

ЧЕВА И МЕНЕЛАЙ, ЖЕРГОНН И НАГЕЛЬ, ГОМОТЕТИЯ И СИМЕДИАНА

П. В. Бибииков¹

1. Введение

В курсе 7 и 8 классов мы не раз встречались с *замечательными точками в треугольнике* — точками пересечения медиан, высот, биссектрис, серединных перпендикуляров, ... Вообще говоря, замечательных точек, т.е. точек пересечения трех *чевуан* (отрезков, соединяющих вершины треугольника с точками на противоположных сторонах), очень много. Существует целая энциклопедия замечательных точек в треугольнике, которую можно найти по ссылке <http://faculty.evansville.edu/ck6/encyclopedia/ETC.html>. Количество замечательных точек в ней уже перевалило за 14 тысяч (!). В нашем же курсе замечательные точки возникали крайне редко, и появление каждой новой точки было целым событием:

- точка пересечения биссектрис появилась при рассмотрении ГМТ;
- точка пересечения медиан возникла как следствие теоремы о средней линии треугольника;
- точка пересечения высот связана с центром описанной окружности «нулевого» треугольника (а в 8 классе мы установили более тесную связь между ними с помощью гомотетии).

Если замечательных точек существует так много, то, по всей видимости, существуют и какие-то общие приемы, позволяющие находить эти точки и исследовать их. О некоторых таких приемах и пойдет речь в данной статье. К числу основных можно отнести следующие:

- теоремы Менелая и Чева;
- изогональное сопряжение;
- гомотетия.

О гомотетии мы уже довольно много знаем из курса 8 класса (в частности, применение гомотетии для доказательства теорем о прямой и окружности Эйлера, теоремы Дезарга и Птолемеевой оси треугольника). А вот теоремы Менелая и Чева и изогональное сопряжение нам раньше не встречались. Им мы и уделим основное внимание.

2. Теорема о пропорциональных отрезках в треугольнике и Менелай

Мы начнем наш путь с утверждения, полезного для решения различных «вычислительных задач», в которых идет речь об отношениях длин отрезков. Пока что отношения длин нам встречались либо в подобных треугольниках, либо в конфигурациях с биссектрисами (в частности, в окружности Аполлония). Однако, как оказывается, существует конструкция, в которой отношения длин отрезков появляются из совершенно иных соображений.

¹Лицей «Вторая школа»; e-mail tsdtp4u@proc.ru

Теорема 1 (О пропорциональных отрезках в треугольнике). *Рассмотрим произвольный угол с вершиной в точке O и два пересекающихся в точке P отрезка AC и BD с концами на сторонах угла (см. рис. 1). Пусть² $AB = a$, $BO = b$, $OC = c$ и $CD = d$, а также $AP = x$ и $CP = y$. Тогда*

$$\frac{x}{y} = \frac{a}{b} \left(\frac{c}{d} + 1 \right).$$

2.1. Два доказательства

Мы дадим сразу два доказательства этой теоремы. Первое использует теорему о пропорциональных отрезках и является вычислительным, а второе связано с теоремой о композиции гомотетий (!).

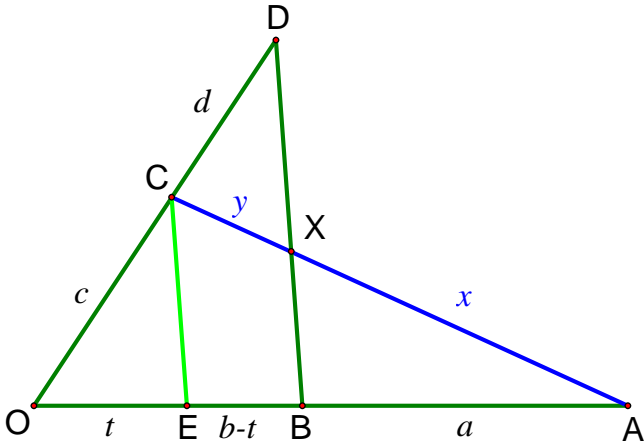


Рис. 1.

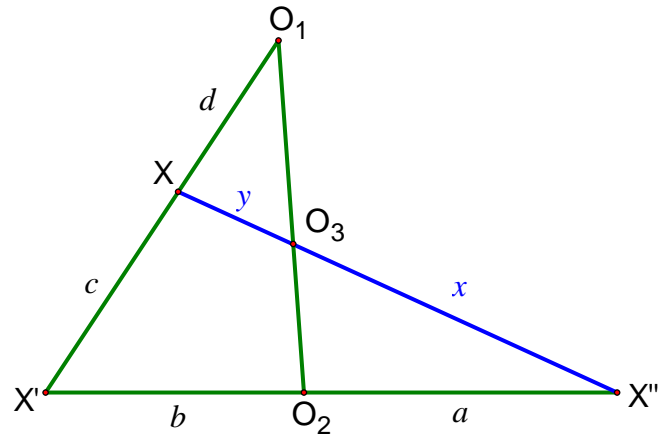


Рис. 2.

Первое доказательство. Проведем отрезок CE , параллельный BD . Тем самым мы создаем две конфигурации для теоремы о пропорциональных отрезках: угол $\angle BOD$ и прямые CE и BCD , а также угол $\angle CAO$ и прямые CE и BX (см. рис. 1). Полагая $OE = t$, мы получаем следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{c}{d} = \frac{t}{b-t} \\ \frac{x}{y} = \frac{a}{b-t}. \end{cases}$$

Выражая из первого уравнения переменную t , получаем $t = \frac{bc}{c+d}$. Подставляя это выражение по второе уравнение, после преобразований получаем требуемую формулу. \square

Второе доказательство. Приглядевшись внимательнее к рис. 2, можно заметить, что он очень похож на рисунок из доказательства теоремы о композиции гомотетий. Давайте рассмотрим гомотетии $H_{O_1}^{k_1}$ и $H_{O_2}^{k_2}$, такие, что $H_{O_1}^{k_1}(X) = X'$ и $H_{O_2}^{k_2}(X') = X''$. Тогда

$$(H_{O_2}^{k_2} \circ H_{O_1}^{k_1})(X) = X''$$

²Запомнить эти обозначения и дальнейшую формулу можно так. Мы выбираем точку, из которой исходит нужный нам отрезок, и обходим угол по контуру, начиная с этой точки.

. С другой стороны, из теоремы о композиции гомотетий следует, что $H_{O_2}^{k_2} \circ H_{O_1}^{k_1} = H_{O_3}^{k_3}$, причем центр O_3 является точкой пересечения прямых O_1O_2 и XX'' , а коэффициент k_3 равен произведению коэффициентов k_1 и k_2 . С другой стороны, очевидно, что $k_1 = (c + d)/c = c/d + 1$ и $k_2 = -a/b$. Поэтому

$$-\frac{x}{y} = k_3 = k_1k_2 = -\frac{a}{b}\left(\frac{c}{d} + 1\right),$$

что и требовалось доказать. □

2.2. Теорема Менелая и связь с биссектрисами

Кажется, что теорема о пропорциональных отрезках в треугольнике не может быть полезна для доказательства «чисто геометрических» (т.е. не вычислительных) теорем. Однако это не так. По сути теорема о пропорциональных отрезках эквивалентна одной из самых знаменитых теорем античной геометрии, принадлежащей Менелаяу.

Теорема 2 (Менелай). *Рассмотрим треугольник ABC и точки A_1 , B_1 и C_1 , лежащие на прямых BC , AC и AB соответственно. Тогда точки A_1 , B_1 и C_1 лежат на одной прямой, если и только если³*

$$\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1. \quad (1)$$

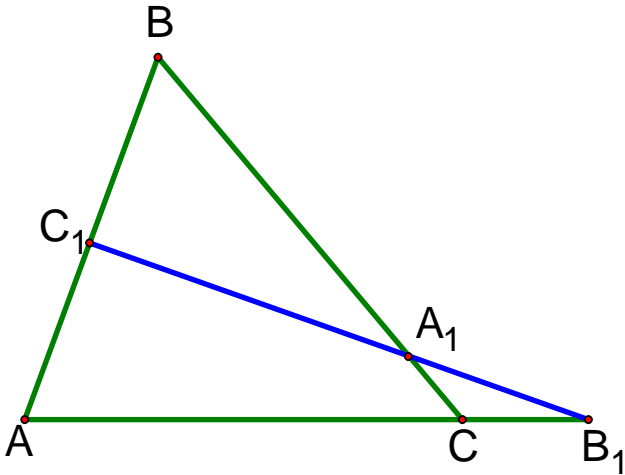


Рис. 3.

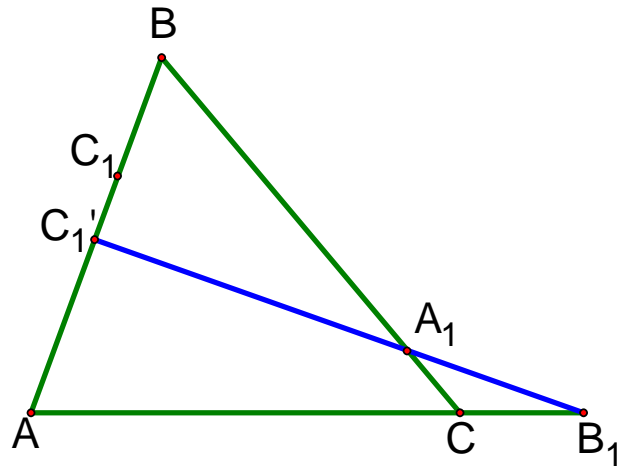


Рис. 4.

Доказательство. Сначала докажем, что если точки A_1 , B_1 и C_1 лежат на одной прямой, то выполнено соотношение (1). Для этого применим теорему о пропорциональных отрезках к углу $\angle BAC$ и отрезкам BC и C_1B_1 , причем отсчет будем вести от точки B (см. рис. 3). Имеем:

$$\frac{BA_1}{A_1C} = \frac{BC_1}{C_1A} \cdot \left(\frac{AC}{B_1C} + 1\right) = \frac{BC_1}{C_1A} \cdot \frac{AB_1}{B_1C}.$$

Переносим все в правую часть, получаем формулу (1).

Обратно, предположим, что для трех точек A_1 , B_1 и C_1 выполнено соотношение (1), но при этом они не лежат на одной прямой. Тогда проведем прямую A_1B_1 , пересекающую отрезок AB

³Как и в случае с теоремой о пропорциональных отрезках в треугольнике, эту формулу удобно запоминать так. Берем вершину треугольника и начинаем обходить его по контуру, записывая отрезки от вершин до точек A_1 , B_1 и C_1 последовательно то в числитель, то в знаменатель.

(или его продолжение) в точке C'_1 (см. рис. 4). Тогда из доказанного выше и из соотношения (1) следует, что

$$\frac{AC'_1}{C'_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{AC'_1}{C'_1B} = \frac{A_1C}{BA_1} \cdot \frac{B_1A}{CB_1} = \frac{AC_1}{C_1B}.$$

Мы получили, что точки C_1 и C'_1 лежат на отрезке AB (или на его продолжении) и делят его в одном и том же отношении. Но тогда эти точки совпадают — противоречие. \square

Замечание 1. Как и в случае с теоремой о пропорциональных отрезках в треугольнике, у теоремы Менелая есть связь с теоремой о композиции гомотетий (см. рис. 5). А именно, рассмотрим гомотетии $H_{O_1}^{k_1}$, $H_{O_2}^{k_2}$ и $H_{O_3}^{k_3}$, такие, что

$$H_{O_1}^{k_1}(X_1) = X_2, \quad H_{O_2}^{k_2}(X_2) = X_3, \quad H_{O_3}^{k_3}(X_3) = X_1.$$

Из теоремы о композиции гомотетий следует, что $H_{O_3}^{k_3} \circ H_{O_2}^{k_2} \circ H_{O_1}^{k_1} = \text{id}$ — тождественное преобразование. Но тогда $k_1 k_2 k_3 = 1$, что эквивалентно равенству (1).

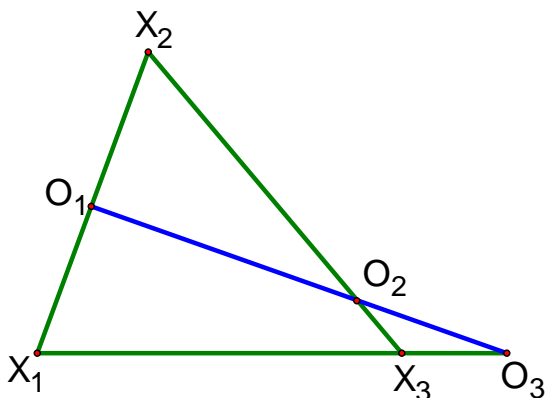


Рис. 5.

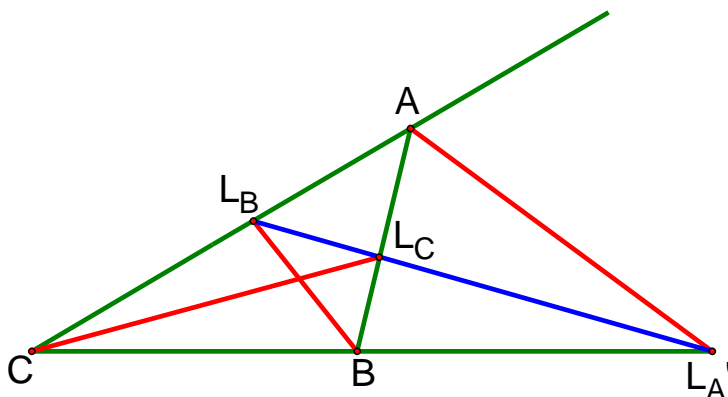


Рис. 6.

Теорема Менелая является первым (однако не единственным) результатом из школьной геометрии, который позволяет получать красивые геометрические результаты с помощью не очень сложных вычислений (ранее с помощью весьма громоздких вычислений нами была доказана теорема об окружности Аполлония). В качестве примера приведем такое утверждение.

Предложение 1 (О трех биссектрисах). Пусть L_B , L_C и L'_A — основания двух внутренних и одной внешней биссектрис треугольника ABC (см. рис. 6). Тогда эти три точки лежат на одной прямой.

Доказательство. Для доказательства нам необходимо проверить, что для точек L_B , L_C и L'_A выполняется соотношение (1). Для этого вспомним, что биссектрисы треугольника связаны с отношениями длин сторон:

$$\frac{AL_C}{L_CB} = \frac{AC}{BC}, \quad \frac{CL_B}{L_BA} = \frac{BC}{AB}, \quad \frac{BL'_A}{L'_AC} = \frac{AB}{AC}.$$

Перемножая эти равенства, получаем соотношение (1), поэтому наше утверждение следует из теоремы Менелая. \square

3. Теорема Чева и замечательные точки

В прошлом разделе мы получили красивый результат, позволяющий проверять принадлежность трех точек одной прямой с помощью вычислений (точнее, с помощью соотношения (1)). Возникает естественный вопрос: можно ли получить аналогичный результат для *двойственной* задачи? Как проверить, что три прямые пересекаются в одной точке? Ведь именно с пересечением прямых в одной точке связаны наши утверждения о точках пересечения медиан, высот, биссектрис...

Оказывается, такое утверждение существует, причем оно очень легко следует из теоремы Менелая. Удивительно, однако, что получено оно было лишь спустя почти 1500 лет после теоремы Менелая!

3.1. Формулировка и доказательство

Теорема 3 (Чева). *Рассмотрим треугольник ABC и точки A_1 , B_1 и C_1 , лежащие на сторонах BC , AC и AB соответственно (см. рис. 7). Тогда чевианы AA_1 , BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке, если и только если выполнено соотношение (1).*

Замечание 2. На самом деле теорема Чева справедлива и для точек, лежащих на продолжениях сторон треугольника. В этом случае формулировка звучит так. *Прямые AA_1 , BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке или параллельны, если и только если выполнено соотношение (1).* Однако на практике это общее утверждение практически никогда не используется, поэтому мы ограничимся вариантом, указанным в теореме.

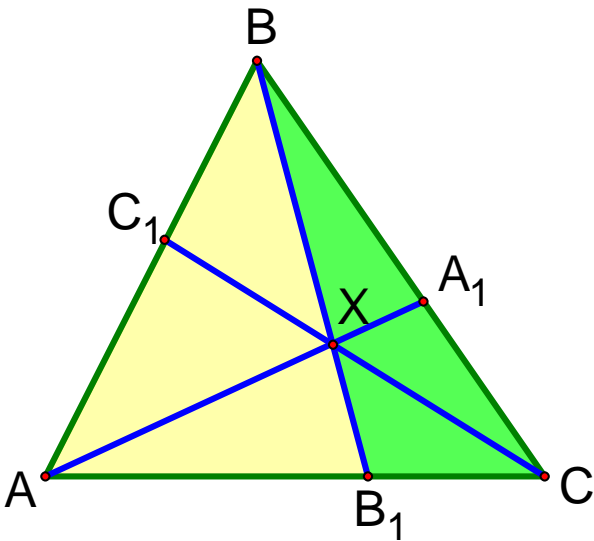


Рис. 7.

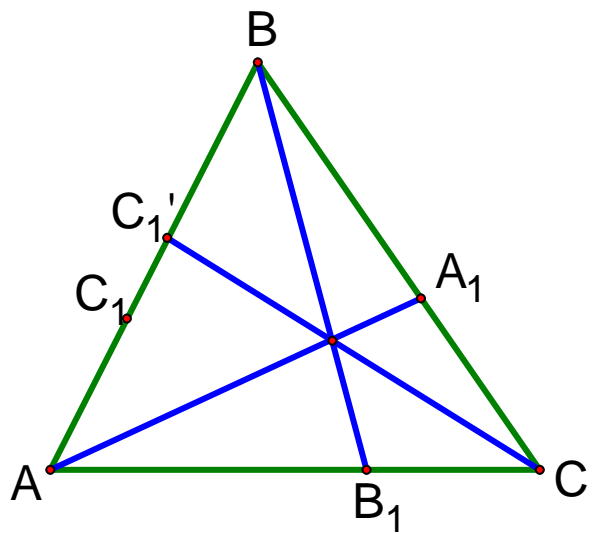


Рис. 8.

Доказательство. Совершенно удивительным является идентичность соотношений на длины отрезков, отсекаемых точками A_1 , B_1 и C_1 на сторонах треугольника ABC в случае теорем Менелая и Чева (хотя конфигурации этих теорем сильно отличаются друг от друга). Однако это сходство подсказывает и путь к доказательству теоремы Чева: необходимо искать на рис. 7 теорему Менелая.

Для начала докажем, что если чевианы AA_1 , BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке X , то тогда выполнено соотношение (1). Для этого запишем теорему Менелая для треугольника

ABB_1 и точек C_1, X и C , а также для треугольника CBB_1 и точек A, X, A_1 :

$$\begin{cases} \frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BX}{XB_1} \cdot \frac{B_1C}{CA} = 1 \\ \frac{B_1X}{XB} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CA}{AB_1} = 1. \end{cases}$$

Перемножая эти равенства, получаем соотношение (1).

Обратно, предположим, что для точек A_1, B_1 и C_1 , лежащих на сторонах треугольника ABC , выполнено соотношение (1), но при этом чевианы AA_1, BB_1 и CC_1 не пересекаются в одной точке. Тогда возьмем точку пересечения чевиан AA_1 и BB_1 и проведем через нее чевиану CC'_1 (см. рис. 8). Используя доказанное выше утверждение и соотношение (1) получаем, что точки C_1 и C'_1 делят отрезок AB в одном и том же отношении, чего быть не может — противоречие. \square

3.2. Несколько замечательных точек

Теорема Чевы является очень мощным инструментом для генерации новых замечательных точек в треугольнике. Однако необходимо отметить, что эта теорема очень редко используется на практике (в частности, в олимпиадных задачах). Дело в том, что все-таки теорема Чевы (как и теорема Менелая) представляет собой некоторое «счетное» утверждение, когда красивый геометрический факт следует из не совсем красивых (пусть даже и не очень сложных) вычислений. Поэтому теорема Чевы совершенно не отражает внутренней геометрии тех замечательных точек, существование которых так легко устанавливается с ее помощью. Например, из теоремы Чевы легко следует пересечение медиан в одной точке, однако не следует, что они делятся в отношении $2 : 1$ (хотя именно в этом заключается *причина того, что они действительно пересекаются в одной точке*); легко следует пересечение высот в одной точке (для этого нужно воспользоваться стандартным подобием), однако не следует, что эта точка является центром описанной окружности «нулевого» треугольника, и т.д.

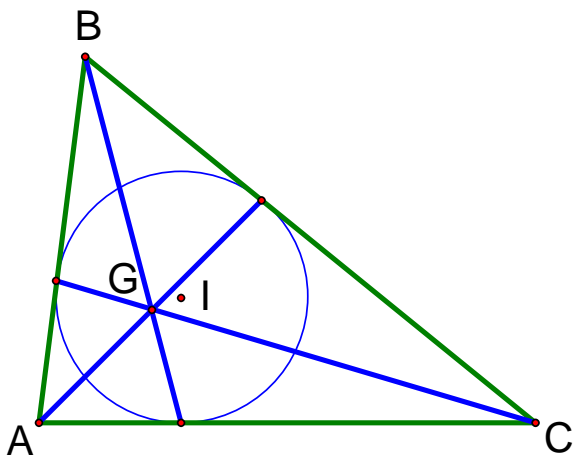


Рис. 9.

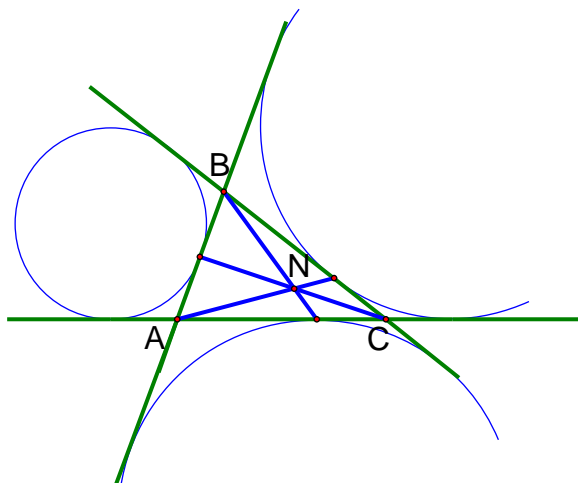


Рис. 10.

По этой причине с помощью теоремы Чевы *не принято* доказывать существование тех замечательных точек, которые могут быть относительно просто и геометрически получены без ее использования: точек пересечения медиан, высот и биссектрис. Однако бывают ситуации, в которых без теоремы Чевы обойтись крайне затруднительно (хотя и возможно...). Приведем два наиболее известных примера.

Предложение 2. 1. Пусть K_A, K_B, K_C — точки касания вписанной окружности треугольника ABC со сторонами BC, AC и AB соответственно. Тогда чевианы AK_A, BK_B и CK_C пересекаются в одной точке. Эта точка называется точкой Жергонна и обозначается буквой G (см. рис. 9).

2. Пусть K'_A, K'_B, K'_C — точки касания внеписанных окружностей треугольника ABC со сторонами BC, AC и AB соответственно. Тогда чевианы AK'_A, BK'_B и CK'_C пересекаются в одной точке. Эта точка называется точкой Нагеля и обозначается буквой N (см. рис. 10).

Доказательство. Для доказательства обоих утверждений достаточно воспользоваться опорной задачей про равенство отрезков касательных и теоремой Чевы. Для п.1 имеем: $AK_B = AK_C, BK_A = BK_C, CK_A = CK_B$; для п.2 имеем: $AK'_C = CK'_A, BK'_C = CK'_B, AK'_B = BK'_A$. Подставляя эти соотношения в формулу (1), получаем требуемое. \square

3.3. Теорема Чевы в форме синусов и изогональное сопряжение

На практике если теорема Чевы и используется, то не в форме соотношения (1). Дело в том, что в реальных задачах работать с отрезками очень сложно (прежде всего потому, что трудно связывать длины отрезков, не лежащих на одной прямой и не содержащихся в подобных треугольниках; точки Жергонна и Нагеля в этом плане — удачное исключение). Другое дело углы (которые можно перебрасывать, пользуясь либо вписанными углами, либо суммой углов треугольника). Поэтому на практике теорема Чевы применяется в форме соотношений между углами, точнее говоря, в *форме синусов*.

Теорема 4. Рассмотрим треугольник ABC и точки A_1, B_1 и C_1 , лежащие на сторонах BC, AC и AB соответственно (см. рис. 7). обозначим углы, на которые делят чевианы AA_1, BB_1 и CC_1 углы треугольника ABC , через $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \gamma_1$ и γ_2 (обозначения углов соответствуют обозначениям вершин, а нумерация идет против часовой стрелки). Тогда чевианы AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке, если и только если

$$\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} \cdot \frac{\sin \beta_1}{\sin \beta_2} \cdot \frac{\sin \gamma_1}{\sin \gamma_2} = 1. \quad (2)$$

Доказательство. Как и в случае обычной теоремы Чевы, сначала предположим, что чевианы AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке X . Тогда применим теорему синусов к треугольникам ABX, BCX и CAX :

$$\begin{cases} \frac{BX}{\sin \alpha_2} = \frac{AX}{\sin \beta_1} \\ \frac{CX}{\sin \beta_2} = \frac{BX}{\sin \gamma_1} \\ \frac{AX}{\sin \gamma_2} = \frac{CX}{\sin \alpha_1}. \end{cases}$$

Осталось перемножить эти равенства и перенести все в левую часть.

Теперь докажем, что из соотношения (2) следует пересечение чевиан AA_1, BB_1 и CC_1 в одной точке. Будем опять рассуждать от противного: предположим, что это не так и проведем чевиану CC'_1 через точку X' пересечения чевиан AA_1 и BB_1 . Тогда из доказанного выше и из соотношения (2) следует, что

$$\frac{\sin \gamma_1}{\sin \gamma_2} = \frac{\sin \gamma'_1}{\sin \gamma'_2}$$

(здесь γ'_1 и γ'_2 — это углы, на которые угол $\angle ACB$ разбивается чевианой CC'_1). Без ограничения общности можно считать, что $\gamma_1 > \gamma'_1$; тогда $\gamma_2 < \gamma'_2$. Но поскольку функция \sin является

возрастающей, то тогда $\sin \gamma_1 > \sin \gamma'_1$ и $\sin \gamma_2 < \sin \gamma'_2$. Значит,

$$\frac{\sin \gamma_1}{\sin \gamma_2} > \frac{\sin \gamma'_1}{\sin \gamma'_2}$$

— противоречие. □

Теорема Чевы в форме синусов гораздо более удобна, нежели обычная теорема Чевы. Однако нам она понадобится для доказательства одного-единственного утверждения. Но важность этого утверждения столь высока, что будет справедливо вынести его в отдельную теорему.

Теорема 5 (об изогональном сопряжении). *Рассмотрим произвольный треугольник ABC и точку X внутри него⁴. Проведем прямые AH , BH и CH и отразим их относительно биссектрис треугольника ABC (см. рис. 11). Тогда образы этих прямых также пересекаются в одной точке X_I .*

Замечание 3. Иногда бывает удобно говорить не об отражении прямых AH , BH и CH относительно биссектрис, а об откладывании углов: например, отложить луч AH_I так, чтобы $\angle BAH = \angle CAH_I$, и т.д.

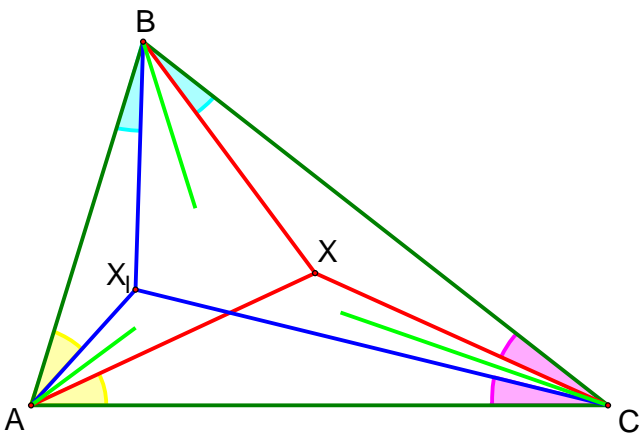


Рис. 11.

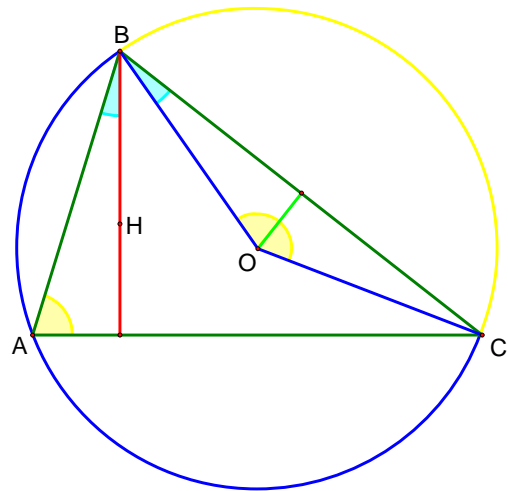


Рис. 12.

Доказательство. Воспользуемся теоремой Чевы в форме синусов. Заметим, что отражение прямых AH , BH и CH относительно биссектрис просто переставляет углы α_1 и α_2 , β_1 и β_2 , γ_1 и γ_2 , поэтому для образов прямых AH , BH и CH также будет справедливо соотношение (2). □

Преобразование плоскости, которое ставит точке X в соответствие точку X_I , полученную в результате процедуры, описанной в теореме, называется *изогональным сопряжением*, а точки X и X_I называются *изогонально сопряженными*.

Иzegoнальное сопряжение играет большую роль в геометрии треугольника, и существует колоссальное количество фактов, использующих это преобразование либо в формулировке, либо в доказательстве. Например, можно переформулировать одну из наших опорных задач следующим образом: *точки O и H изогонально сопряжены* (см. рис. 12).

⁴Вообще говоря, точка X может быть любой точкой плоскости, но для простоты мы будем считать, что она находится внутри треугольника.

Замечание 4. Оказывается, верен следующий красивый факт: точки G_I и N_I , изогонально сопряженные точкам G и N , лежат на Птолемеевой оси, т.е. на прямой OI (см. рис. 13). Попробуйте доказать это самостоятельно.

Возникает естественный вопрос: если точки O и H изогонально сопряжены, а точка I , очевидно, сопряжена самой себе, то что собой представляет точка M_I , изогонально сопряженная точке пересечения медиан? Эта точка называется *точкой Лемуана*, обозначается через L и обладает многими интересными фактами. О них пойдет речь в следующем разделе.

4. Этюд о симедиане

Чевиана, изогонально сопряженная медиане треугольника ABC , называется *симедианой* треугольника. Согласно результату из предыдущего раздела, три симедианы треугольника пересекаются в одной точке, которая называется *точкой Лемуана* и обозначается через L .

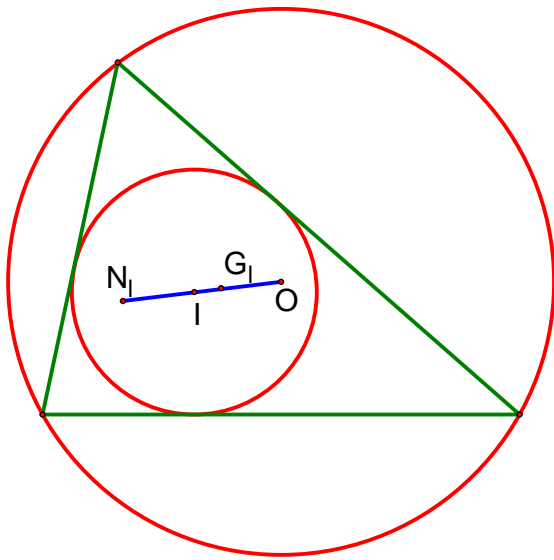


Рис. 13.

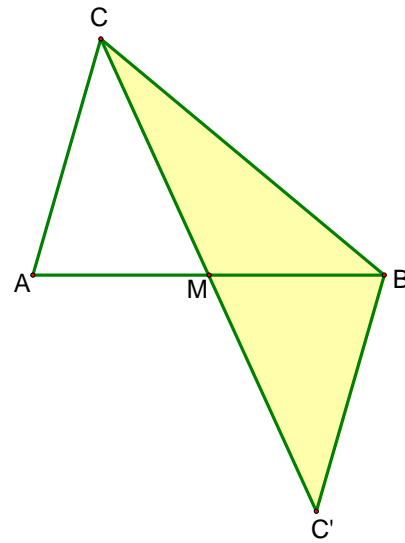


Рис. 14.

Оказывается, что даже одна симедиана обладает многими замечательными свойствами (некоторые из которых могут использоваться на различных олимпиадах). Поэтому сначала мы рассмотрим свойства отдельно взятой симедианы. Ее основание будем обозначать через S . В первом разделе собраны «вычислительные» факты и формулы, а во втором — чисто геометрические утверждения.

4.1. Несколько формул

Начнем с некоторых вычислений, связанных с медианой и симедианой. Всюду далее мы рассматриваем медиану CM и симедиану CS . В зависимости от контекста иногда удобно считать симедиану отрезком, а иногда — прямой, содержащей этот отрезок.

Предложение 3. *Имеет место равенство*

$$\frac{\sin \angle ACM}{\sin \angle BCM} = \frac{BC}{AC}.$$

Доказательство. Продлим медиану CM на свою длину, возьмем полученную точку C' и запишем теорему синусов в треугольнике $CC'B$ (см. рис. 14). Получается требуемое равенство. \square

Предложение 4. *Имеет место равенство*

$$\frac{AS}{BS} = \frac{AC^2}{BC^2}.$$

Доказательство. Здесь необходимо использовать типичный при работе с теоремой синусов прием — запишем теорему синусов для «смежных» треугольников ACS и BCS (см. рис. 15):

$$\frac{AS}{\sin \angle ACS} = \frac{CS}{\sin \angle BAC}, \quad \frac{BS}{\sin \angle BCS} = \frac{CS}{\sin \angle ABC}.$$

Поскольку синусы смежных углов равны, $\angle ACS = \angle ACM$ и $\angle BCS = \angle BCM$, то, поделив эти равенства и воспользовавшись предыдущим предложением, мы незамедлительно получаем требуемое. \square

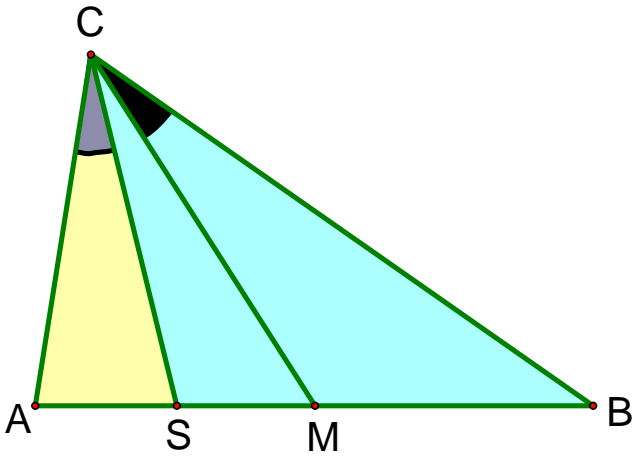


Рис. 15.

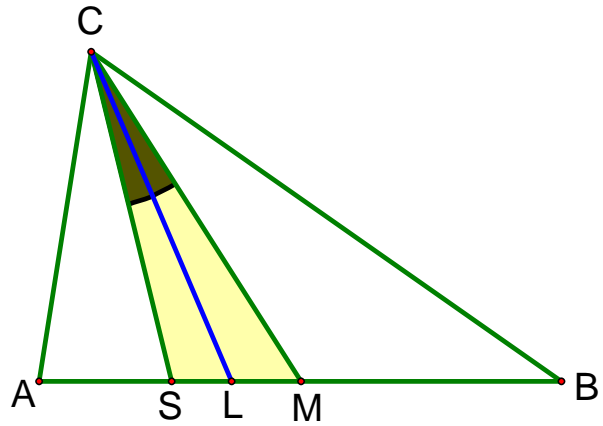


Рис. 16.

Предложение 5. *Имеет место равенство*

$$\frac{CS}{CM} = \frac{2 \cdot AC \cdot BC}{AC^2 + BC^2}.$$

Доказательство. Левая часть равенства подсказывает полезный прием, позволяющий быстро доказать требуемое соотношение. Давайте проведем биссектрису CL угла C (см. рис. 16). Тогда, поскольку медиана CM и симедиана CS симметричны относительно CL , то $\angle SCL = \angle MCL$, т.е. CL — это еще и биссектриса в треугольнике SCM . Тогда по основному свойству биссектрисы $CS/CM = SL/LM$.

Остается выразить отрезки SL и LM через длины сторон треугольника ABC . Для этого воспользуемся соотношениями $AL/BL = AC/BC$ и $AS/BS = AC^2/BC^2$. Имеем:

$$AL = \frac{AC}{AC + BC} \cdot AB, \quad BL = \frac{BC}{AC + BC} \cdot AB,$$

$$AS = \frac{AC^2}{AC^2 + BC^2} \cdot AB, \quad BS = \frac{BC^2}{AC^2 + BC^2} \cdot AB.$$

Тогда $SL = BS - BL$ и $LM = AM - AL$. Остается подставить значения из полученных выше формул и упростить получившееся выражение. \square

Из доказательства последнего утверждения следует важный принцип работы с симедианами (да и вообще и изогональным сопряжением): *если видите симедиану, рассмотрите биссектрису треугольника*. Обратите внимание, как работает этот принцип в следующем разделе.

4.2. Высоты и касательные

По сути существуют две ключевые задачи, связанные с симедианой. Именно на этих задачах основаны решения практически всех задач, в которых появляется симедиана. Поэтому эти две задачи мы разберем очень подробно, а затем посмотрим, как они используются на практике.

Предложение 6 (о высотах). *Рассмотрим треугольник ABC и высоты BH_B и CH_C . Тогда медиана треугольника AH_BH_C является симедианой треугольника ABC .*

Доказательство. Проведем медианы AS и AM в треугольниках AH_BH_C и ABC соответственно (см. рис. 17). Треугольники AH_BH_C и ACB подобны (стандартное подобие), поэтому существует преобразование подобия F , переводящее первый треугольник во второй. Т.к. подобие сохраняет отношения длин отрезков, то середина S перейдет в середину M , медиана AS — в медиану AM и сторона AH_C — в сторону AC . Поэтому угол $\angle SAH_C$ перейдет в угол $\angle MAC$. Т.к. подобие сохраняет углы, то $\angle SAH_C = \angle MAC$, что и требовалось доказать. \square

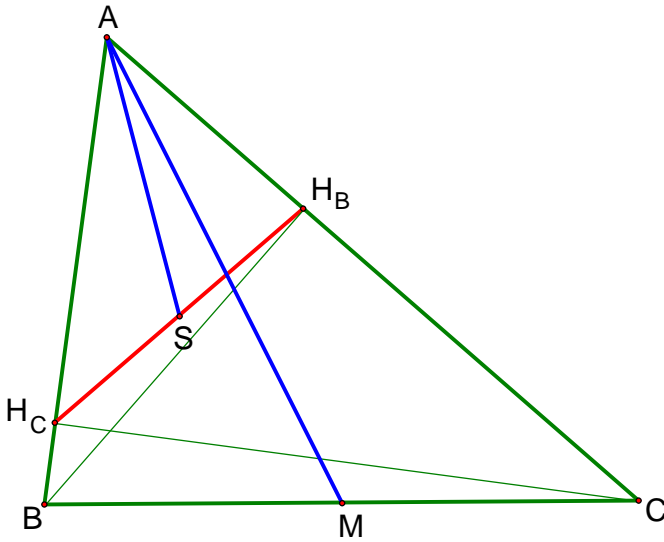


Рис. 17.

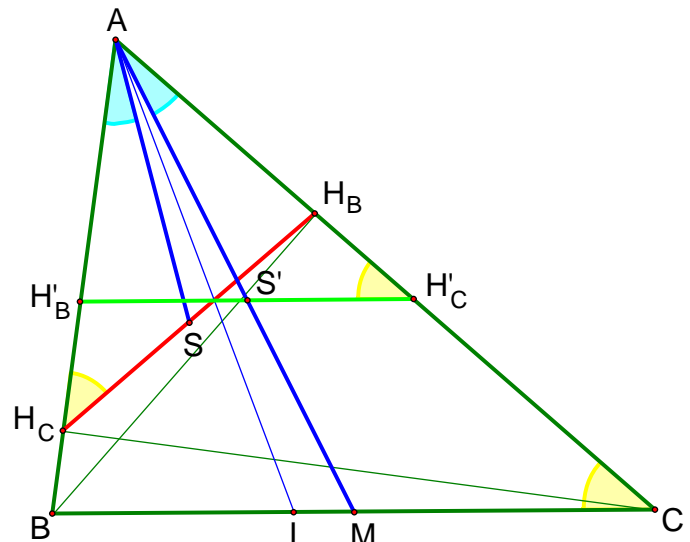


Рис. 18.

Замечание 5. В некоторых ситуациях бывает полезен явный вид подобия F . Для его нахождения рассмотрим биссектрису AL треугольника ABC и рассмотрим осевую симметрию S_{AL} (помните совет про биссектрису!). Тогда отрезок H_BH_C перейдет в отрезок $H'_BH'_C$, параллельный BC (поскольку $\angle ABC = \angle AH_BH_C = \angle AH'_BH'_C$), и середина S отрезка H_BH_C перейдет в середину S' отрезка $H'_BH'_C$ (см. рис. 18). Но S' лежит на медиане AM по замечательному свойству трапеции $BH'_BH'_C$. Значит, осевая симметрия S_{AL} переводит прямую AS в прямую AM , что и требовалось доказать. Также отсюда следует, что подобие F , переводящее треугольник AH_BH_C в треугольник ABC , есть композиция $H_A \circ S_{AL}$ осевой симметрии относительно биссектрисы и гомотетии с центром в точке A .

Предложение 7 (о касательных). *Рассмотрим описанную окружность треугольника ABC и проведем к ней касательные в точках B и C , пересекающиеся в точке S . Тогда прямая AS является симедианой треугольника ABC .*

Этому важному факту мы дадим сразу два доказательства.

Первое доказательство. Первое доказательство основано на проведении биссектрисы треугольника ABC . Только делается это не совсем обычным образом. А именно, отметим центр O описанной окружности и проведем отрезок OS . Очевидно, что OS пересекает сторону BC в ее середине M , а дугу $\smile BC$ — в ее середине W_A (см. рис. 19). Тогда описанная окружность треугольника ABC является окружностью Аполлония $Apoll(S, M)$ для точек S и M (это следует из теоремы о касательных). Значит, отрезок AW_A является биссектрисой треугольника SAM по свойству окружности Аполлония. Но этот же отрезок является биссектрисой треугольника ABC . Значит, $\angle BAS = \angle CAM$, что и требовалось доказать. \square

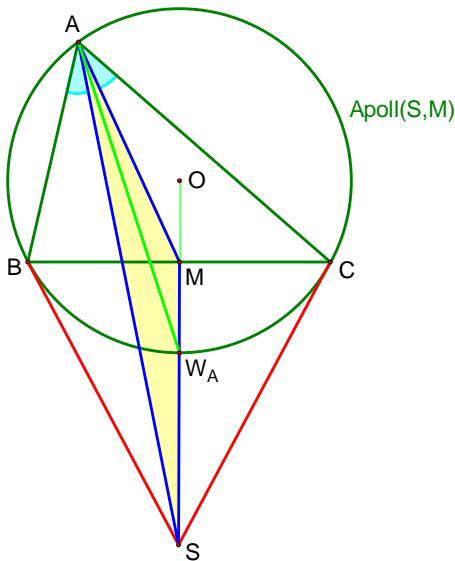


Рис. 19.

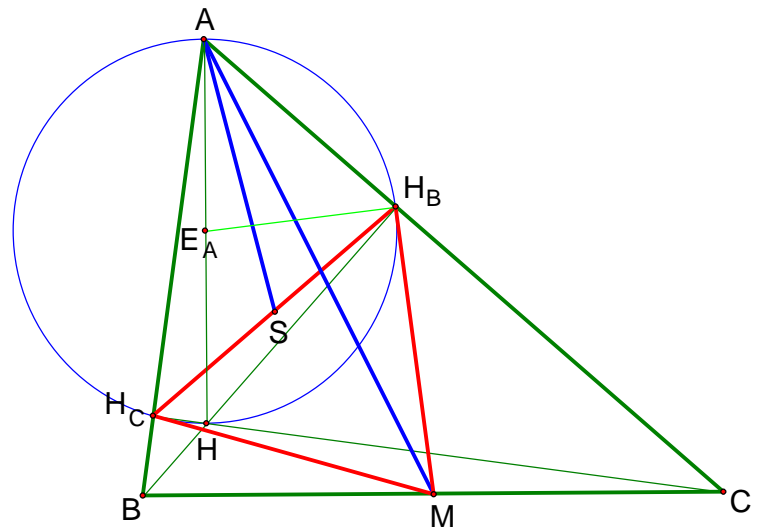


Рис. 20.

Второе доказательство. Второе доказательство основано на предложении о высотах. Рассмотрим описанную окружность k^A треугольника AH_BH_C (см. рис. 20). Как мы помним из сюжета об окружности Эйлера, центр E_A этой окружности является серединой отрезка AH . Кроме того, отрезок $E_A M$ является диаметром окружности Эйлера. Поэтому $\angle E_A H_B M = 90^\circ$. Но по определению касательной это означает, что отрезок MH_B касается окружности k^A . Аналогично, MH_C касается k^A . Осталось заметить, что AM является симедианой треугольника AH_BH_C , поэтому, применяя к нашей конфигурации подобие F , переводящее треугольник AH_BH_C в треугольник ABC , мы тем самым переведем окружность k^A в описанную окружность треугольника ABC , медиану AM в симедиану AS , а касательные MH_B и MH_C — в касательные SB и SC . \square

4.3. Отступление: гомотетия и биссектрисы, прямая Нагеля

Перед тем как продолжить рассказ о симедиане, нам потребуются некоторые нетривиальные факты, связанные с биссектрисами треугольника. Как мы помним, биссектрисы часто оказываются полезны при работе с симедианой, поэтому некоторые свойства биссектрис треугольника удастся использовать при изучении симедиан.

Мы начнем с красивого факта, напрямую не относящегося к симедианам, но использующим в своем доказательстве важную идею, которая окажется полезной нам в дальнейшем.

Предложение 8. Рассмотрим треугольник ABC , центры I и I_A вписанной и внеписанной окружностей и основание H высоты, проведенной из вершины A . Тогда HC — биссектриса угла $\angle IHI_A$.

Первое доказательство. Именно идея первого доказательства будет для нас ключевой в этом разделе. Суть ее заключается в следующем наблюдении: *вписанная и невписанная окружности гомотетичны с центром в точке A .* Рассмотрим гомотетию H_A , переводящую вписанную окружность во невписанную. Тогда $H_A(BC) = B'C'$, $H_A(I) = I_A$ и $H_A(H) = H'$ (см. рис. 21). Осталось заметить, что $\angle AHI = \angle HH'I_A = \angle H'HI_A$ (первое равенство следует из свойства гомотетии «угол в угол», а второе — из ГМТ о параллельных прямых: точка I_A равноудалена от прямых BC и $B'C'$, поэтому $HI_A = H'I_A$). Значит, $\angle IHC = \angle CHI_A$, что и требовалось доказать. \square

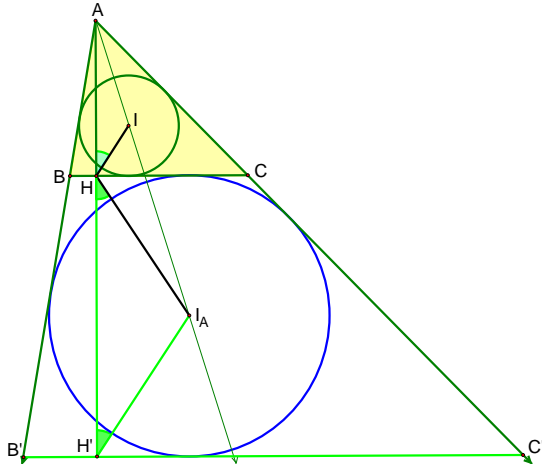


Рис. 21.

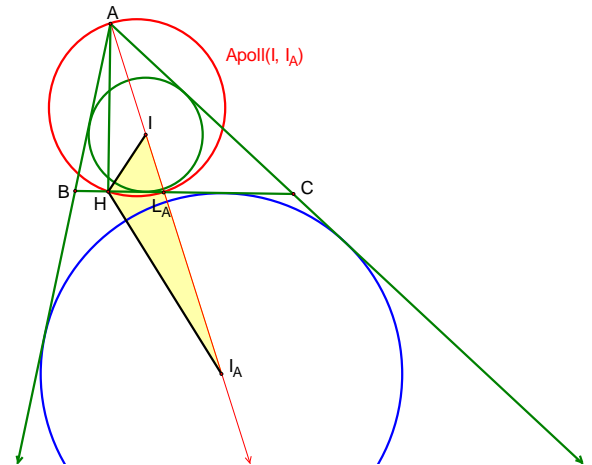


Рис. 22.

Второе доказательство. Как мы выяснили в первом доказательстве, вписанная и невписанная окружности гомотетичны с центром в точке A , и это можно использовать. Однако возникает естественный вопрос: где в этих окружностях *второй центр гомотетии*? Ведь, как мы помним, у неконцентрических неравных окружностей два центра гомотетии! Может быть, второй центр тоже окажется полезен?!

Заметим, что вторым (внутренним) центром гомотетии вписанной и невписанной окружностей является основание L_A биссектрисы угла $\angle BAC$ (см. рис. 22). Но тогда, как мы знаем, окружность, построенная на биссектрисе AL_A как на диаметре, является окружностью Аполлония $Apoll(I, I_A)$ для точек I и I_A (см. рис. 22). Поскольку $\angle AHL_A = 90^\circ$, то точка H лежит на этой окружности. Но по свойству окружности Аполлония отрезок HL_A является биссектрисой треугольника IHI_A , что и требовалось доказать. \square

Замечание 6. Еще раз зафиксируем важную идею, следующую из доказательства этого утверждения: *вписанная и невписанная окружности гомотетичны с центрами в точках A и L_A , поэтому бывает полезно применять эти гомотетии (особенно первую) к заданной конфигурации.*

В качестве следствия из этого наблюдения можно придать новый смысл предложению о трех биссектрисах (см. рис. 23): принадлежность точек L_B , L_C и L'_A одной прямой есть не что иное как теорема о трех колпаках, примененная к вписанной окружности и двум невписанным!

(Гомотетия H_{L_B} переводит вписанную окружность в первую внеписанную, гомотетия $H_{L'_A}$ — первую внеписанную во вторую, а гомотетия H_{L_C} возвращает вторую внеписанную во вписанную.)

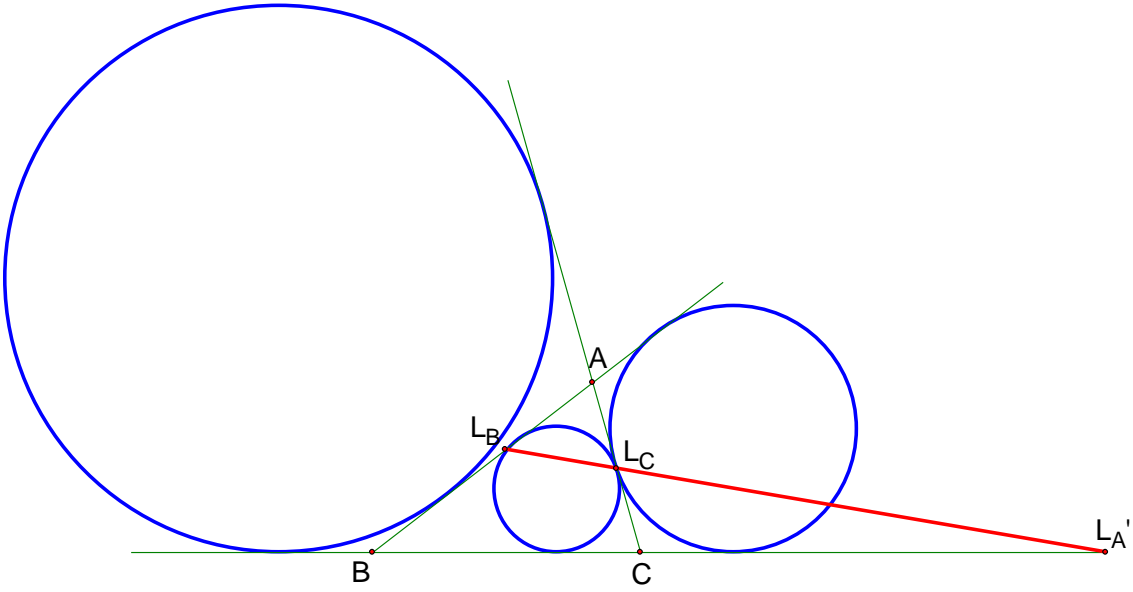


Рис. 23.

Перейдем теперь к утверждениям, которые имеют непосредственную связь с симедианой.

Теорема 6. Пусть K_A и K'_A — точки касания вписанной и невписанной окружностей треугольника ABC со стороной BC , I — центр вписанной окружности, M — середина стороны BC . Тогда $IM \parallel AK'_A$.

Доказательство. Здесь удобно рассмотреть гомотегию H_A , которая, наоборот, сдвигает невписанную окружность во вписанную. Тогда $H_A(BC) = B'C'$ и $H_A(K'_A) = N'_A$ (см. рис. 24). Заметим, что точки N'_A , I и K_A лежат на одной прямой (поскольку $BC \parallel B'C'$ и IK_A, IN'_A — радиусы, перпендикулярные касательным BC и $B'C'$ ко вписанной окружности). Кроме того, по опорной задаче точка M является серединой отрезка $K_A K'_A$. Поэтому в треугольнике $N'_A K'_A K_A$ отрезок IM является средней линией, а значит, параллелен AK'_A , что и требовалось доказать. \square

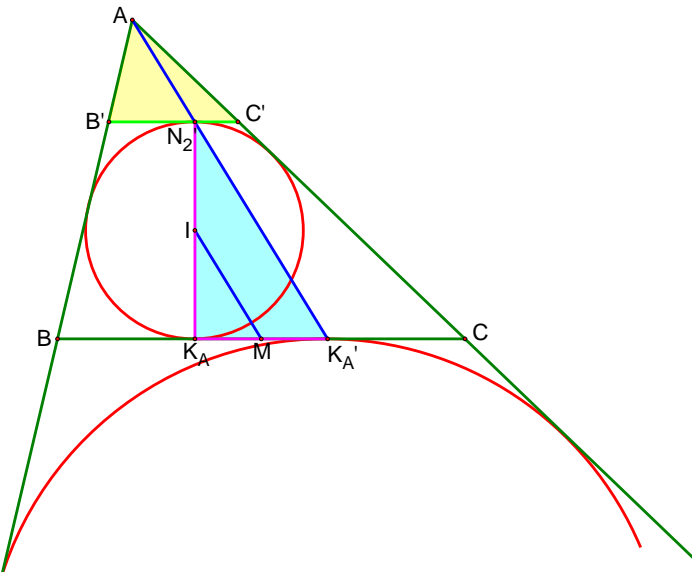


Рис. 24.

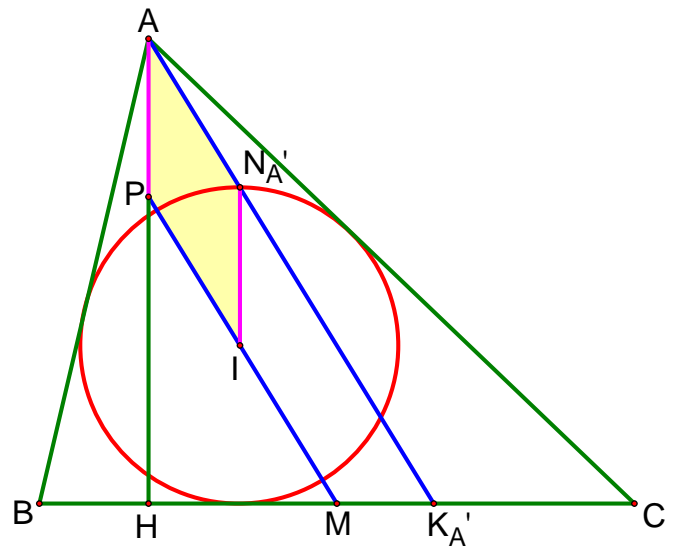


Рис. 25.

Из этой теоремы незамедлительно получается красивое следствие.

Следствие. В обозначениях предыдущей теоремы рассмотрим высоту AH и проведем прямую IM , пересекающую высоту в точке P . Тогда отрезок AP равен радиусу вписанной окружности.

Доказательство. В самом деле, достаточно заметить, что четырехугольник $APIN'_A$ является параллелограммом (стороны AP и IN'_A перпендикулярны основанию BC , а стороны PI и AN'_A параллельны по предыдущей теореме, см. рис. 25). \square

У этой теоремы есть аналог, когда вместо отрезка AK'_A рассматривается отрезок AK_A .

Теорема 7. Пусть K_A и K'_A — точки касания вписанной и внеписанной окружностей треугольника ABC со стороной BC , I_A — центр внеписанной окружности, M — середина стороны BC . Тогда $I_A M \parallel AK_A$.

Доказательство. А вот здесь полезно раздуть вписанную окружность во внеписанную гомотетией с центром в точке A . Тогда $H_A(BC) = B'C'$ и $H_A(K_A) = N_A$ (см. рис. 26). Аналогично доказательству предыдущей теоремы получаем, что точки K'_A , I_A и N_A лежат на одной прямой, а также M — середина отрезка $K_A K'_A$. Поэтому MI_A — средняя линия треугольника $K_A N_A K'_A$, а значит, она параллельна AK_A , что и требовалось доказать. \square

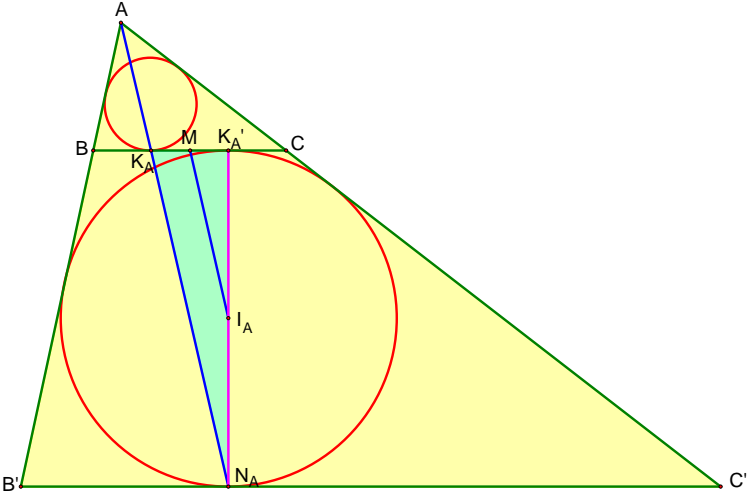


Рис. 26.

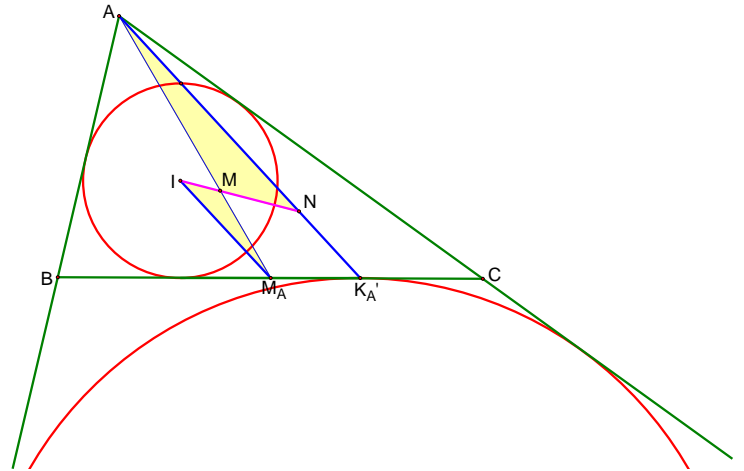


Рис. 27.

Теперь посмотрим, как эти две теоремы работают на практике. Сначала посмотрим, к чему приводит первая из них.

Теорема 8 (Прямая Нагеля). Точки M , N и I лежат на одной прямой (прямой Нагеля), причем $MN : MI = 2 : 1$.

Доказательство. Как и в доказательстве теоремы о прямой Эйлера, рассмотрим гомотетию H_M^{-2} с центром в точке M и коэффициентом -2 . Тогда $H_M^{-2}(M_A) = A$ и $H_M^{-2}(IM_A) = AK'_A$ (точка M_A тащит за собой всю прямую IM_A , которая переходит в параллельную прямую AK'_A ; см. рис. 27). Проводя аналогичное рассуждение для пар прямых IM_B и BK'_B , IM_C и CK'_C , получаем, что точка I перейдет в точку пересечения прямых AK'_A , BK'_B и CK'_C , которая и является точкой Нагеля N . Отношение $MN : MI = 2 : 1$ следует из коэффициента -2 гомотетии H_M^{-2} . \square

4.4. Цепочка треугольников и прямая Жергонна

Теперь мы продолжим рассказ о симедиане. Сейчас мы уже будем рассматривать не сами симедианы в отдельности, а все три симедианы вместе, которые, как мы помним, пересекаются в одной точке (точке Лемуана L).

Для начала рассмотрим следующие два красивых результата.

Предложение 9. 1. Рассмотрим треугольник ABC и проведем касательные в вершинах этого треугольника к его описанной окружности. Пусть эти касательные пересекаются в точках S_A, S_B, S_C . Тогда точка Лемуана треугольника ABC совпадает с точкой Жергонна треугольника $S_A S_B S_C$.

2. Рассмотрим треугольник ABC , и пусть M_A, M_B, M_C — середины его сторон, а I_A, I_B, I_C — центры вневписанных окружностей. Тогда прямые $I_A M_A, I_B M_B, I_C M_C$ пересекаются в одной точке — точке Лемуана треугольника $I_A I_B I_C$.

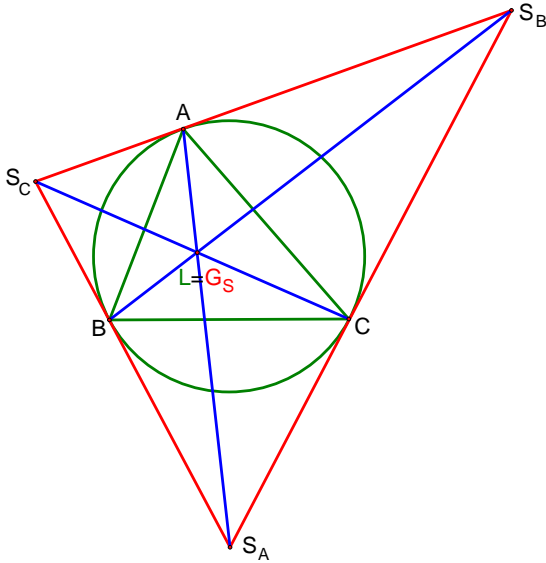


Рис. 28.

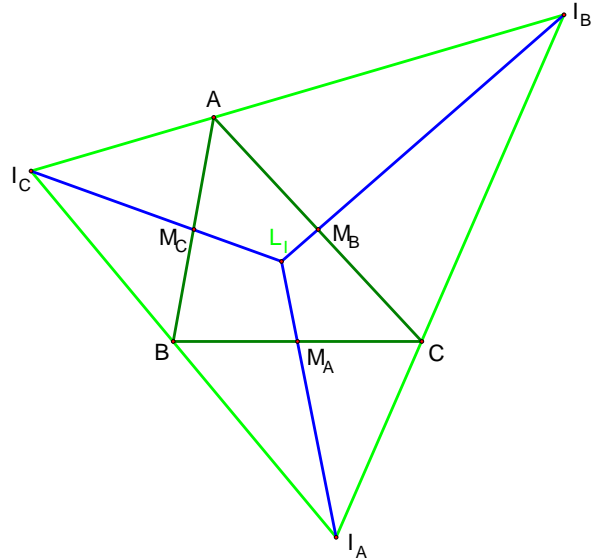


Рис. 29.

Доказательство. Для доказательства п.1 достаточно воспользоваться утверждением о касательных и определением точки Жергонна (см. рис. 28).

Для доказательства п.2 вспомним, что треугольник ABC является ортотреугольником треугольника $I_A I_B I_C$. Поэтому прямые $I_A M_A, I_B M_B, I_C M_C$ являются симедианами треугольника $I_A I_B I_C$ согласно утверждению о высотах, а значит, они пересекаются в точке Лемуана (см. рис. 29). \square

Теперь попробуем применить к нашим конструкциям теоремы из предыдущего раздела. Напомним, что теорема 6 привела нас к прямой Нагеля. Может ли теорема 7 также привести нас к какой-то новой замечательной прямой (по-видимому, связанной с точкой Жергонна)? Оказывается, да! И вот как это происходит. Зафиксируем три треугольника:

- исходный треугольник ABC ;
- треугольник $I_A I_B I_C$ с вершинами в центрах вневписанных окружностей;
- треугольник $S_A S_B S_C$, образованный касательными к описанной окружности треугольника $I_A I_B I_C$.

Иначе говоря, мы соединяем в одной конструкции пп. 1 и 2 предыдущего утверждения.

Предложение 10. Треугольники ABC и $S_A S_B S_C$ гомотетичны с центром в некоторой точке Z .

Замечание 7. К сожалению, свойства точки Z в настоящее время не изучены. По всей видимости, это новая точка; по крайней мере, среди первой тысячи точек из энциклопедии замечательных точек треугольника я ее найти не смог... Было бы интересно изучить свойства этой точки.

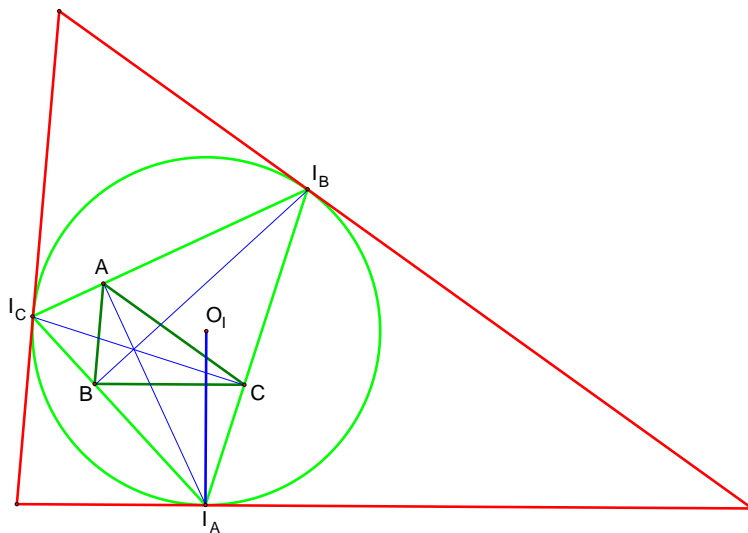


Рис. 30.

Доказательство. Достаточно доказать параллельность соответствующих сторон треугольников ABC и $S_A S_B S_C$, поскольку тогда можно будет применить теорему Дезарга. Для доказательства параллельности рассмотрим центр O_I описанной окружности треугольника $I_A I_B I_C$ и проведем радиус $I_A O_I$ (см. рис. 30). Тогда, поскольку точки B и C являются основаниями высот треугольника $I_A I_B I_C$, то $I_A O_I \perp BC$. С другой стороны, очевидно, $I_A O_I \perp S_B S_C$ по определению касательной. Поэтому $BC \parallel S_B S_C$, что и требовалось доказать. \square

Основная теорема этого раздела звучит следующим образом.

Теорема 9 (прямая Жергонна). Точка Z , точки M и M_S пересечения медиан G и G_S Жергонна треугольников ABC и $S_A S_B S_C$ лежат на одной прямой (прямой Жергонна), причем $MG : MG_S = 2 : 1$.

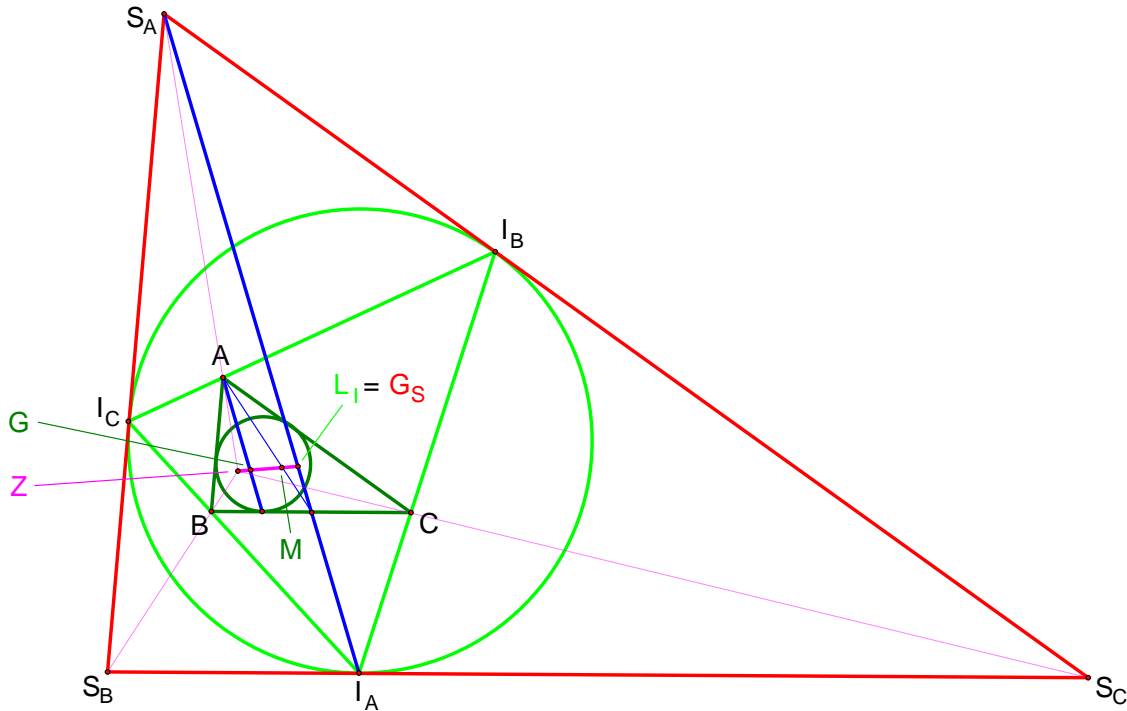


Рис. 31.

Доказательство. Из гомотетичности треугольников ABC и $S_A S_B S_C$ следует, что точки Z , M и M_S лежат на одной прямой, а также точки Z , G и G_S лежат на одной прямой. Чтобы показать, что это одна и та же прямая, достаточно установить, что точки G , M и G_S лежат на одной прямой.

Для этого рассмотрим гомотетию H_M^{-2} с центром в точке M и коэффициентом -2 . Тогда середина M_A стороны BC перейдет в точку A , поэтому прямая $M_A I_A$ перейдет в прямую AG (точка M_A потащит за собой всю прямую $M_A I_A$, которая параллельна AG по теореме 7). Значит, точка пересечения прямых $M_A I_A$, $M_B I_B$ и $M_C I_C$ перейдет в точку G при гомотетии H_M^{-2} (см. рис. 31). Согласно п.2 предложения 9, эта точка пересечения является точкой Лемуана треугольника $I_A I_B I_C$, а согласно п.1 этого же предложения — эта точка совпадает с точкой Жергонна G_S треугольника $S_A S_B S_C$. Поэтому $H_M^{-2}(G_S) = G$, что и требовалось доказать. \square