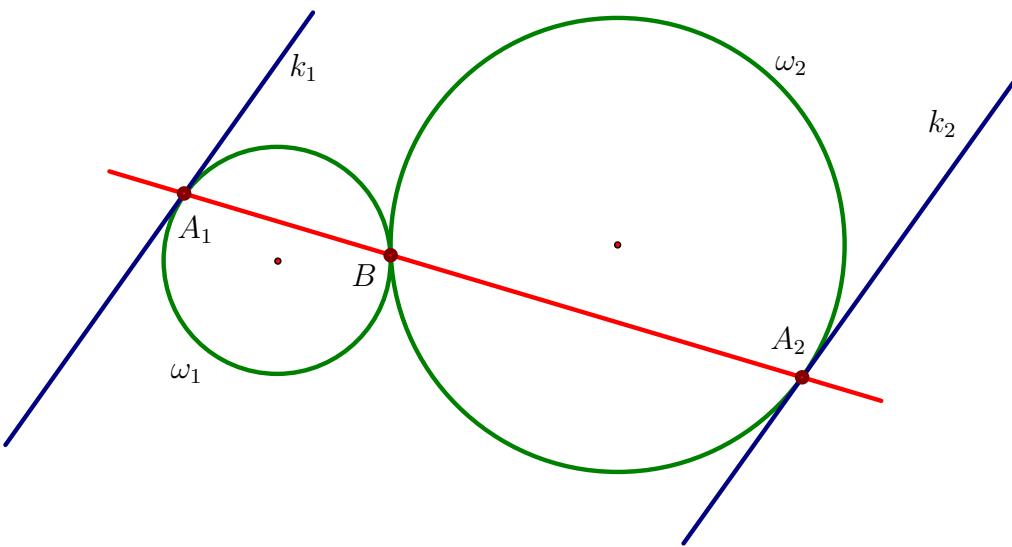


Рис. 11.34: Три точки касания на одной прямой

Доказательство. Рассуждение, которое мы проведем, типично для подобных конфигураций, поэтому постарайтесь осознать его и хорошо запомнить.

Обозначим наши окружности через ω_1 и ω_2 , точку их касания через B , точки касания с прямыми k_1 и k_2 — через A_1 и A_2 соответственно (см. рис. 11.34). Рассмотрим гомотетию H_B , переводящую ω_1 и ω_2 (как мы знаем из теоремы 1, она существует и единственна). Докажем, что $H_B(A_1) = A_2$.

Для этого рассмотрим прямую $\ell = H_B(k_1)$. Эта прямая является касательной к окружности ω_2 (т.к. касательная переходит в касательную), параллельной k_1 и k_2 и не пересекает отрезок, соединяющий центры ω_1 и ω_2 . Однако такая касательная единственна и равна k_2 . Поэтому $H_B(k_1) = k_2$ и $H_B(A_1) = A_2$ (точка касания перейдет в точку касания). \square

11.7.2 Лемма Архимеда

Мы начнем этот раздел с задачи, которая очень часто применяется в конфигурациях вместе с гомотетией.

Утверждение 5 (О параллельных секущих). *Параллельные прямые высекают на окружности равные дуги.*

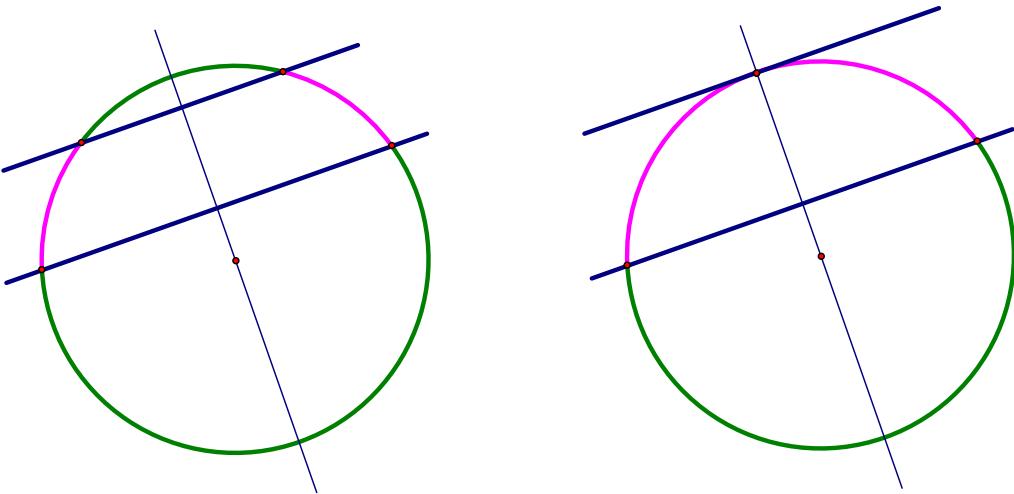


Рис. 11.35: Параллельные секущие

Доказательство. Легче всего доказать это утверждение с помощью осевой симметрии. А именно, проведем диаметр окружности, перпендикулярный нашим прямым. Тогда осевая симметрия относительно этого диаметра переводит окружность и прямые в себя. Значит, дуги, высекаемые прямыми, перейдет друг в друга, что и означает их равенство. \square

Замечание. Из равенства дуг, в частности, следует равенство хорд, стягивающих эти дуги, а также равенство вписанных углов, смотрящих на эти дуги.

Отдельно отметим рис. 11.35 справа. Такая вырожденная ситуация (концы дуг склеиваются) часто возникает на практике, однако ее тяжело заметить. Будьте внимательны!

Перейдем теперь к ключевому утверждению, связанному с касающимися окружностями и прямыми.

Теорема 10 (лемма Архимеда). *Рассмотрим окружности ω_1 и ω_2 , касающиеся в точке A . Проведем к окружности ω_1 касательную ℓ в точке L , которая пересекает окружность ω_2 в точках B и C . Тогда прямая AL делит пополам дугу \widehat{BC} .*

Замечание. Более часто встречается случай внутреннего касания окружностей (см. рис. 11.36 слева), однако и внешнее касание тоже возможно (см. рис. 11.36 справа).

В случае внутреннего касания можно переформулировать лемму Архимеда так: отрезок AL является биссектрисой треугольника ABC .

Доказательство. Рассмотрим гомотетию H_A , переводящую окружность ω_1 в окружность ω_2 . Тогда касательная ℓ к окружности ω_1 перейдет в касательную k к окружности ω_2 (касательная переходит в параллельную касательную). Но параллельные прямые высекают на окружности равные дуги. Поэтому, применяя утверждение 11.10 к окружности ω_1 и прямым k и ℓ , получаем требуемое. \square

Замечание. Обратите внимание, что лемма Архимеда есть просто обобщение утверждения 4.

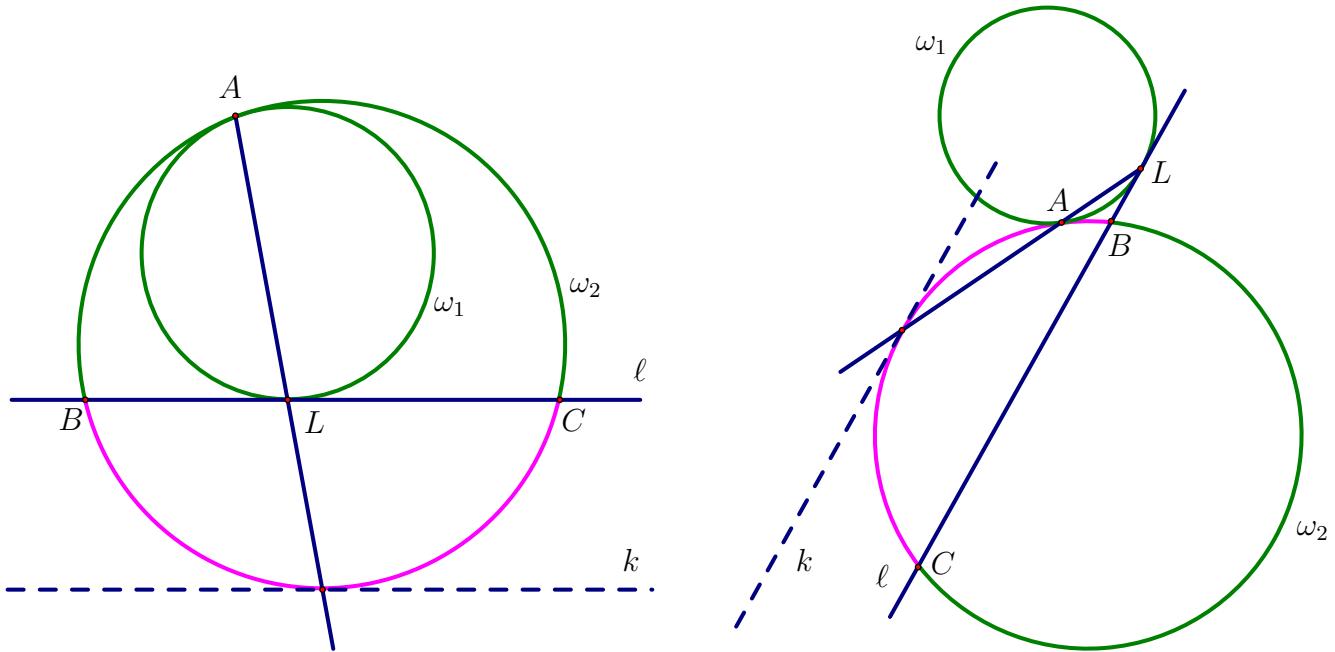


Рис. 11.36: Лемма Архимеда

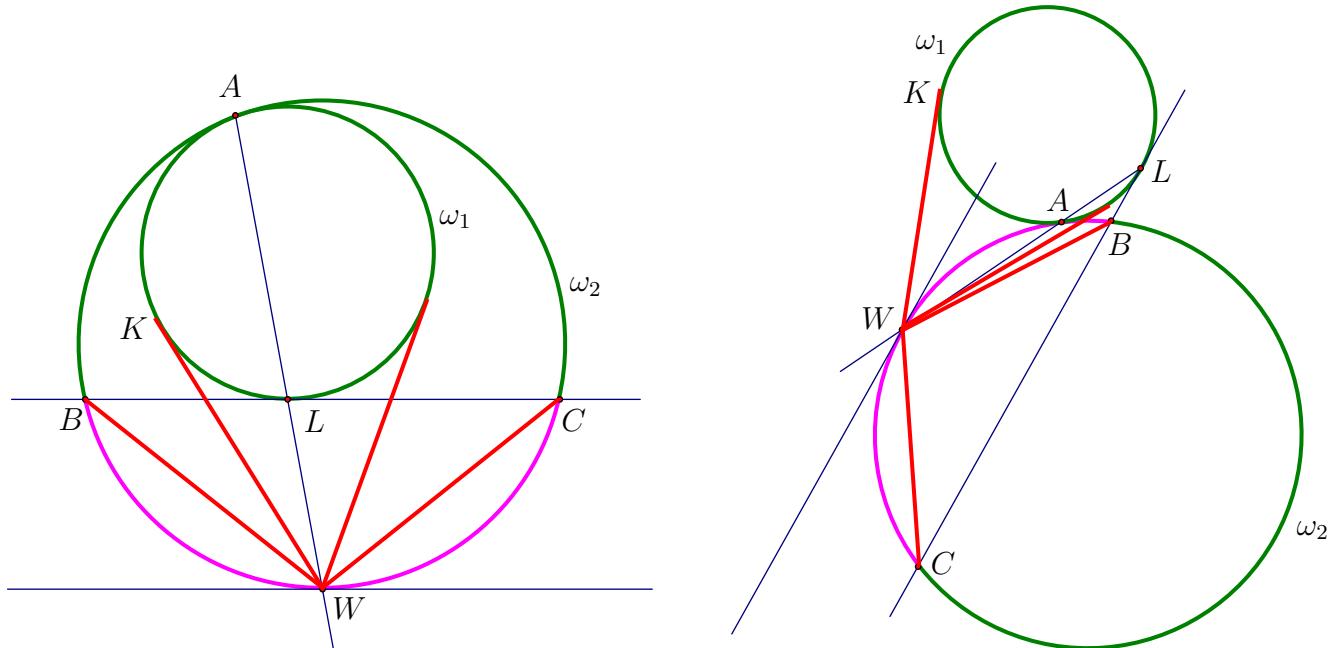


Рис. 11.37: Теорема о трезубце

Следствие (Обобщенная теорема о трезубце). Пусть W — середина дуги $\smile BC$. Проведем касательную WK к окружности ω_1 . Тогда $WB = WC = WK$.

Доказательство. Заметим, что $\angle BAW = \angle CAW = \angle CBW$, поэтому треугольники BLW и ABW подобны. Из этого подобия и теоремы о квадрате касательной получаем:

$$\frac{BW}{WL} = \frac{AW}{BW} \Rightarrow BW^2 = WL \cdot WA = WK^2 \Rightarrow WB = WK.$$

Равенство $WB = WC$ следует из утверждения о параллельных секущих. \square

11.7.3 Одна задача с IMO

В качестве яркого (хотя и далеко не единственного) применения леммы Архимеда мы сейчас решим задачу с Международной математической олимпиады (IMO), предлагавшейся в 1972 г.

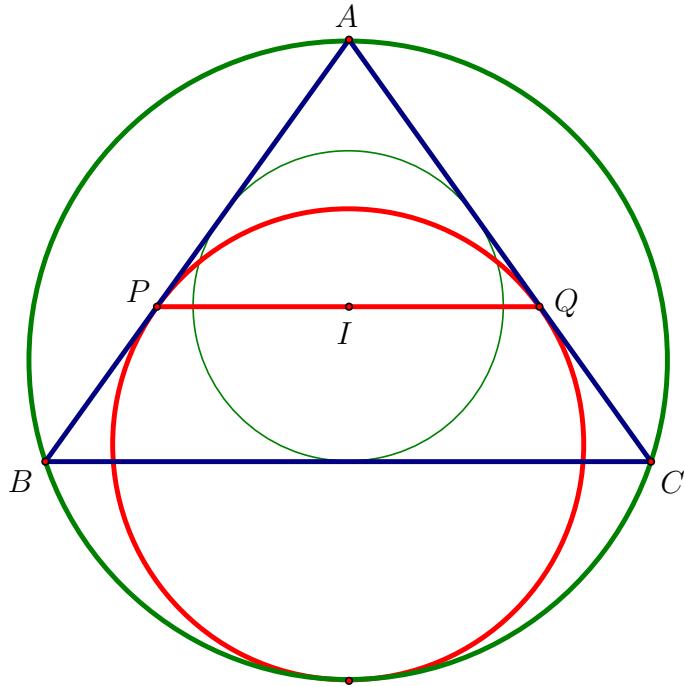


Рис. 11.38: Три окружности

Задача 11.8. Рассмотрим равнобедренный треугольник ABC и опишем вокруг него окружность Ω . Пусть ω — это окружность, касающаяся боковых сторон AB и AC этого треугольника в точках P и Q и его описанной окружности. Докажите, что середина отрезка PQ — это центр вписанной окружности треугольника ABC .

Отметим, что на самом деле условие равнобедренности треугольника ABC излишне: см. рис. 11.39

Задача 11.9. (*) Докажите утверждение задачи 11.8 в случае произвольного треугольника.

11.8 Теорема Дезарга

Мы достаточно детально изучили взаимодействие гомотетии с окружностями. Однако взаимодействие гомотетии с прямыми все же оставалось на вторых ролях. Вместе с тем нередко встречаются конструкции с прямыми, в которых только гомотетия может вскрыть причину явления. В первую очередь речь пойдет о конструкции, с которой мы уже сталкивались (см. рис. 8.5 — 8.9): треугольники с параллельными сторонами.

Оказывается, существует очень мощная теорема, связанная с параллельными прямыми, которая в том числе позволит нам получить результаты, далеко обобщающие теорему о прямой Эйлера.

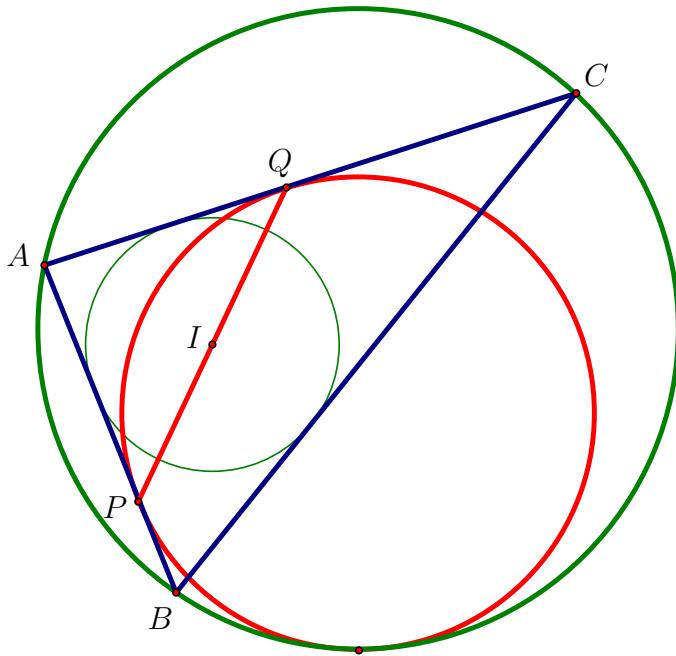


Рис. 11.39: Три окружности

11.8.1 Формулировка и доказательство

Теорема 11 (Дезарг). *Рассмотрим пару треугольников $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ с попарно параллельными сторонами. Тогда эти треугольники гомотетичны, причем гомотетия, переводящая один треугольник в другой, единственна.*

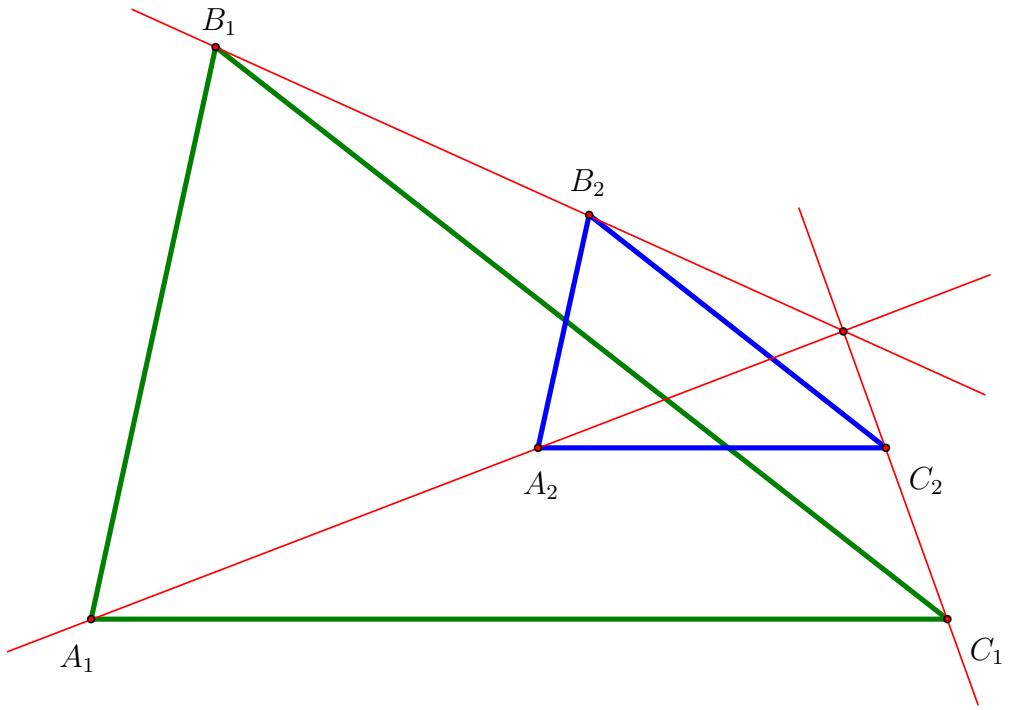


Рис. 11.40: Теорема Дезарга: гомотетия с положительным коэффициентом

Замечание. Здесь мы считаем, что если треугольники совмещаются параллельным переносом, то они гомотетичны с центром в бесконечно удаленной точке.

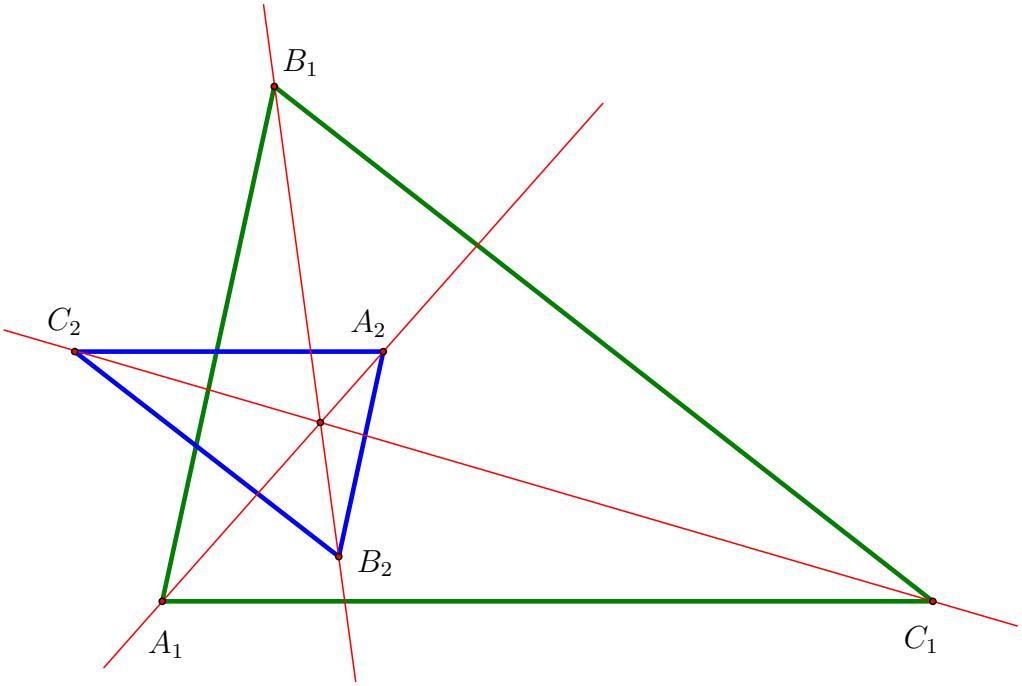


Рис. 11.41: Теорема Дезарга: гомотетия с отрицательным коэффициентом

Доказательство. Выберем нумерацию вершин треугольников таким образом, чтобы $A_1B_1 \parallel A_2B_2$, $B_1C_1 \parallel B_2C_2$ и $A_1C_1 \parallel A_2C_2$. Существует единственная гомотетия H , такая что $H(A_1) = A_2$ и $H(B_1) = B_2$ (ее центр — пересечение прямых A_1A_2 и B_1B_2). Тогда $H(A_1C_1) = (A_2C_2)$ и $H(B_1C_1) = (B_2C_2)$, поскольку точка тащит за собой всю прямую. В таком случае $H(C_1) = C_2$ (точка пересечения C_1 переходит в точку пересечения C_2). \square

Следствие. В условиях теоремы прямые A_1A_2 , B_1B_2 и C_1C_2 пересекаются в одной точке или параллельны.

Замечание. Отметим, что теорема Дезарга является обобщением теоремы 6 о гомотетичности двух окружностей на случай треугольников. Однако теореме Дезарга существенно, что речь идет именно о треугольниках; ее аналог уже для четырехугольников неверен. Напомним, что равенство углов у четырехугольников не влечет их подобия!

11.8.2 Птолемеева ось треугольника

Именно теорема Дезарга позволит нам провести полное исследование конфигурации рисунков 8.7-8.9 и ответить на поставленные тогда вопросы.

Напомним, что на этой картинке треугольник ABC — заданный, точки I_A , I_B , I_C — центры его вневписанных окружностей, точки W_A , W_B , W_C (соответственно W^A , W^B , W^C) — точки пересечения биссектрис внутренних (соответственно внешних) углов треугольника ABC с его описанной окружностью, а точки A_1 , B_1 , C_1 — точки касания вписанной окружности треугольника ABC с его сторонами.

Напомним следующую задачу.

Задача 11.10. Стороны треугольников $A_1B_1C_1$, $W_AW_BW_C$, $W^AW^BW^C$, $I_AI_BI_C$ попарно параллельны.

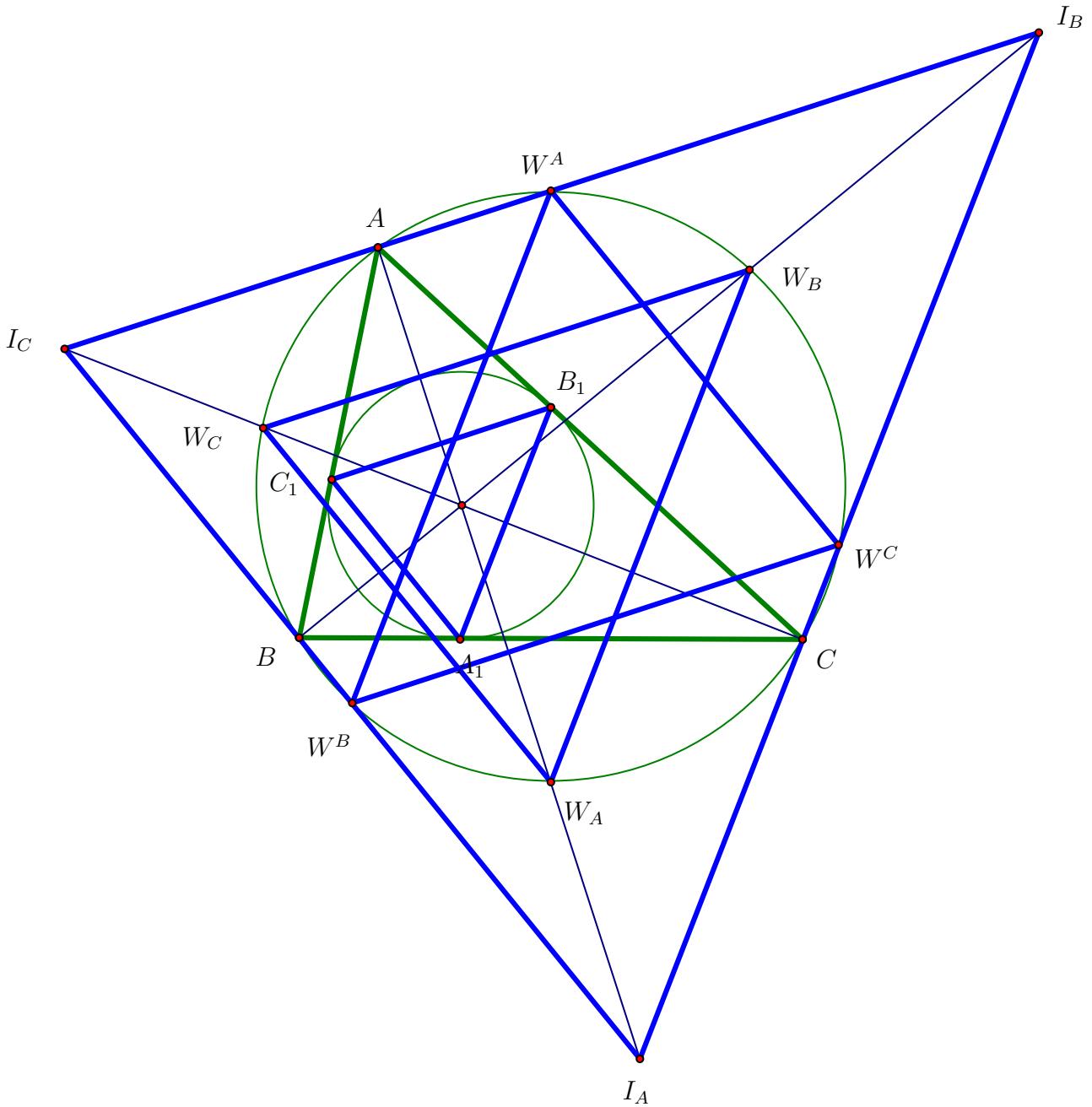


Рис. 11.42: Четыре гомотетичных треугольника

Теорема 12 (Птолемеева ось). Центры гомотетий всех пар треугольников из утверждения 11.10 лежат на одной прямой.

Эту прямую мы будем называть *Птолемеевой осью* треугольника ABC .

Доказательство этой теоремы мы разобьем на несколько шагов.

Утверждение 6. Рассмотрим три треугольника с попарно параллельными сторонами. Тогда центры гомотетий всевозможных пар этих треугольников лежат на одной прямой.

Замечание. Это утверждение является ни чем иным, как аналогом теоремы о трех колпаках для треугольников!

Доказательство. Рассмотрим произвольные три треугольника Δ_1 , Δ_2 и Δ_3 с попарно параллельными сторонами, разобьем их на три пары и построим три соответствующих этим парам гомотетии H_1 , H_2 , H_3 (они существуют и единственны согласно утверждению 11.10; здесь $H_1(\Delta_2) = \Delta_3$, $H_2(\Delta_3) = \Delta_1$ и $H_3(\Delta_2) = \Delta_1$).

Докажем, что центры гомотетий H_1 , H_2 , H_3 лежат на одной прямой. В самом деле, рассмотрим композицию $H_2 \circ H_1$. Согласно теореме 8 эта композиция также является гомотетией, причем центр лежит на одной прямой с центрами гомотетий H_1 и H_2 . Заметим, что $(H_2 \circ H_1)(\Delta_2) = \Delta_1$, поэтому в силу теоремы Дезарга $H_2 \circ H_1 = H_3$ (гомотетия, совмещающая треугольники Δ_2 и Δ_1 , единственна). Значит, центры гомотетий H_1 , H_2 , H_3 лежат на одной прямой. \square

Теперь рассмотрим центры гомотетий, совмещающих пары треугольников из условия теоремы о Птолемеевой оси.

- Треугольники $W_A W_B W_C$ и $W^A W^B W^C$ центрально-симметричны относительно центра O описанной окружности треугольника ABC .
- Треугольники $W_A W_B W_C$ и $I_A I_B I_C$ гомотетичны относительно центра I вписанной окружности треугольника ABC .
- Треугольники $I_A I_B I_C$ и $W^A W^B W^C$ гомотетичны относительно точки пересечения медиан M_I треугольников $I_A I_B I_C$ и $W^A W^B W^C$ (напомним, что согласно замечанию 11.3, у них общая точка пересечения медиан).
- Треугольники $A_1 B_1 C_1$ и $W_A W_B W_C$ гомотетичны относительно точки W_1 .
- Треугольники $A_1 B_1 C_1$ и $W^A W^B W^C$ гомотетичны относительно точки W^1 .
- Треугольники $A_1 B_1 C_1$ и $I_A I_B I_C$ гомотетичны относительно точки I_1 .

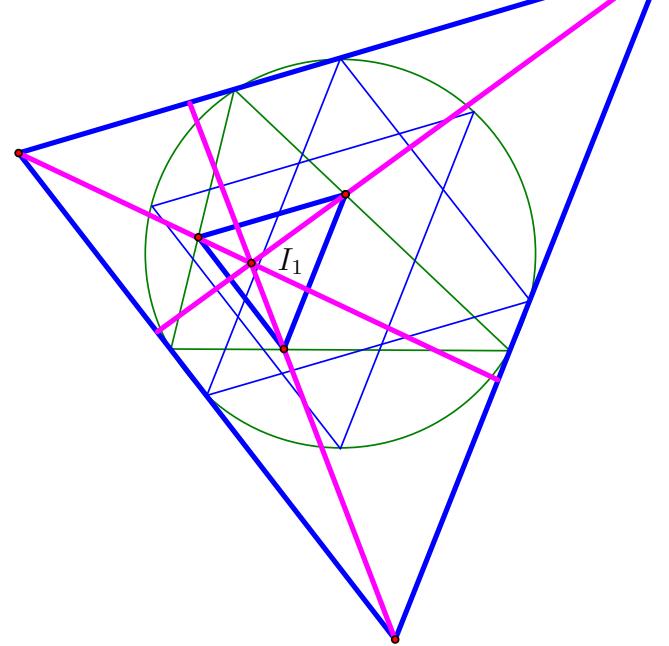
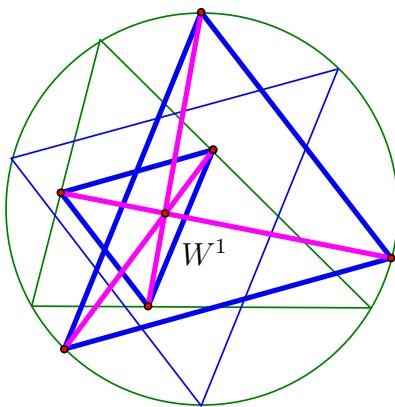
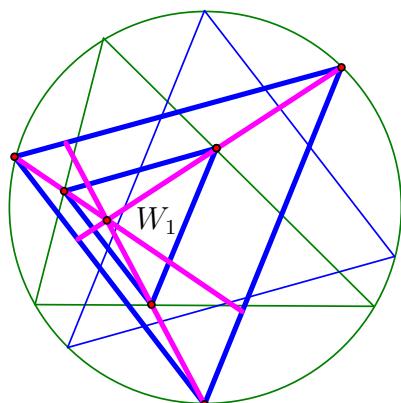
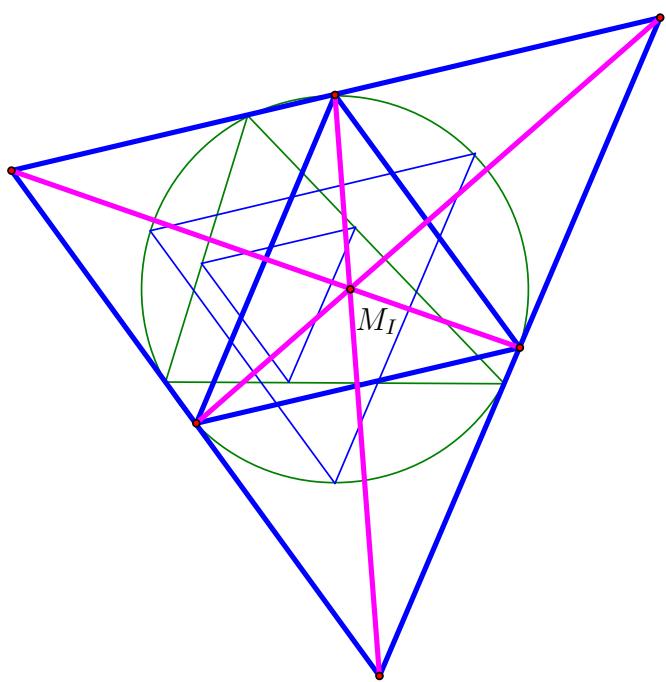
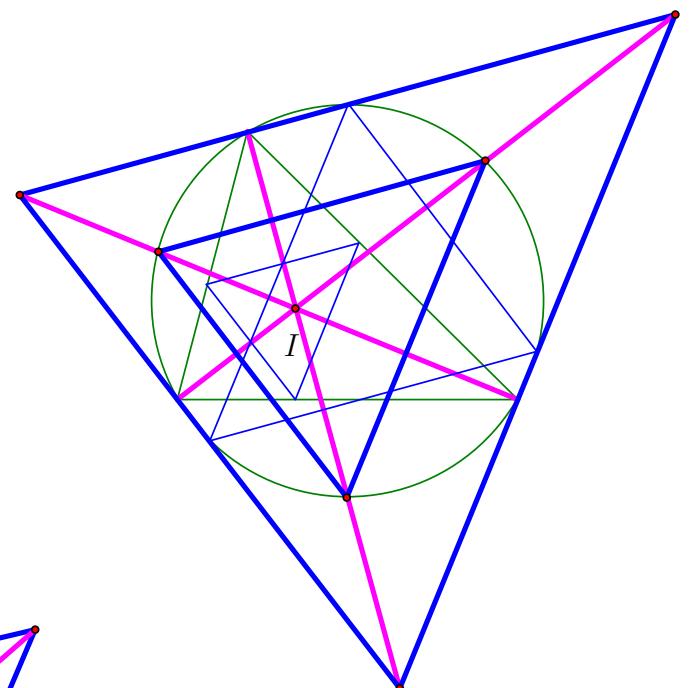
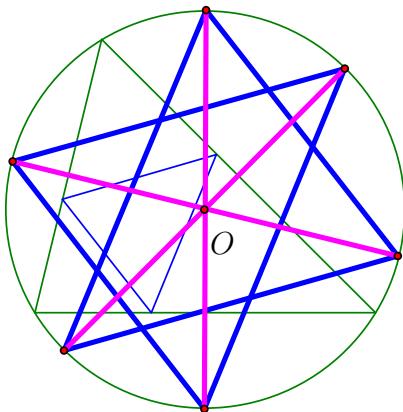
Будем постепенно усаживать эти точки на одну прямую.

Задача 11.11. Докажите, что точки I , O , M_I лежат на одной прямой.

Задача 11.12. Докажите, что точки I , O , W_1 , W^1 лежат на одной прямой.

Задача 11.13. Докажите, что точки I_1 , I , W_1 лежат на одной прямой.

Суммируя результаты, получаем, что точки I , O , M_I , W_1 , W^1 , I_1 лежат на одной прямой.



Оказывается, на эту прямую можно поместить и ряд других замечательных точек. Приведем лишь один пример.

Задача 11.14. Докажите, что ортоцентр H_1 треугольника $A_1B_1C_1$ лежит на Птолемеевой оси.

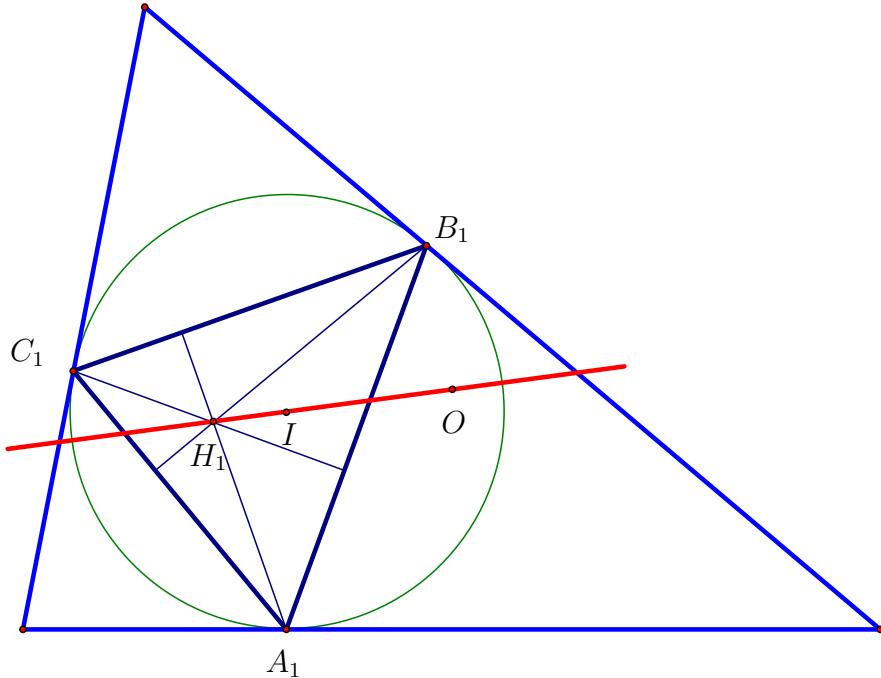


Рис. 11.43: Ортоцентр треугольника $A_1B_1C_1$

Проделанная нами работа в предыдущем разделе помогает найти другое, более короткое доказательство теоремы о Птолемеевой оси. Для этого сформулируем теорему 12 по-другому.

Теорема 13. У треугольников $A_1B_1C_1$, $W_AW_BW_C$, $W^AW^BW^C$ и $I_AI_BI_C$ общая прямая Эйлера.

Доказательство. Разумеется, доказательство этой теоремы фактически уже получено нами в предыдущем разделе (достаточно найти среди тех семи точек на Птолемеевой оси те, которые заведомо лежат на прямой Эйлера того или иного треугольника; например, точки I и H_1 лежат на прямой Эйлера треугольника $A_1B_1C_1$, и т.д.). Однако мы дадим другое доказательство, более короткое, из которого, в частности, будет следовать и теорема 12 о Птолемеевой оси.

Рассмотрим прямые Эйлера указанных в теореме треугольников. Поскольку любые два треугольника гомотетичны, их прямые Эйлера параллельны или совпадают (при гомотетии прямая Эйлера переходит в прямую Эйлера!). Но

- прямые Эйлера треугольников $A_1B_1C_1$ и $W_AW_BW_C$ пересекаются в точке I (центр описанной окружности и ортоцентр);
- прямые Эйлера треугольников $W_AW_BW_C$, $W^AW^BW^C$ и $I_AI_BI_C$ пересекаются в точке O (центр описанной окружности, центр описанной окружности, центр окружности Эйлера).

Значит, прямые Эйлера этих треугольников на самом деле совпадают. \square

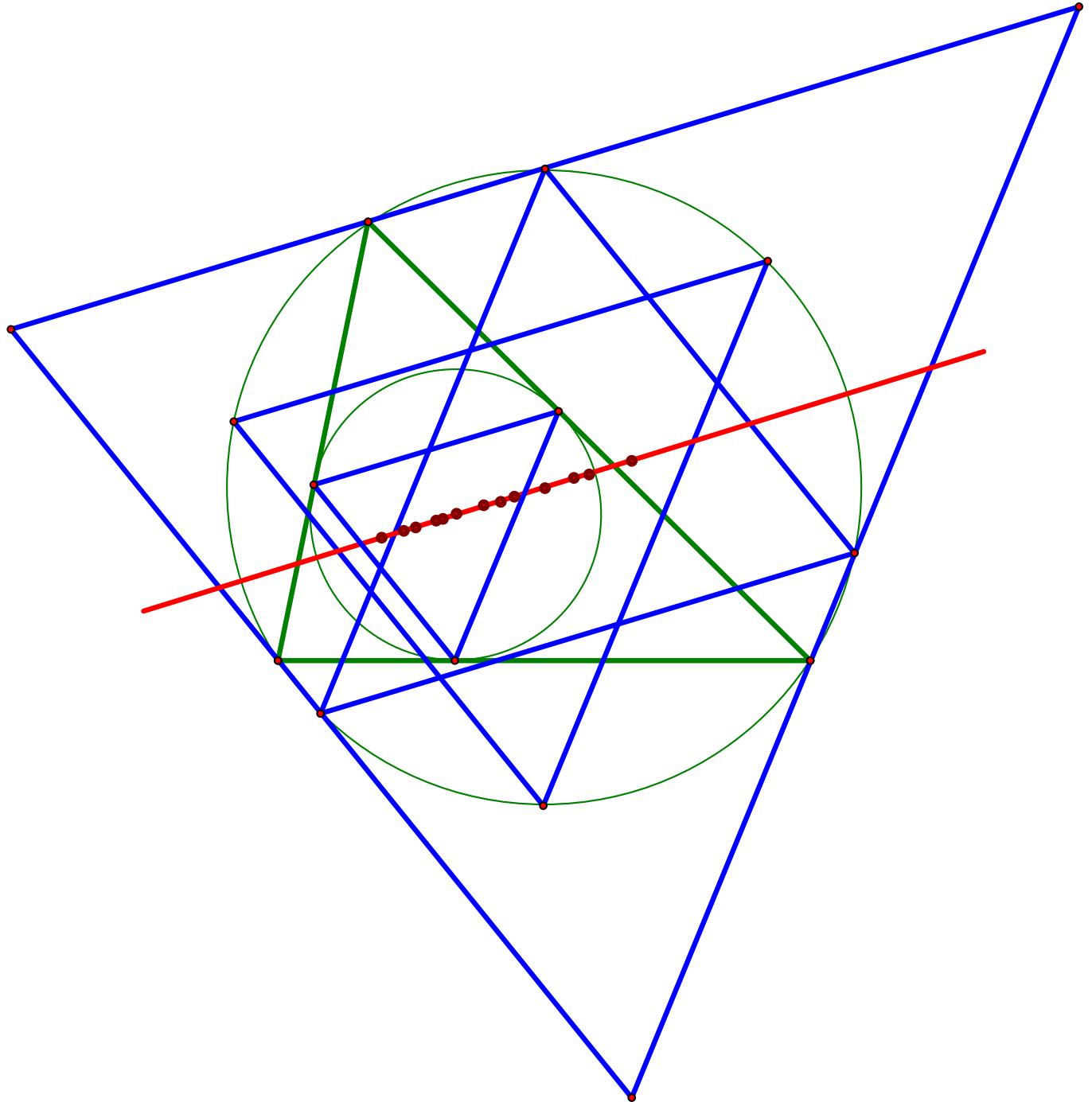


Рис. 11.44: Птолемеева ось треугольника

Следствие. На Птолемеевой оси лежат также центр O_I описанной окружности треугольника $I_A I_B I_C$ (он же ортоцентр H^W треугольника $W^A W^B W^C$), ортоцентр H_1 треугольника $A_1 B_1 C_1$, центры E_W, E^W, E_1 окружностей Эйлера треугольников $W_A W_B W_C, W^A W^B W^C, A_1 B_1 C_1$ соответственно, точки M_W, M_1 пересечения медиан треугольников $W_A W_B W_C$ и $A_1 B_1 C_1$ соответственно.

Замечание. Поскольку гомотетии, переводящие рассматриваемые четыре треугольника друг в друга, сохраняют Птолемееву ось, то их центры также лежат на ней. Поэтому на Птолемееву ось попадают и точки I, O, M_I, W_1, W^1, I_1 . Таким образом, мы смогли посадить на одну прямую 13 (!!!) замечательных точек!

Решение задач главы 11

11.1 Рассмотрим трапецию $ABCD$, точку E пересечения боковых сторон, точку F пересечения диагоналей и середины M и N оснований. Сначала докажем, что точки E, M и N лежат на одной прямой.

Рассмотрим гомотетию с центром в точке E , переводящую B в A . Тогда, как уже было доказано, точка B потянет за собой весь отрезок BC , поэтому BC перейдет в AD . Но тогда середина BC перейдет в середину AD . Значит, $H_E(M) = N$. По определению гомотетии это означает, что точки E, M и N лежат на одной прямой.

Доказательство для тройки F, M, N аналогично. Поскольку обе эти прямые имеют общие точки M и N , то это на самом деле одна прямая, на которой лежат все четыре точки.

11.2 Рассмотрим треугольник $A_M B_M C_M$, который мы использовали для доказательства теоремы о пересечении высот (см. рис. 11.11). Напомним, что строится этот треугольник следующим образом. Через каждую вершину треугольника ABC проводится прямая, параллельная противоположной стороне. Точки пересечения этих прямых и образуют нулевой треугольник $A_M B_M C_M$.

Как мы уже знаем, треугольник ABC является серединным для треугольника $A_M B_M C_M$ (т.е. точки A, B, C являются серединами сторон $B_M C_M, C_M A_M, A_M B_M$ соответственно), а точка H пересечения высот треугольника ABC является центром описанной окружности треугольника $A_M B_M C_M$.

Применим наше утверждение 2 к треугольникам ABC и $A_M B_M C_M$. А именно, эти треугольники гомотетичны с центром в точке M пересечения медиан треугольника ABC (обратите внимание, согласно замечанию 11.3, точки пересечения медиан двух наших треугольников совпадают, поэтому мы можем выбрать точку пересечения медиан маленького треугольника, а не большого; это для нас удобнее): $H_M^{-2}(\Delta ABC) = \Delta A_M B_M C_M$. Но тогда описанная окружность треугольника ABC перейдет в описанную окружность треугольника $A_M B_M C_M$ (вершины A, B, C — в вершины A_M, B_M, C_M , поэтому окружность, проходящая через вершины A, B, C — в окружность, проходящую через вершины A_M, B_M, C_M). Но тогда центр O первой окружности перейдет в центр H второй окружности (окружность — в окружность, значит, центр — в центр). Поэтому $H_M^{-2}(O) = H$. Это и означает, что точки H, M, O лежат на одной прямой, и M делит HO в отношении 2 : 1, считая от точки H (по определению гомотетии).

11.3 В самом деле, $H_M^{-2}(M_A) = A$ и $H_M^{-2}(M_B) = B$ согласно утверждению 2, а $H_M^{-2}(O) = H$ согласно теореме 11.2 (см. рис. 11.12).

11.4 Заметим, что эта теорема есть точная копия предыдущей, с точностью до перенумерации вершин! Сравните рисунки 11.11 и 11.13 (мы даже изменили форму треугольника ABC , чтобы сходство стало более явным)! Поэтому доказательство предыдущей теоремы мгновенно переносится сюда. А именно, рассмотрим гомотетию H_M^{-2} (а вот здесь точка M — это точка пересечения медиан большого треугольника ABC , который в данном случае является аналогом треугольника $A_M B_M C_M$; но замечание 11.3 позволяет не заботиться о том, точка пересечения медиан какого треугольника здесь рассматривается). Тогда $H_M^{-2}(\Delta M_A M_B M_C) = \Delta ABC$. Поэтому описанная окружность треугольника $M_A M_B M_C$ при гомотетии H_M^{-2} перейдет в описанную окружность треугольника ABC . Значит, центр E перейдет в центр O : $H_M^{-2}(E) = O$. По определению гомотетии это и означает, что точки M, E и O лежат на одной прямой и $MO : ME = 2 : 1$.

11.5 Доказательство I.

Поскольку гомотетия переводит центр в центр, а модуль коэффициентов наших гомотетий равен отношению радиусов, то

$$\frac{AO_2}{AO_1} = \frac{r_2}{r_1} = \frac{PO_2}{PO_1} \quad \text{и} \quad \frac{BO_2}{BO_1} = \frac{r_2}{r_1} = \frac{PO_2}{PO_1}.$$

Согласно основному свойству биссектрисы треугольника, это означает, что PA и PB — биссектрисы.

Доказательство II.

Рассмотрим образ $P' = H_B^{k_2}(P)$. Тогда $\angle O_1 PB = \angle BP' O_2$ (гомотетия переводит угол в равный ему угол) и $\angle BP' O_2 = \angle BPO_2$ (поскольку треугольник $PP' O_2$ равнобедренный). Отсюда следует, что $\angle O_1 PB = \angle O_2 PB$.

Доказательство для биссектрисы PA аналогично.

11.6 Доказательство следует напрямую из свойств гомотетии. Действительно, гомотетия переводит центр в центр, а модуль коэффициентов наших гомотетий равен отношению радиусов, то для любой точки P , лежащей на окружности с диаметром AB , имеем

$$\frac{AO_2}{AO_1} = \frac{r_2}{r_1} = \frac{PO_2}{PO_1} \quad \text{и} \quad \frac{BO_2}{BO_1} = \frac{r_2}{r_1} = \frac{PO_2}{PO_1}.$$

Поэтому окружность с диаметром AB является окружностью Аполлония $Apoll(O_1, O_2)$ по определению.

11.8 Решение I.

Обозначим через K точку касания окружностей Ω и ω . Тогда по лемме Архимеда $\angle BKP = \angle AKP$. Далее, обозначим через I точку пересечения отрезков PQ и AK . Четырехугольник $BPIK$ является вписанным, поскольку $\angle ABK = \angle PIK = 90^\circ$. Отсюда

$$\angle ABI = \angle PKI = \angle BKA/2 = \angle ABC/2$$

(последнее равенство следует из стандартного подобия прямоугольных треугольников). Значит, BI — биссектриса угла ABC . Аналогично, CI — биссектриса угла ACB . Значит, точка I — это точка пересечения биссектрис треугольника ABC , что и требовалось доказать.

Решение II.

Пусть I — середина отрезка PQ . Тогда $\omega = Apoll(A, I)$. Поэтому точка касания окружностей ω и Ω есть точка I_A для треугольника APQ . $I_A = W_A$, где W_A — точка W для треугольника ABC . Имеем $BI_A = CI_A = IA$, откуда по теореме о лапке получаем, что I — центр вписанной окружности треугольника ABC .

11.11 В самом деле, I — точка пересечения высот треугольника $I_AI_BI_C$, O — центр его окружности Эйлера, M_I — точка пересечения его медиан. Поэтому все три эти точки лежат на прямой Эйлера треугольника $I_AI_BI_C$.

11.12 Рассмотрим гомотетию с центром в точке W_1 , переводящую треугольник $A_1B_1C_1$ в треугольник $W_AW_BW_C$. Тогда центр I описанной окружности треугольника $A_1B_1C_1$ перейдет в центр O описанной окружности треугольника $W_AW_BW_C$. Поэтому точки W_1 , I , O лежат на одной прямой.

Аналогично, применяя гомотетию с центром в точке W^1 , переводящую треугольник $A_1B_1C_1$ в треугольник $W^AW^BW^C$, получаем, что точки W^1 , I , O лежат на одной прямой.

Поскольку точки I , O для этих двух прямых общие, то они совпадают.

11.13 Для доказательства достаточно применить лемму 6 к тройке треугольников $A_1B_1C_1$, $W_AW_BW_C$, $I_AI_BI_C$.

11.14 Мы докажем, что точки I , W_1 и H_1 лежат на одной прямой. В самом деле, рассмотрим треугольники $A_1B_1C_1$ и $W_AW_BW_C$ и гомотетию, переводящую один в другой. Тогда точка пересечения высот H_1 треугольника $A_1B_1C_1$ перейдет в точку пересечения высот I треугольника $W_AW_BW_C$. Значит, точки I , W_1 и H_1 действительно лежат на одной прямой.