

# «ЦАРСКАЯ ДОРОГА» К ОКРУЖНОСТИ АПОЛЛОНИЯ

П. В. Бибииков<sup>1</sup>

## 1 Введение

В отличие от окружности Эйлера, окружность Аполлония зачастую остается в тени при изложении курса школьной геометрии даже в специализированных физико-математических школах. Обычно окружность Аполлония предлагается как одна из немногих геометрических задач, удобно решаемых с помощью координат, приводятся несколько примеров ее использования в задачах на построение и изредка сообщается о связи окружности Аполлония с инверсией и радикальной осью.

При таком подходе окружность Аполлония становится фактом, оторванным от самого курса школьной геометрии, поскольку ее связи с собственно геометрией (треугольника, окружности и т.д.), как правило, не излагаются, а основное внимание уделяется стандартным применениям определения этой окружности, но никак не ее взаимосвязям с другими важными и интересными фактами и теоремами.

Между тем оказывается, что окружность Аполлония содержит в себе необычайно красивую геометрию, освоение которой, с одной стороны, не требует никаких знаний, выходящих за рамки школьной программы 8 класса, а с другой — позволяет открыть совершенно удивительные факты и теоремы, доказать которые без окружности Аполлония весьма затруднительно (особенно в 8 классе!). И что самое главное, эти факты и теоремы органично вписываются в школьный курс геометрии и связывают воедино такие, казалось бы, далекие друг от друга понятия, как координаты, биссектрисы, замечательные точки треугольника, окружность Эйлера, точки  $W$ , задачи Фаньяно и Шарыгина, инверсию, полюсы и поляры и т.д.

Целью данной статьи является знакомство читателя с таким подходом к изучению окружности Аполлония. Для освоения теорем и доказательств, приводимых ниже, достаточно владеть школьной геометрией на уровне 8 класса (в частности, достаточно знать материал первых восьми параграфов учебника А. Погорелова) и желательно быть знакомым с окружностью Эйлера и точками  $W$  (читатель, незнакомый с этими фактами, может обратиться к статье ???).

Отметим, что при изучении геометрии по школьному учебнику часто возникает проблема поиска интересных и содержательных задач и теорем, решим и доказав которые, школьник поднимется на новую, более высокую ступень в своем математическом развитии. На наш взгляд, приводимый в этой статье сюжет об окружности Аполлония, а также ряда других тесно связанных с ними фактов может восполнить этот пробел и дать возможность познакомиться с весьма сложными и содержательными геометрическими результатами, доступными уже в 8 классе, но зачастую неизвестными даже 9-классникам.

Есть и еще один удивительный момент: при предлагаемом подходе к доказательству теорем об окружности Аполлония дорога к ним лежит не в стороне от основного курса теории (принятого, например, в учебнике А. Погорелова), а, наоборот, расширяет, дополняет, углубляет и связывает между собой материал всего курса 7 и 8 классов. Удивительно, что результаты, лежащие на этой дороге, могут быть доказаны без привлечения такой мощной техники как вписанные и центральные углы, гомотетия и подобие, и в то же время эти доказательства не искусственны! Они проясняют суть дела, но с совершенно неожиданной стороны, позволяя помимо всего прочего продемонстрировать конструкции, не всегда знакомые даже олимпиадникам.

---

<sup>1</sup>Лицей «Вторая школа»; e-mail [tsdtp4u@proc.ru](mailto:tsdtp4u@proc.ru)

Поэтому мы и назвали эту дорогу к окружности Аполлония «царской». Представляется чрезвычайно важным дать школьникам младших (7–8) классов самостоятельно пройти по этой дороге.

## 2 Окружность Аполлония в координатах

Мы начнем наш путь с классического определения окружности Аполлония и координатного доказательства теоремы об этой окружности. Еще раз отметим, что координаты, по всей видимости, являются единственным возможным способом доказательства теоремы об окружности Аполлония для восьмиклассников, если не привлекать вписанные углы.

Зафиксируем на плоскости отрезок  $AB$  и произвольное положительное число  $k$ . Наша цель — описать геометрическое место точек  $M$ , таких, что  $AM/BM = k$ .

Можно задать вопрос: почему интересно рассматривать именно отношение длин отрезков? Ведь в школьном курсе геометрии до сих пор рассматривалась лишь одна теорема, связанная с отношением длин — теорема о пропорциональных отрезках. Казалось бы, гораздо проще рассмотреть сумму или разность длин, на худой конец произведение (которое можно попытаться привязать к площади)...

Оказывается, что все не так просто. Соответствующие ГМТ хорошо известны в геометрии, однако устроены они куда более трудным образом! А именно,

- ГМТ  $M$ :  $AM + BM = k$  является эллипсом с фокусами в точках  $A$  и  $B$ ;
- ГМТ  $M$ :  $|AM - BM| = k$  является гиперболой с фокусами в точках  $A$  и  $B$ ;
- ГМТ  $M$ :  $AM \cdot BM = k$  является лемнискатой с фокусами в точках  $A$  и  $B$ .

Возможно, про эллипс и гиперболу вы уже что-то слышали (например, в графиком функции  $y = 1/x$  является гипербола), а вот лемниската, скорее всего, практически никому не известна. Однако же геометрические свойства этих фигур в школе проходятся редко. Трудно предположить, что именно ГМТ с отношениями длин устроено наиболее просто и красиво...

**Теорема 1.** ГМТ  $M$ :  $AM/BM = k \neq 1$  является окружностью с центром на прямой  $AB$ .

**Определение.** Такая окружность называется *окружностью Аполлония с коэффициентом  $k$*  и обозначается через  $Apoll_k(A, B)$ . Иногда для краткости мы будем писать просто  $Apoll(A, B)$ , если коэффициент  $k$  не важен.

*Доказательство.* Для доказательства воспользуемся координатным методом. Введем декартову систему координат, взяв начало координат  $O$  в середине отрезка  $AB$  и направив ось  $Ox$  по прямой  $AB$ , а ось  $Oy$  — по серединному перпендикуляру к отрезку  $AB$ . Пусть координаты точки  $A$  равны  $(-a/2, 0)$ , а точки  $B$  —  $(a/2, 0)$  (здесь  $a$  — длина отрезка  $AB$ ).

Рассмотрим произвольную точку  $M$  с (неизвестными) координатами  $(x, y)$ , удовлетворяющую условию  $AM/BM = k$ . Наша цель — преобразовать это геометрическое условие на точку  $M$  в алгебраическое соотношение на координаты  $(x, y)$  точки  $M$ . Тогда характер зависимости между координатами позволит определить, какое именно множество образуют все точки  $M$ , удовлетворяющие условию  $AM/BM = k$ . Поэтому если условие  $AM/BM = k$  удастся переписать в виде  $(x - x_0)^2 + y^2 = R^2$ , наша теорема будет доказана.

Сделаем цепочку равносильных преобразований:

$$\begin{aligned}
 AM/BM = k &\Leftrightarrow AM^2 = k^2 \cdot BM^2 \Leftrightarrow (x + a/2)^2 + y^2 = k^2 \left( (x - a/2)^2 + y^2 \right) \Leftrightarrow \\
 (k^2 - 1)x^2 - a(k^2 + 1)x + (k^2 - 1)y^2 - (k^2 - 1)a^2/4 &= 0 \Leftrightarrow (\text{т.к. } k \neq 1) \\
 x^2 - a \cdot \frac{k^2 + 1}{k^2 - 1} \cdot x + y^2 - a^2/4 &= 0 \Leftrightarrow \\
 \left( x^2 - 2 \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{k^2 + 1}{k^2 - 1} \cdot x + \left( \frac{a}{2} \cdot \frac{k^2 + 1}{k^2 - 1} \right)^2 \right) + y^2 - \left( \frac{a}{2} \cdot \frac{k^2 + 1}{k^2 - 1} \right)^2 + a^2/4 &= 0 \Leftrightarrow \\
 \left( x - \frac{a}{2} \cdot \frac{k^2 + 1}{k^2 - 1} \right)^2 + y^2 = \left( \frac{ak}{|k^2 - 1|} \right)^2.
 \end{aligned}$$

таким образом, точка  $M$  удовлетворяет условию  $AM/BM = k$  тогда и только тогда, когда ее координаты  $(x, y)$  удовлетворяют уравнению

$$\left( x - \frac{a}{2} \cdot \frac{k^2 + 1}{k^2 - 1} \right)^2 + y^2 = \left( \frac{ak}{|k^2 - 1|} \right)^2, \quad (1)$$

которое является уравнением окружности с центром в точке  $\left( \frac{a}{2} \cdot \frac{k^2 + 1}{k^2 - 1}, 0 \right)$  и радиусом  $\frac{ak}{|k^2 - 1|}$ , что и требовалось доказать.  $\square$

Отметим следующий момент: формальное условие  $k \neq 1$  мы использовали, когда делили наше уравнение на  $k^2 - 1$ , в результате чего получилось уравнение окружности. Однако при  $k = 1$  искомым ГМТ является прямая (серединный перпендикуляр к отрезку  $AB$ ). Оказывается, разумно считать такую прямую *окружностью бесконечно большого радиуса*. Что означают эти слова, мы обсудим в следующем разделе.

### 3 Пучок окружностей Аполлония

После доказательства теоремы об окружности Аполлония возникает естественный вопрос: как она выглядит? Метод координат позволил нам просчитать уравнение этой окружности, однако мы пока что не нарисовали этой окружности Аполлония явно для конкретных значений параметров  $a$  и  $k$ . Поэтому остаются открытыми многие естественные вопросы:

- где лежит центр окружности Аполлония: на отрезке  $AB$  и вне э того отрезка?
- окружность Аполлония содержит в себе обе точки  $A, B$ , только одну или вообще ни одной?
- Окружность Аполлония большая или маленькая?
- Как меняется окружность Аполлония с изменением коэффициента  $k$ ?

Настало время дать ответы на эти вопросы.

**Определение.** Множество окружностей Аполлония со всевозможными коэффициентами  $k$  для фиксированных точек  $A, B$  называется *пучком окружностей Аполлония* (см. рис. 1).

Какие выводы можно сделать, глядя на рис. 1? Прежде всего видна симметрия пучка окружностей Аполлония относительно серединного перпендикуляра к отрезку  $AB$ . Это легко объяснить следующим образом: пусть  $M \in \text{Apoll}_k(A, B)$  и  $M'$  — точка, симметричная  $M$  относительно серединного перпендикуляра. Тогда  $AM/BM = k \Leftrightarrow AM'/BM' = 1/k \Leftrightarrow M' \in \text{Apoll}_{1/k}(A, B)$ .

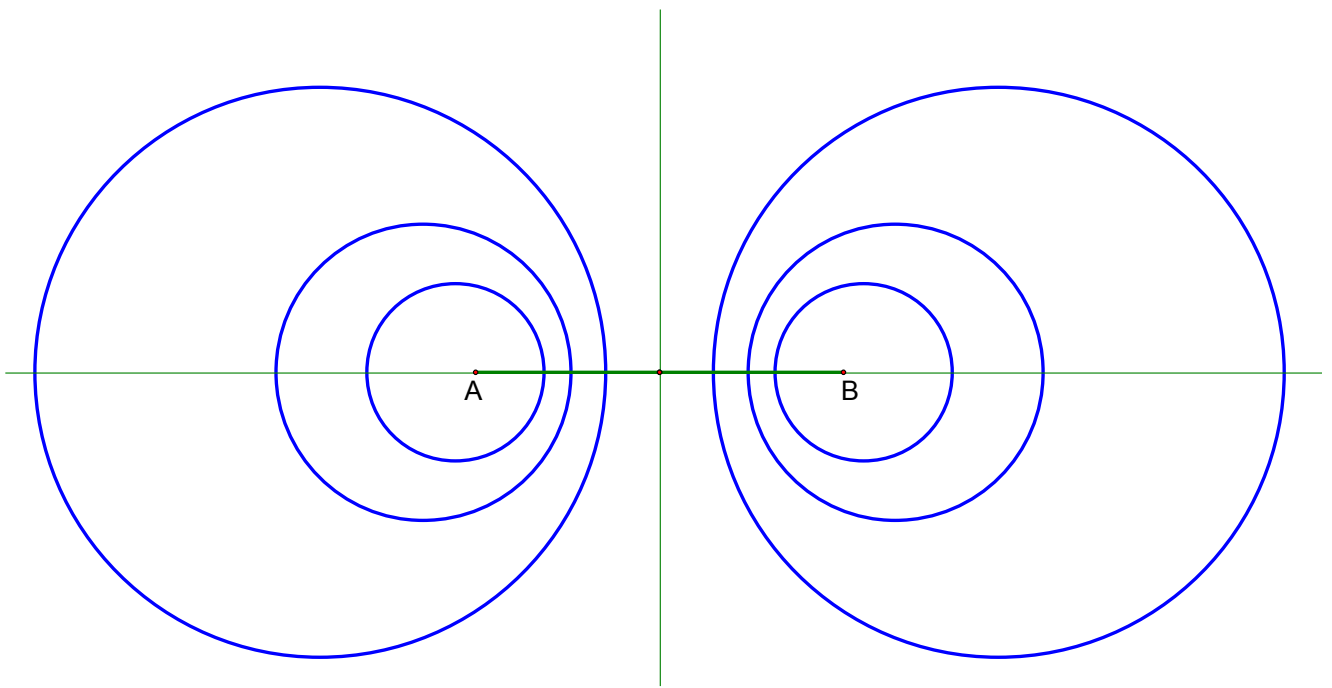


Рис. 1:

Поэтому окружности  $Apoll_k(A, B)$  и  $Apoll_{1/k}(A, B)$  симметричны. Это означает, что нам в наших рассуждениях достаточно ограничиться случаем  $k > 1$ , поскольку случай  $0 < k < 1$  будет симметричен ему.

Далее, видно, что центры окружностей Аполлония всегда лежат вне отрезка  $AB$ , каждая окружность Аполлония пересекает отрезок  $AB$  (т.е. разделяет точки  $A$  и  $B$ ), сами окружности Аполлония не пересекаются и, наконец, они могут быть как очень большими, так и очень маленькими.

**Упражнение.** Докажите, что окружности Аполлония попарно не пересекаются.

Для того, чтобы доказать оставшиеся утверждения, воспользуемся уравнением (1) окружности Аполлония. Зафиксируем число  $a$  (обозначающее длину отрезка  $AB$ ) и посмотрим, как будут меняться координата  $x_0(k) := \frac{a}{2} \cdot \frac{k^2+1}{k^2-1}$  центра  $W(k)$  и радиус  $R(k) := \frac{ak}{|k^2-1|}$  при различных  $k$ .

Есть два предельных положения:  $k \rightarrow \infty$  и  $k \rightarrow 1+$  (последняя запись означает, что параметр  $k$  стремится к 1 справа, т.е.  $k$  всегда остается больше 1).

При  $k \rightarrow \infty$  имеем  $x_0(k) \rightarrow (a/2)+$  и  $R(k) \rightarrow 0$ .

При  $k \rightarrow 1+$  имеем  $x_0(k) \rightarrow +\infty$  и  $R(k) \rightarrow +\infty$ .

Добавляя к этим предельным положениям симметричные относительно замены  $k$  на  $1/k$ , окончательно получаем следующее описание поведения окружностей Аполлония в зависимости от параметра  $k$ :

$k \rightarrow 0$	$W(k) \rightarrow A-$	$R(k) \rightarrow 0$
$k \rightarrow 1-$	$W(k) \rightarrow -\infty$	$R(k) \rightarrow \infty$
$k \rightarrow 1+$	$W(k) \rightarrow +\infty$	$R(k) \rightarrow \infty$
$k \rightarrow \infty$	$W(k) \rightarrow B+$	$R(k) \rightarrow 0$

В заключение этого раздела мы также упомянем о том, что пучок окружностей Аполлония действительно является пучком в математическом смысле: у всех окружностей Аполлония общая радикальная ось, являющаяся серединным перпендикуляром к отрезку  $AB$ . Также отметим, что можно построить еще один пучок окружностей с радикальной осью  $AB$  — это пучок окружностей, проходящих через точки  $A$  и  $B$ . Если изобразить оба пучка на одной картинке, получится рисунок 2, очень напоминающий траектории магнитных силовых линий, а также координатную сетку на глобусе (где полюсами являются точки  $A$  и  $B$ ).

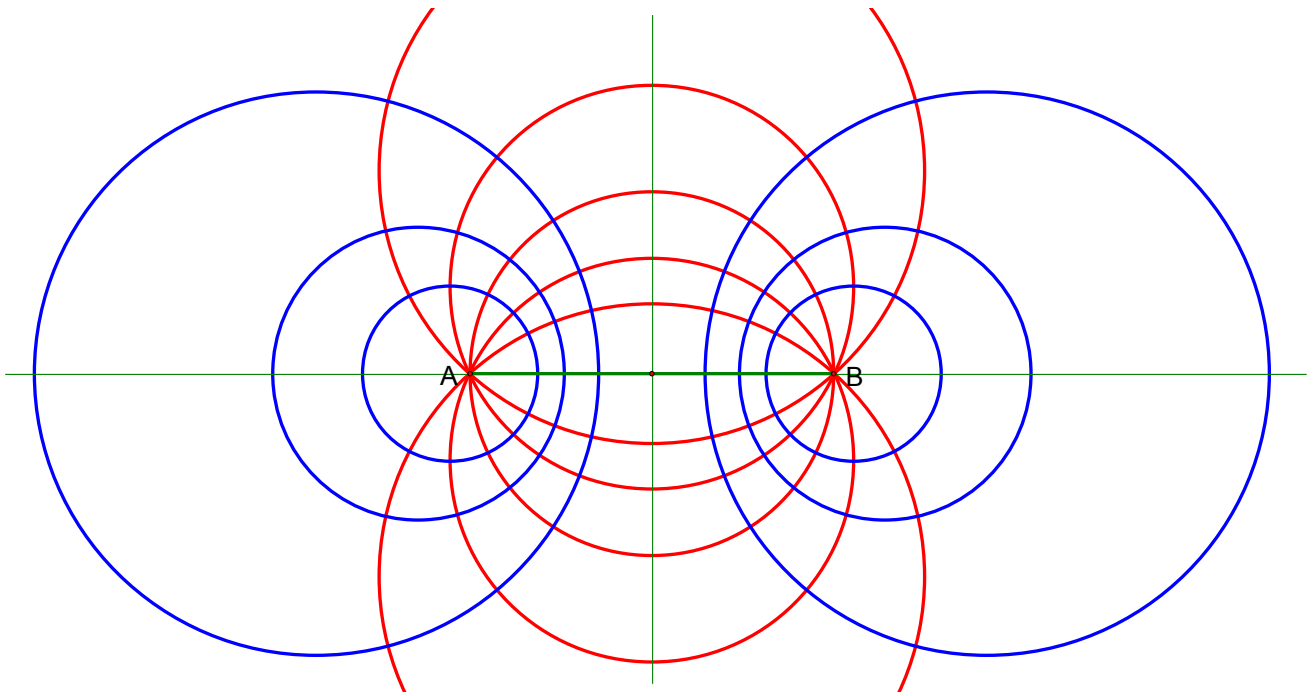


Рис. 2:

## 4 Теорема о биссектрисах треугольника

Итак, метод координат позволил нам без каких-либо идейных затруднений доказать весьма нетривиальную геометрическую теорему об окружности Аполлония. Также с помощью проведенных нами вычислений нам удалось исследовать поведение окружностей Аполлония в зависимости от коэффициента  $k$ . Однако все эти исследования очень далеки от применения окружности Аполлония в геометрических задачах. К большому сожалению, координатный метод не позволяет выявить геометрической причины явления, не позволяет ответить на вопрос, *почему* окружность Аполлония действительно является окружностью. Без понимания геометрической природы этого явления мы не сможем продвинуться в изучении геометрических свойств окружности Аполлония. Поэтому сейчас наша цель — связать окружность Аполлония с уже известными нам конструкциями из классической геометрии.

Оказывается, что основной геометрический объект, с которым связана окружность Аполлония, — это биссектрисы треугольника. Для того, чтобы понять это, нам потребуется важная (и хорошо известная) теорема.

**Теорема 2** (о биссектрисах треугольника). *Рассмотрим произвольный треугольник  $ABM$  с основанием  $AB$ .*

1. *Пусть  $ML$  и  $ML'$  — биссектрисы внутреннего и внешнего углов этого треугольника при вершине  $M$  (см. рис. 3 и 4). Тогда  $AL/BL = AM/BM = AL'/BL'$ .*

2. *Обратно, если на отрезке  $AB$  выбрана точка  $L$ , а на продолжении этого отрезка — точка  $L'$  такие, что  $AL/BL = AM/BM = AL'/BL'$ , то  $ML$  и  $ML'$  — биссектрисы внутреннего и внешнего углов треугольника  $ABM$  при вершине  $M$ .*

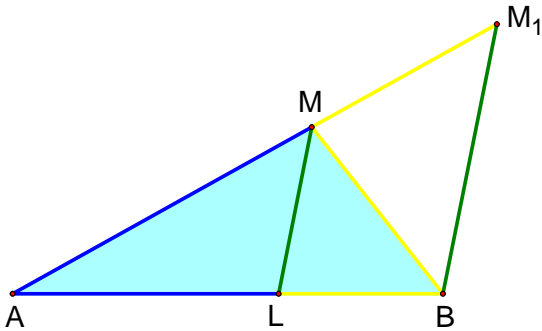


Рис. 3:

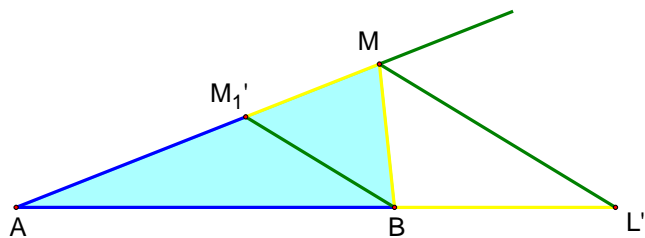


Рис. 4:

*Доказательство.* Мы докажем утверждения теоремы только для биссектрисы внутреннего угла, поскольку доказательства для биссектрисы внешнего угла проводятся аналогично.

Предположим, что  $ML$  — биссектриса внутреннего угла треугольника  $ABM$ . Проведем прямую, параллельную  $ML$ , через точку  $B$ . Она пересекает прямую  $AM$  в точке  $M_1$ . Тогда  $\angle M_1BM = \angle BML = \angle AML = \angle BM_1M$ . Значит, треугольник  $MM_1B$  — равнобедренный и

$MB = MM_1$ . Наконец, применяя теорему о пропорциональных отрезках к углу  $A$  и паре параллельных прямых  $ML$  и  $BM_1$ , получаем:  $AL/BL = AM/M_1M = AM/BM$ , что и требовалось.

Обратно, предположим, что на отрезке  $AB$  выбрана точка  $L$  такая, что  $AL/BL = AM/BM$ . Проведем биссектрису  $ML_1$ . Тогда  $AL/BL = AL_1/BL_1$ . Однако на отрезке существует лишь одна точка, делящая отрезок в заданном отношении. Значит,  $L = L_1$  и  $ML$  — биссектриса.  $\square$

## 5 Биссектрисы и окружность Аполлония

Наличие отношений длин отрезков в теореме о биссектрисах треугольника указывает на возможную связь биссектрис с окружностью Аполлония. Оказывается, такая связь действительно имеет место быть! Однако для того, чтобы ее обнаружить, нам понадобятся *обе* биссектрисы треугольника: и внешняя, и внутренняя. Очень часто о биссектрисе внешнего угла забываю, однако, как мы сейчас увидим, именно рассмотрение сразу двух биссектрис позволяет связать с каждым треугольником окружность Аполлония.

### 5.1 Окружность Аполлония в треугольнике

Рассмотрим произвольный треугольник  $ABM$  и проведем в нем биссектрисы  $ML$  и  $ML'$  внутреннего и внешнего углов при вершине  $M$ . Заметим, что  $\angle LML' = 90^\circ$  (биссектрисы смежных углов). Значит, окружность  $\omega$ , построенная на отрезке  $LL'$  как на диаметре, проходит через точку  $M$ .

**Предложение 1.** *Эта окружность является окружностью Аполлония для пары точек  $A, B$  (см. рис. 5).*

*Верно и обратное: есть  $Apoll(A, B)$  — окружность Аполлония для точек  $A$  и  $B$ , пересекающая прямую  $AB$  в точках  $L$  и  $L'$ , то для произвольной точки  $M \in Apoll(A, B)$  отрезки  $ML$  и  $ML'$  являются биссектрисами внутреннего и внешнего углов при вершине  $M$ .*

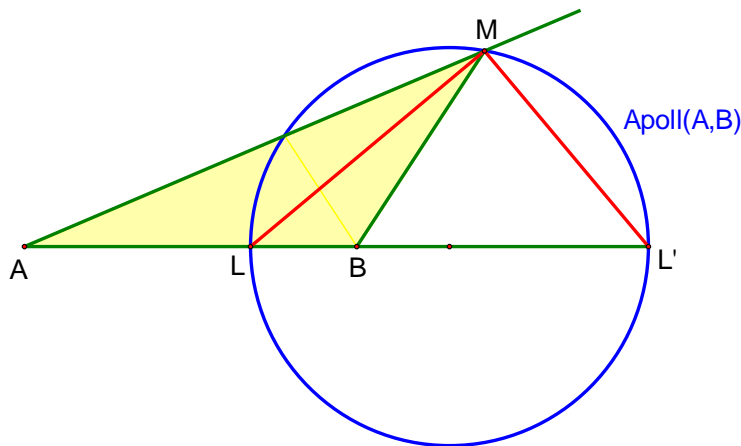


Рис. 5:



*Доказательство.* В самом деле, согласно теореме о биссектрисах треугольника  $AL/BL = AM/BM = AL'/BL'$ . Значит, точки  $L$ ,  $L'$  и  $M$  должны лежать на окружности Аполлония. Но центр окружности Аполлония лежит на прямой  $AB$ , поэтому отрезок  $LL'$  является диаметром окружности Аполлония. Значит, окружность  $\omega$  действительно является окружностью Аполлония  $Apoll(A, B)$ .  $\square$

Таким образом, с каждым треугольником можно естественным образом связать окружность Аполлония. Для этого необходимо построить биссектрисы внутреннего и внешнего углов при одной из вершин треугольника и построить окружность на отрезке между основаниями этих биссектрис как на диаметре.

*Замечание 1.* С каждым треугольником можно связать три окружности Аполлония. Можно доказать, что все эти окружности пересекаются в двух точках, т.е. образуют пучок.

Кажется, что найденная взаимосвязь между окружностью Аполлония и биссектрисами дает возможность доказать теорему об окружности Аполлония, не прибегая к координатам. В самом деле, рассмотрим прямую  $AB$  и отметим на ней точки  $L$  и  $L'$  такие, что  $AL/BL = AL'/BL' = k$  (несложно показать, что таких точек всего две, причем ровно одна из них лежит на отрезке  $AB$ ). Тогда если взять произвольную точку  $M$ , удовлетворяющую условию  $AM/BM = k$ , то в силу равенств  $AL/BL = AM/BM = AL'/BL'$  и теоремы о биссектрисах треугольника следует, что отрезки  $ML$  и  $ML'$  являются биссектрисами треугольника  $ABM$ , а раз так, то  $\angle LML' = 90^\circ$  (угол между биссектрисами смежных углов) и точка  $M$  лежит на фиксированной окружности с диаметром  $LL'$ . Почему же мы не выбрали такой простой и красивый путь?

Дело в том, что любая задача на ГМТ предполагает доказательство двух утверждений. А именно, мы должны доказать, что все точки плоскости, удовлетворяющие заданным условиям, принадлежат нашему ГМТ, и наоборот, любая точка ГМТ удовлетворяет заданным условиям. А в рассуждении выше мы провели лишь одно доказательство: доказали, что *если точка  $M$  удовлетворяет условию  $AM/BM = k$ , то она лежит на окружности с диаметром  $LL'$* . Однако остается недоказанным обратное утверждение: почему *каждая* точка  $M$  такой окружности удовлетворяет условию  $AM/BM = k$ ?

Попытки доказать это утверждение геометрически наталкиваются на существенные сложности, что само по себе удивительно, поскольку в других задачах на ГМТ (серединовый перпендикуляр, биссектриса угла и т.д.) прямое и обратное утверждения доказывались примерно одинаково. Конечно, геометрическое доказательство существует, однако оно весьма нетривиально (более того, для человека, незнакомого с инверсией, оно покажется «взятым с потолка») и опирается на теорему о вписанном угле, знания которой от нас не предполагается. . .

А вот координаты позволяют избежать всех этих сложностей просто за счет проведения равносильных преобразований! Именно поэтому многие задачи на ГМТ удобно решать с помощью координат.

## 5.2 Окружность Аполлония и точки $W$

Продолжим исследование геометрии окружности Аполлония. В предыдущем разделе мы выяснили, что окружность Аполлония тесно связана с биссектрисами треугольника. Давайте вспомним, где еще у нас в больших количествах встречались биссектрисы. Разумеется, это конструкции, связанные со вписанной и невписанными окружностями, центры которых являются точками пересечения биссектрис (внутренних и внешних, что для нас особенно важно). Также есть еще один неотъемлемый объект, связанный с биссектрисами, — это точки  $W$  (см. рис. 6, 7).

Напомним, что на этих рисунках через  $I$  обозначен центр вписанной окружности, а через  $I_A$ ,  $I_B$ ,  $I_C$  — центры невписанных окружностей напротив вершин  $A$ ,  $B$ ,  $C$ . Наше определение точек  $W$  немного отличается от общепринятого (хотя и эквивалентно ему): точка  $W_A$  — это центр

окружности, описанной вокруг четырехугольника  $BICI_A$ , а точка  $W^A$  — это центр окружности, описанной вокруг четырехугольника  $BCI_C I_B$ .

**Упражнение.** Докажите, что вокруг этих четырехугольников действительно можно описать окружности.

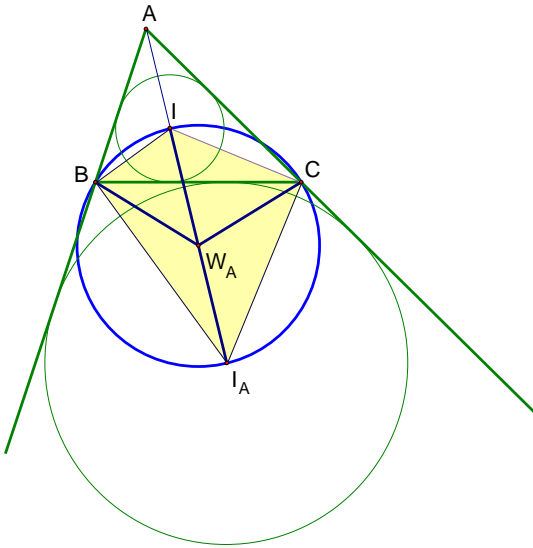


Рис. 6:

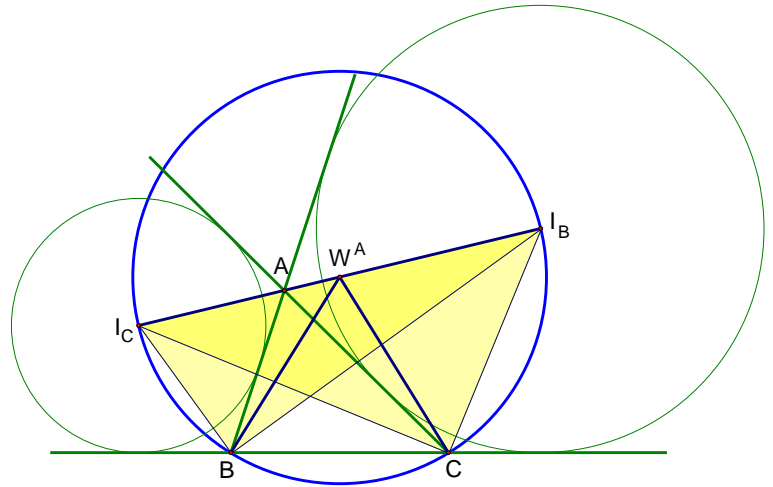


Рис. 7:

Несложно видеть, что точки  $W_A$  и  $W^A$  лежат на биссектрисах внутреннего и внешнего углов при вершине  $A$  соответственно. Более того, самым важным свойством этих точек является следующее

**Предложение 2.** Точки  $W_A$  и  $W^A$  лежат на описанной окружности треугольника  $ABC$ .

*Доказательство.* В самом деле, биссектрисы  $AI_A$ ,  $BI_B$  и  $CI_C$  треугольника  $ABC$  являются высотами треугольника  $I_A I_B I_C$  (поскольку, например,  $AI_A$  и  $I_B I_C$  — биссектрисы смежных углов). Значит, описанная окружность треугольника  $ABC$  является окружностью Эйлера для треугольника  $I_A I_B I_C$ . Поэтому на этой окружности лежат середины сторон этого треугольника (в частности,  $W^A$ ) и середины отрезков, соединяющих вершины с ортоцентром (в частности,  $W_A$ ).  $\square$

Это предложение позволяет определить точки  $W$  по-другому. А именно, точка  $W_A$  — это точка пересечения внутренней биссектрисы угла  $A$  и описанной окружности треугольника  $ABC$ . Аналогично, точка  $W^A$  — это точка пересечения внешней биссектрисы угла  $A$  и описанной окружности треугольника  $ABC$ .

Более того, верно и такое определение точек  $W$ : это точки, лежащие на описанной окружности треугольника и равноудаленные от двух его вершин.

**Упражнение.** Докажите это.

В дальнейшем мы будем использовать различные определение точек  $W$  в зависимости от ситуации.

Теперь давайте попробуем найти на рис. 6, 7 окружности Аполлония. Что может указывать на наличие таких окружностей? Конечно же, биссектрисы! Ведь согласно предложению 1, окружность, построенная на отрезке, соединяющем основания биссектрис внутреннего и внешнего углов, является окружностью Аполлония, а на наших рисунках биссектрис много...

Оказывается, синие окружности являются окружностями Аполлония  $Apoll(A, L)$  и  $Apoll(A, L')$ , где  $L$  и  $L'$  — основания биссектрис внутреннего и внешнего углов, проведенных из вершины  $A$  треугольника  $ABC$  (см. рис. 5).

**Упражнение.** Докажите это утверждение.

Теперь решим обратную задачу. Только что мы нашли в уже известных нам картинках с точками  $W$  окружности Аполлония. Давайте попробуем, наоборот, дополнить саму окружность Аполлония  $Apoll(A, B)$  для точек  $A$  и  $B$  таким образом, чтобы в новой картинке возникли бы точки  $W$ .

Начнем с точки  $W_A$ .

**Предложение 3.** Продлим отрезок  $MB$  до второго пересечения с окружностью Аполлония  $Apoll(A, B)$  в точке  $K$  и рассмотрим треугольник  $AMK$ . Тогда точки пересечения прямой  $AB$  с окружностью Аполлония  $Apoll(A, B)$  являются центрами вписанной и невписанной окружностей этого треугольника, а центр окружности Аполлония  $Apoll(A, B)$  является точкой  $W_A$  для него (см. рис. 8).

*Доказательство.* В самом деле, обозначим через  $I$  и  $I_A$  точки пересечения прямой  $AB$  с окружностью Аполлония  $Apoll(A, B)$ . Согласно предложению 1, отрезки  $MI$  и  $KI$  являются биссектрисами в треугольнике  $AMK$ , поэтому точка  $I$  действительно является центром вписанной окружности. Аналогично, точка  $I_A$  будет центром невписанной окружности. Наконец, середина отрезка  $II_A$  — это точка  $W_A$  (см. рис. 8).  $\square$

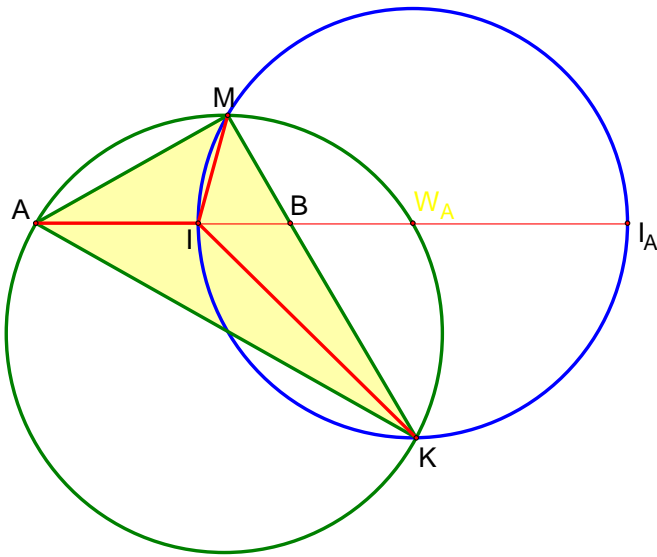


Рис. 8:

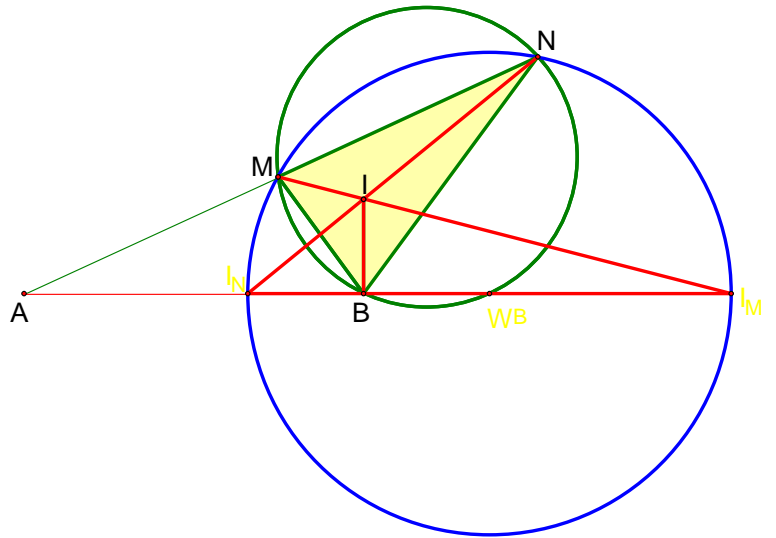


Рис. 9:

Теперь реализуем точку  $W^B$ .

**Предложение 4.** Рассмотрим точку  $N$  второго пересечения прямой  $AM$  с окружностью Аполлония  $Apoll(A, B)$ . Тогда для треугольника  $BMN$  точки пересечения прямой  $AB$  с окружностью Аполлония  $Apoll(A, B)$  будут центрами вневписанных окружностей треугольника  $BMN$ , а центр окружности Аполлония будет точкой  $W^B$  для него.

**Упражнение.** Докажите это утверждение.

Отметим также, что совершенно бесплатно мы получаем совершенно не очевидные утверждения:

1. Точки  $A, M, K, W_A$  лежат на одной окружности (см. рис. 8).
2. Точки  $B, M, N, W^B$  лежат на одной окружности (см. рис. 9).
3. Пусть  $BI$  — биссектриса треугольника  $BMN$  (см. рис. 9). Тогда  $BI \perp AB$ .

**Упражнение.** Докажите эти утверждения.

Таким образом, всякий раз, когда мы сталкиваемся с окружностью Аполлония, необходимо помнить, что она тесно связана с точками  $W$ , которые часто встречаются в различных геометрических конфигурациях.

### 5.3 Флажок и касательные

В этом разделе мы свяжем окружность Аполлония с касательными и секущими. Поскольку эти объекты — частые гости в геометрических задачах, возможность применения в них окружности Аполлония представляет большой интерес. Также мы приведем пример использования этой связи на практике.

Начнем с касательных. Докажем следующее утверждение.

**Теорема 3** (о касательных). Рассмотрим произвольную окружность  $\omega$  и точку  $A$ , лежащую вне этой окружности. Проведем касательную  $AM$  к окружности  $\omega$  и опустим из точки касания  $M$  перпендикуляр  $AB$  на прямую, проходящую через  $A$  и центр окружности  $\omega$ . Тогда  $\omega = Apoll(A, B)$  — окружность Аполлония для точек  $A$  и  $B$ .

Обратно, что  $Apoll(A, B)$  — окружность Аполлония для точек  $A$  и  $B$  и  $BM$  — перпендикуляр к  $AB$ , то прямая  $AM$  является касательной к окружности Аполлония  $Apoll(A, B)$ .

Тем самым любая точка, не лежащая на окружности, может быть дополнена до пары точек, превращающих данную окружность в окружность Аполлония.

*Доказательство.* Докажем первое утверждение теоремы. Рассмотрим вторую касательную  $AK$  к окружности  $\omega$ . Тогда для треугольника  $AMK$  центр окружности  $\omega$  является точкой  $W_A$  (см. рис. 10): он лежит на описанной окружности треугольника  $AMK$  (поскольку  $\angle AMW_A = \angle AKW_A = 90^\circ$ ) и на биссектрисе угла  $A$ . Значит, точка  $I$  пересечения отрезка  $AB$  с  $\omega$  — это центр вписанной окружности, а точка  $I_A$  пересечения луча  $[AB)$  с  $\omega$  — это центр вневписанной окружности. Значит, в треугольнике  $ABM$  отрезки  $MI$  и  $MI_A$  — биссектрисы. Значит, по утверждению 1 окружность  $\omega$  является окружностью Аполлония  $Apoll(A, B)$  для пары точек  $A$  и  $B$ .

Теперь докажем обратное утверждение. Рассмотрим точку  $A$  и окружность  $Apoll(A, B)$ . Согласно первому утверждению теоремы, если провести касательную к окружности  $Apoll(A, B)$  и опустить из точки касания перпендикуляр на прямую  $AB$ , мы попадем в точку  $B$ . Значит, если восстановить перпендикуляр к  $AB$  в точке  $B$ , мы попадем в точку касания.  $\square$

*Замечание 2.* Читатель, знакомый с понятием инверсии, может увидеть в этой теореме один из способов построения образа точки  $A$  при инверсии относительно окружности  $\omega$ . Это объясняется тем фактом, что относительно окружности Аполлония  $Apoll(A, B)$  точки  $A$  и  $B$  симметричны. Это обстоятельство подсказывает связь окружности Аполлония с секущими, о котором мы сейчас поговорим.

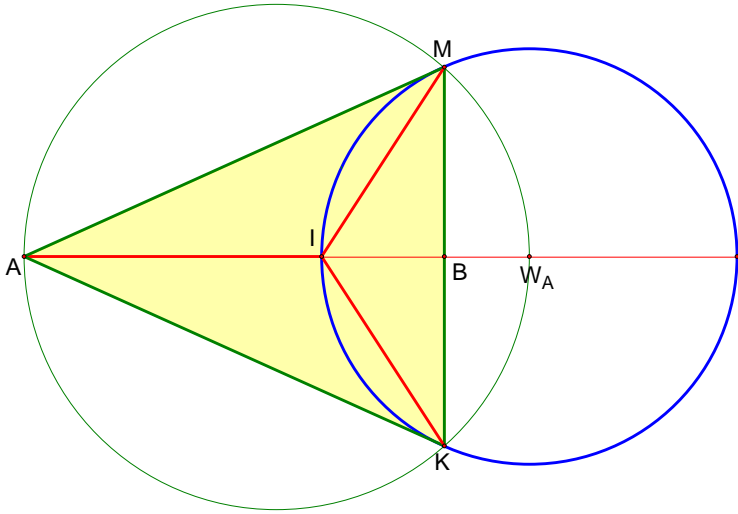


Рис. 10:

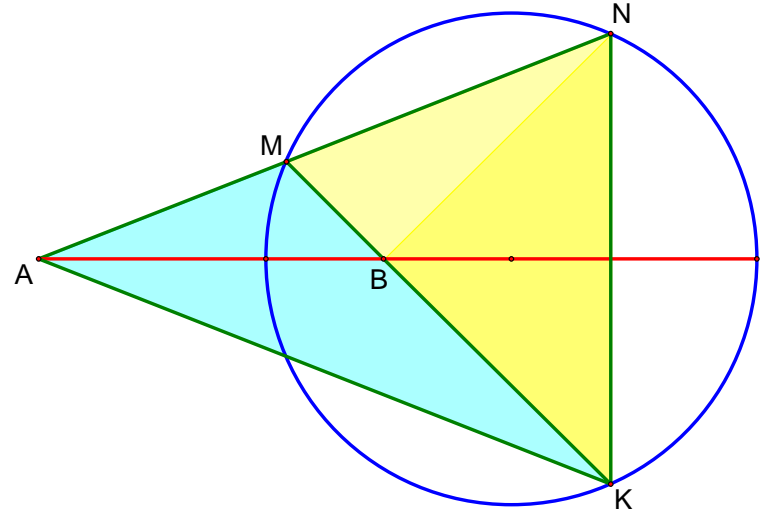


Рис. 11:

Перейдем теперь к секущим.

**Теорема 4 (флажок).** *Рассмотрим произвольные секущие  $AM$  и  $BM$  окружности Аполлония  $Apoll(A, B)$ , вторично пересекающие ее в точках  $N$  и  $K$  соответственно. Точки  $N$  и  $K$  симметричны относительно прямой  $AB$ .*

*Обратно, если взять произвольную секущую  $AM$ , вторично пересекающую окружность  $\omega$  в точке  $N$ , отразить точку  $N$  в точку  $K$  симметрично относительно прямой  $\ell$ , проходящей через  $A$  и центр окружности Аполлония, и рассмотреть точку  $B$  пересечения прямой  $BK$  с прямой  $\ell$ , то окружность  $\omega$  является окружностью Аполлония  $Apoll(A, B)$  для пары точек  $A$  и  $B$  (см. рис. 11). В частности, это означает, что вне зависимости от выбора точки  $M$  все прямые  $MK$  пересекаются в одной точке.*

*Замечание 3.* Конфигурацию в этой теореме мы будем называть «флажком», поскольку траектория ломаной  $AMNKМ$  напоминает полотнище флага и древко.

*Доказательство.* Докажем первое утверждение теоремы. Согласно утверждению 3, прямая  $AB$  является биссектрисой в синем треугольнике  $AMK$ . Рассмотрим осевую симметрию  $S_{AB}$  относительно этой прямой. Тогда эта осевая симметрия переведет луч  $[AM)$  в луч  $[AK)$ , а окружность Аполлония она переведет в себя. Значит, точка  $N$  пересечения луча  $[AM)$  с окружностью Аполлония перейдет в точку  $K$  пересечения луча  $[AK)$  с окружностью Аполлония.  $\square$

**Упражнение.** Докажите второе утверждение теоремы о флажке.

В заключение этого раздела покажем красивый пример, использующий доказанные нами теоремы о флажке и касательных. Рассмотрим равнобокую трапецию  $MNKP$ , вписанную в окружность. Пусть  $A$  — точка пересечения ее боковых сторон, а  $B$  — точка пересечения ее диагоналей. Проведем касательные к окружности из точки  $A$ . Тогда точка  $B$  лежит на отрезке, соединяющем точки касания (см. рис. 12).

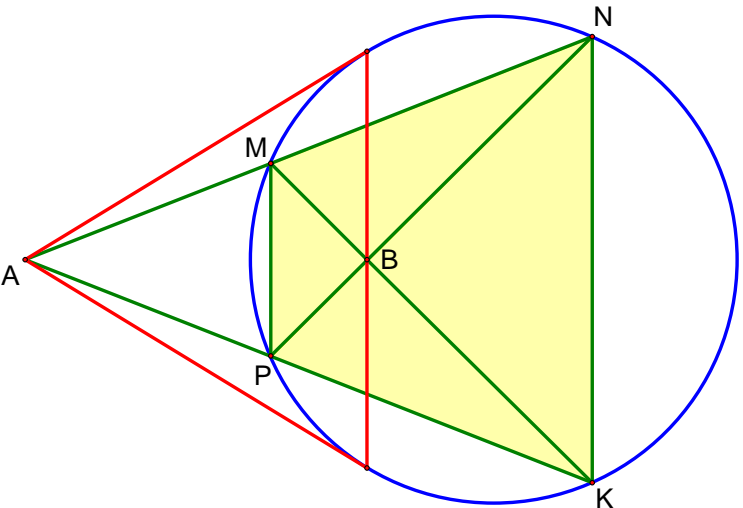


Рис. 12:

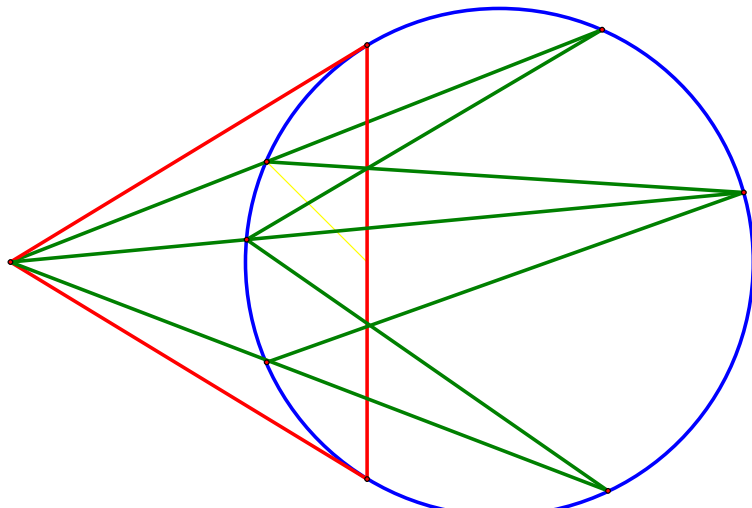


Рис. 13:

В самом деле, в конфигурации этой задачи можно увидеть два способа построения точки  $B$ , превращающей описанную окружность трапеции в окружность Аполлония  $Apoll(A, B)$ : касательные и флажок.

Отметим, однако, что верно и более общее утверждение: если взять произвольный четырехугольник, вписанный в данную окружность, стороны которого пересекаются в фиксированной точке  $A$ , то точки пересечения диагоналей таких четырехугольников лежат на прямой, соединяющей точки касания касательных, проведенных к окружности из точки  $A$  (рис. 13). Однако доказательство этого утверждения, по всей видимости, обязательно требует применения либо инверсии, либо проективной геометрии, которыми мы пока что не владеем.

## 6 Высоты и окружность Аполлония

В этом разделе мы установим связь окружности Аполлония и высот в треугольнике. Само наличие подобной связи выглядит далеко не очевидным, поскольку, как мы выяснили выше, окружность Аполлония тесно связана с биссектрисами. Каким образом здесь появляются еще и высоты? Ответ на этот вопрос мы получим в следующем разделе.

### 6.1 Теорема об ортотреугольнике

Ключевая теорема, устанавливающая связь между высотами треугольника и окружностью Аполлония, звучит следующим образом.

**Теорема 5** (об ортотреугольнике). *Высоты треугольника являются биссектрисами его ортотреугольника.*

Мы приведем сразу два доказательства этой теоремы. Отметим, что оба этих доказательства не используют теорем о вписанных углах.

*Первое доказательство.* Данное доказательство использует в себе точки  $W$ . Рассмотрим треугольник  $ABC$  и его ортотреугольник  $A_1B_1C_1$ . Описанная окружность ортотреугольника является окружностью Эйлера треугольника  $ABC$  и проходит через середину  $H_A$  отрезка  $AH$ . Поскольку  $B_1H_A = C_1H_A$  (медианы в прямоугольных треугольниках), точка  $H_A$  является точкой  $W$  треугольника  $A_1B_1C_1$  (она лежит на его описанной окружности и равноудалена от двух его вершин; см. рис. 14). Значит, прямая  $AH$  является биссектрисой треугольника  $A_1B_1C_1$ . Доказательство для других биссектрис аналогично.  $\square$

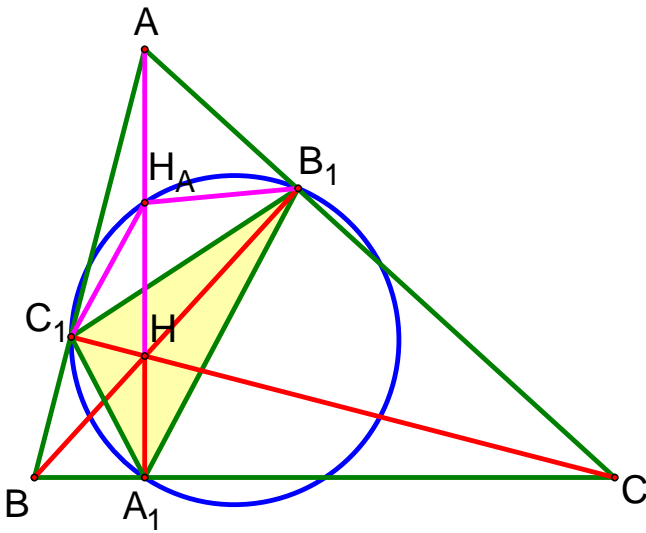


Рис. 14:

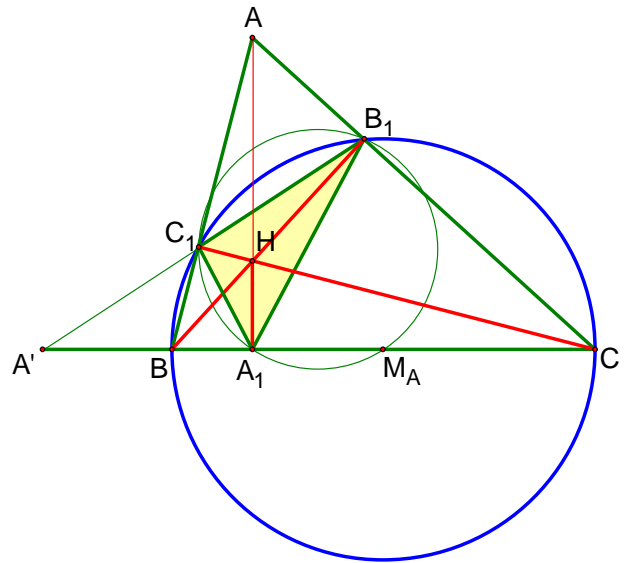


Рис. 15:

*Второе доказательство.* Данное доказательство будет использовать развитую нами ранее теорию, связанную с окружностью Аполлония. Рассмотрим точку  $A'$  пересечения прямых  $BC$  и  $B_1C_1$  и описанную окружность  $\omega$  четырехугольника  $BC_1B_1C$  (отрезок  $BC$  является диаметром этой окружности, поскольку на него смотрят два прямых угла). Рассмотрим точку  $A'_1$ , такую, что эта окружность превращается в окружность Аполлония  $Apoll(A', A'_1)$  (такая точка всегда существует и единственна согласно теореме о касательных). Тогда согласно следствию 2 из утверждения 4, четыре точки  $B_1, C_1, M_A, A'_1$  лежат на одной окружности (здесь  $M_A$  — середина отрезка  $BC$  и центр окружности Аполлония). Однако окружность, проходящая через точки  $B_1, C_1$  и  $M_A$ , является окружностью Эйлера треугольника  $ABC$ , поэтому вторая ее точка пересечения со стороной  $BC$  является основанием высоты  $A_1$ . Итак, точки  $A'_1$  и  $A_1$  совпадают, и окружность  $\omega$  является окружностью Аполлония  $Apoll(A', A_1)$  (см. рис. 15). Наконец, применяя предложение 1, получаем, что отрезки  $BB_1, CC_1$  и  $AA_1$  являются биссектрисами в треугольнике  $A_1B_1C_1$ , что и требовалось доказать.  $\square$

Отметим, что второе доказательство выглядит более сложным, но зато оно более четко демонстрирует связь окружности Аполлония и высот в треугольнике. Оказывается, что уже знакомая нам по сюжету об окружности Эйлера описанная окружность четырехугольника  $BC_1B_1C$  является окружностью Аполлония для естественных точек  $A'$  и  $A_1$ !

Но существует еще одна замечательная окружность, связанная с окружностью Эйлера, — это описанная окружность  $\Omega$  четырехугольника  $AB_1HC_1$ . Является ли и эта окружность окружностью Аполлония для некоторой пары точек?!

Оказывается, да! Причем таких пар можно указать сразу две!

Начнем с более простой пары. Для этого обозначим через  $Q$  точку пересечения высоты  $AA_1$  и прямой  $B_1C_1$ . Тогда  $\Omega = \text{Apoll}(A_1, Q)$  (см. рис. 16).

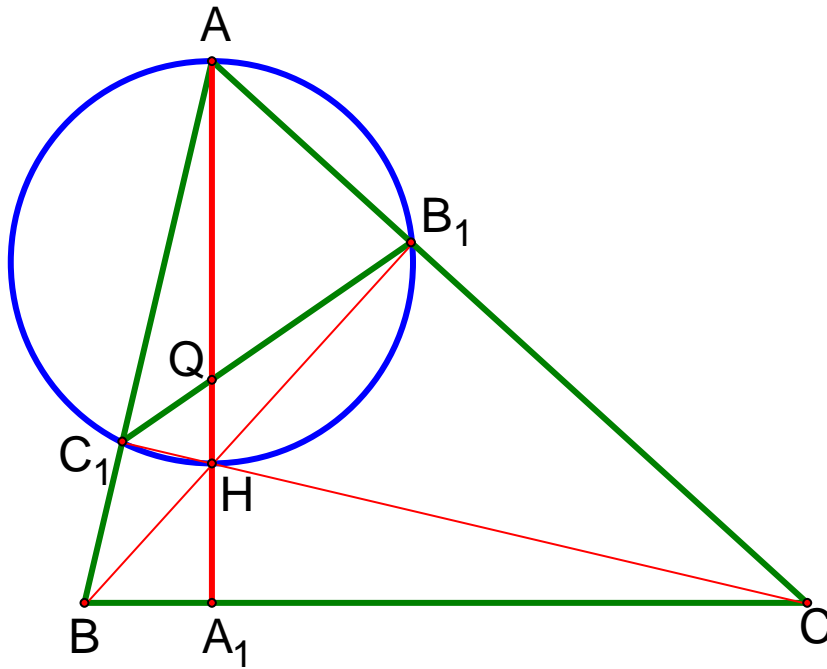


Рис. 16:

**Упражнение.** Докажите это утверждение.

Теперь перейдем к изучению второй (и более интересной!) пары точек, превращающей окружность  $\Omega$  в окружность Аполлония. Для начала докажем следующее красивое утверждение.

**Предложение 5.** Рассмотрим точку  $F$  пересечения описанной окружности  $\omega$  четырехугольника  $BC_1B_1C$  с высотой  $AA_1$ . Тогда отрезок  $A'F$  является касательной к окружности  $\omega$  (см. рис. 17).

*Доказательство.* В самом деле, из второго доказательства теоремы об ортотреугольнике следует, что окружность  $\omega$  является окружностью Аполлония  $\text{Apoll}(A', A_1)$ . Осталось применить к этой окружности теорему о касательных.  $\square$

Наконец, докажем следующее утверждение.

**Предложение 6.** Рассмотрим точку  $F'$ , симметричную точке  $F$  относительно прямой  $BC$ . Тогда окружность  $\Omega$  является окружностью Аполлония для пары точек  $F$  и  $F'$  (см. рис. 18).



*Доказательство.* Заметим, что точки  $B$  и  $C$  являются точками  $W$  для треугольника  $FF'B_1$  (и треугольника  $FF'C_1$ ), поскольку они лежат на его описанной окружности и серединном перпендикуляре к отрезку  $FF'$ . Значит, отрезки  $B_1H$  и  $B_1A$  являются биссектрисами внутреннего и внешнего углов треугольника  $FF'B_1$ . Применяя утверждение 1, получаем требуемое.  $\square$

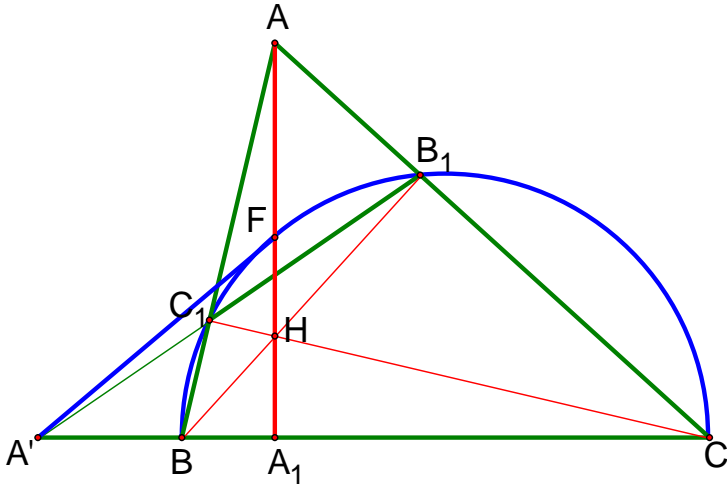


Рис. 17:

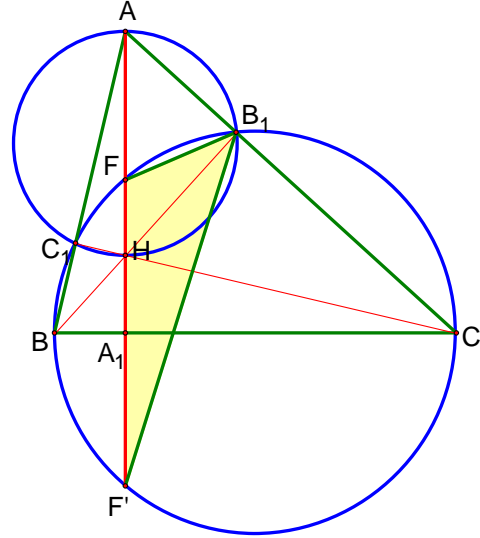


Рис. 18:

## 6.2 Задача Фаньяно и теорема синусов

Доказанная нами в предыдущем разделе теорема об ортотреугольнике позволяет решить одну из самых известных геометрических задач на максимум и минимум: задачу Фаньяно. Звучит эта задача следующим образом: *вписать в данный треугольник треугольник минимального периметра*. В этом разделе мы решим эту задачу и выведем из ее решения теорему синусов — одну из самых важных теорем школьной геометрии, используемых для вычислений.

**Теорема 6.** *Треугольником наименьшего периметра, вписанным в данный остроугольный треугольник, является ортотреугольник.*

*Доказательство.* Рассмотрим произвольный *остроугольный* треугольник  $ABC$  (дело в том, что для прямо- и тупоугольных треугольников решение задачи Фаньяно вырожденное: ответом является высота, проведенная к наибольшей стороне) и произвольный треугольник  $A_1B_1C_1$ , вписанный в него. Поскольку вычислять периметр такого треугольника, просто складывая длины его сторон, неудобно, поступим следующим образом. Попробуем *выпрямить* эти стороны, т.е. каким-то образом перебросить их на отрезки, лежащие на одной прямой. Самый простой способ сделать это — осевая симметрия.

Рассмотрим образы  $A'_1C_1$  и  $A''_1B_1$  отрезков  $A_1C_1$  и  $A_1B_1$  при осевых симметрии относительно прямых  $AB$  и  $AC$  соответственно (см. рис. 19). Тогда периметр треугольника  $A_1B_1C_1$  равен длине ломаной  $A'_1C_1B_1A''_1$ . Но эта длина не превосходит длины отрезка  $A'_1A''_1$  по неравенству ломаной. Значит, для того, чтобы периметр треугольника  $A_1B_1C_1$  был бы минимальным, необходимо (но не достаточно!), чтобы точки  $B_1$  и  $C_1$  лежали бы на отрезке  $A'_1A''_1$ .

Отметим, что уже по этому соображению можно догадаться, что ответом в задаче Фаньяно действительно является ортотреугольник. В самом деле, из предыдущего рассуждения следует, что стороны  $AB$  и  $AC$  являются биссектрисами внешних углов треугольника  $A_1B_1C_1$ . Ясно, что и сторона  $BC$  будет биссектрисой. Но, как следует из теоремы об ортотреугольнике, для него стороны треугольника  $ABC$  также являются биссектрисами! Поэтому нам нужно убедиться, что других треугольников  $A_1B_1C_1$  с таким свойством не существует.

Для этого вычислим длину отрезка  $A_1A_1''$ . Рассмотрим равнобедренный треугольник  $AA_1A_1''$ . Его боковые стороны равны отрезку  $AA_1$ , а угол при вершине равен  $2\alpha$ , где  $\alpha = \angle BAC$ . Поэтому  $p(\triangle A_1B_1C_1) = A_1A_1'' = AA_1 \cdot \sin \alpha$ . Поскольку угол  $\alpha$  фиксирован, полупериметр треугольника  $A_1B_1C_1$  будет минимальным тогда и только тогда, когда минимальна длина отрезка  $AA_1$ . Но этот минимум реализуется, когда  $AA_1$  — высота треугольника  $ABC$  (см. рис. 20).

Итак, вершина  $A_1$  треугольника  $A_1B_1C_1$  минимального периметра должна совпадать с основанием высоты. осталось провести аналогичные рассуждения для вершин  $B_1$  и  $C_1$ .  $\square$

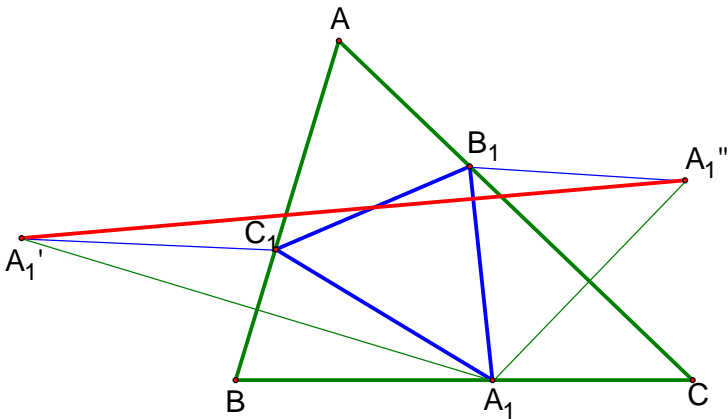


Рис. 19:

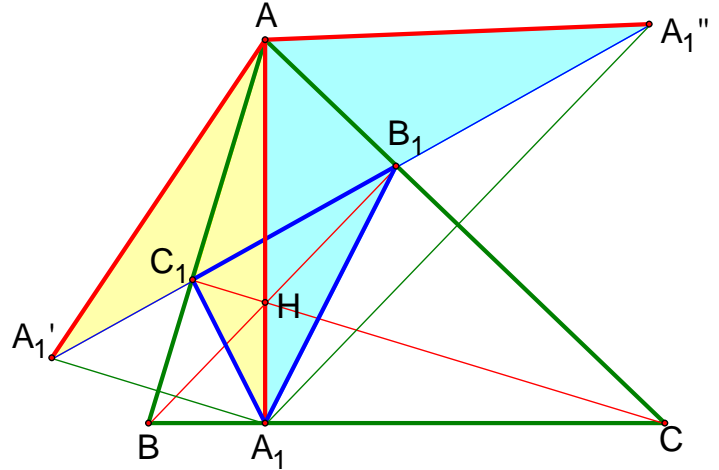


Рис. 20:

Заметим, что заключительную часть рассуждения, связанную с вычислением полупериметра, можно было бы провести чисто геометрически, с помощью неравенств (можете попробовать сделать это). Однако мы выбрали тригонометрические вычисления, которые, как мы сейчас увидим, приводят к совершенно неожиданным результатам, напрямую не связанным с задачей Фаньяно!

Начнем с того, что мы по ходу решения задачи Фаньяно доказали следующую замечательную формулы (или, точнее, формулы):

$$h_a \cdot \sin \alpha = h_b \cdot \sin \beta = h_c \cdot \sin \gamma = p(\triangle A_1B_1C_1) \quad (2)$$

(здесь  $h_a, h_b, h_c$  — длины высот, проведенных из вершин  $A, B, C$  треугольника  $ABC$  соответственно,  $\alpha, \beta, \gamma$  — это градусные меры его углов, а  $p(\triangle A_1B_1C_1)$  — полупериметр его ортотреугольника).

Это равенство — первое тригонометрическое соотношение в *произвольном* (не прямоугольном!) треугольнике<sup>2</sup>. Это действительно невероятно, ведь по своему определению синусы и косинусы вычисляются лишь в прямоугольных треугольниках, поэтому трудно ожидать их появления где-либо еще. А на самом деле они появляются в абсолютно любых треугольниках, причем в гораздо более разнообразных формах!

Правда, здесь можно возразить, что хоть и доказанная нами формула красива, она вряд ли может быть использована на практике. Все же чаще в условиях задач встречаются длины  $a$ ,  $b$ ,  $c$  сторон треугольника, а не длины его высот. . .

Однако высоты порождают прямоугольные треугольники! Давайте попробуем этим воспользоваться. А именно, выразим длины высот  $h_b$  и  $h_c$  через длины сторон  $b$  и  $c$  и угол  $\alpha$ . Имеем:  $h_b = c \cdot \sin \alpha$  и  $h_c = b \cdot \sin \alpha$ . Подставляя эти равенства в (2) и упрощая, получаем следующее равенство:  $\frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$ . Проводя аналогичное рассуждение для пары сторон  $a$  и  $b$ , получаем, что  $\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta}$ . Таким образом, справедливо следующее равенство:

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}. \quad (3)$$

Это равенство и называется *теоремой синусов*.

По сути эта теорема является вычислительным аналогом второго признака равенства треугольников, утверждающего, что два треугольника равны по стороне и двум прилежащим к ней углам. Т.е., зная длину стороны  $a$  и градусные меры углов  $\beta$  и  $\gamma$ , можно однозначно задать весь треугольник. Теорема синусов (3) как раз и позволяет *явно* вычислить стороны  $b$  и  $c$ , зная величины  $a$ ,  $\beta$  и  $\gamma$ : сначала мы находим угол  $\alpha = 180^\circ - \beta - \gamma$ , а затем получаем

$$b = a \cdot \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} \quad \text{и} \quad c = a \cdot \frac{\sin \gamma}{\sin \alpha}.$$

*Замечание 4.* Оказывается, что теорему синусов можно уточнить. А именно, верно еще одно соотношение:

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R,$$

где  $R$  — радиус описанной окружности треугольника. Именно в таком виде эта теорема наиболее часто используется в задачах. Однако для ее доказательства, по всей видимости, необходимо использовать вписанные углы.

### 6.3 Кое-что из геометрии Лобачевского

В заключение нашего рассказа об окружности Аполлония мы расскажем о совершенно неочевидной ее связи с так называемой *геометрией Лобачевского*. Наверное, многие из вас слышали об этой загадочной геометрии, где через точку можно провести много прямых, параллельных данной, где сумма углов треугольника меньше  $180^\circ$  и которая является математическим аппаратом для специальной теории относительности. Однако, наверное, мало кто представлял, что существуют тесные связи между геометриями Евклида и Лобачевского, казалось бы, такими разными! Причем эти связи не односторонние: как геометрия Евклида помогает доказывать различные утверждения в геометрии Лобачевского, так и наоборот, геометрия Лобачевского может прояснить некоторые явления из геометрии Евклида. Оказывается, что именно такая ситуация наблюдается, если попробовать посмотреть на окружность Аполлония с точки зрения неевклидовой геометрии!

<sup>2</sup>Хотя в начале решения задачи Фаньяно мы договорились, что будем рассматривать только остроугольные треугольники, рассуждения, которые приводят к вычислению полупериметра ортотреугольника, справедливы всегда.

Рассмотрим модель Пуанкаре в верхней полуплоскости геометрии Лобачевского. Напомним, что в этой модели прямыми являются полуокружности с центром на выделенной прямой (называемой абсолют) и лучи, перпендикулярные этой прямой (см. рис. 21). Можно доказать, что в геометрии Лобачевского сумма углов треугольника меньше  $180^\circ$  (в этом легко убедиться, рассмотрев треугольник на рис. 22). Отсюда в свою очередь следует, что в геометрии Лобачевского справедлив четвертый признак равенства треугольников: треугольники равны по трем углам (оказывается, в геометрии Лобачевского нет подобия)! Наконец, из четвертого признака равенства треугольников вытекает, что инверсия относительно полуокружности является движением плоскости Лобачевского (на самом деле это аналог осевой симметрии в евклидовой геометрии).

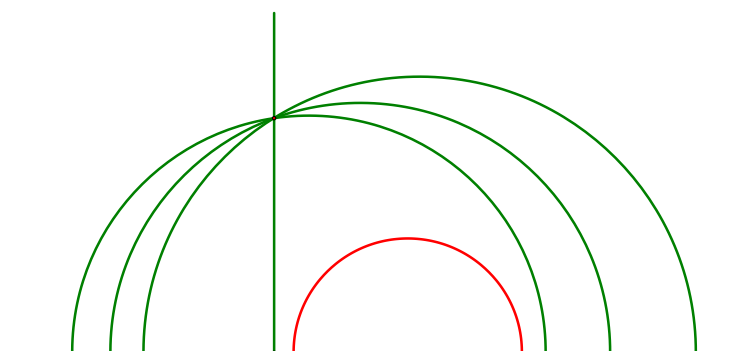


Рис. 21:

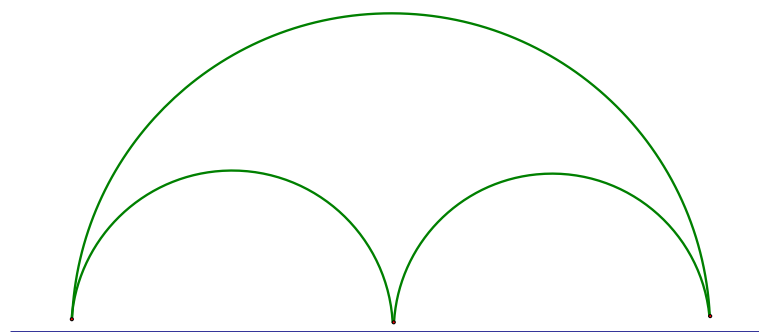


Рис. 22:

Теперь решим следующую задачу. Попробуем разделить неевклидов отрезок пополам циркулем и линейкой. Сразу отметим, что взять в качестве середины отрезка середину соответствующей дуги евклидовой полуокружности, не получится! Ведь длина неевклидова отрезка — это вовсе не длина соответствующей евклидовой дуги (иначе неевклидова прямая имеет конечную длину)! Оказывается, что построить середину неевклидова отрезка можно, не зная, чему равна его длина (и даже не зная, как в принципе ее можно найти)!

Для этого возьмем неевклидов отрезок  $MN$  и проведем евклидову прямую  $MN$ , пересекающую абсолют в точке  $A'$ . Из этой точки проведем касательную  $A'F$  к полуокружности  $\omega$ , на которой лежит неевклидов отрезок  $MN$  (см. рис. 23). Мы утверждаем, что точка  $F$  есть середина неевклидова отрезка  $MN$ .

Почему? Действительно, рассмотрим инверсию относительно окружности с центром в точке  $A'$  и радиусом  $A'F$ . Эта окружность ортогональна  $\omega$ , поэтому переводит ее в себя. Поэтому точка  $M$  переходит в точку  $N$ , отрезок  $MF$  — в отрезок  $NF$ , а значит, они равны, поскольку инверсия является движением.

Обратим внимание на то, что рис. 23 очень похож на рис. 9, связанный с окружностью Аполлония! Давайте отметим точки  $B$  и  $C$  пересечения окружности  $\omega$  с абсолют и проведем прямые  $BM$  и  $CN$ , пересекающиеся в точке  $A$ , и прямые  $CN$  и  $BM$ , пересекающиеся в точке  $H$  (см. рис. 24).

**Упражнение.** Докажите, что точки  $A$ ,  $F$  и  $H$  лежат на одной прямой.

Обозначим через  $P$  точку пересечения прямой  $AF$  с абсолютом. Тогда окружность  $\omega$  превращается в окружность Аполлония  $Apoll(A', P)$ .

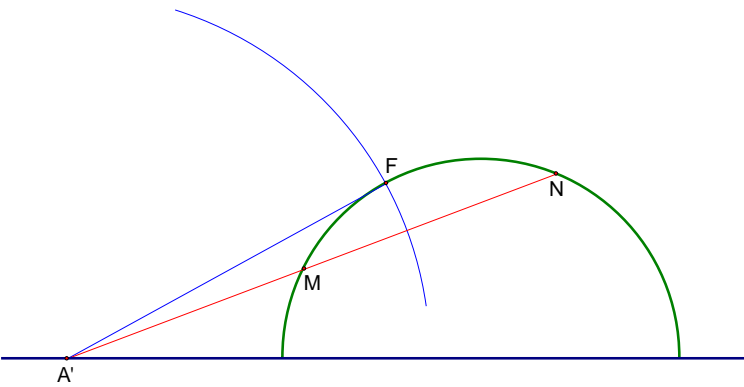


Рис. 23:

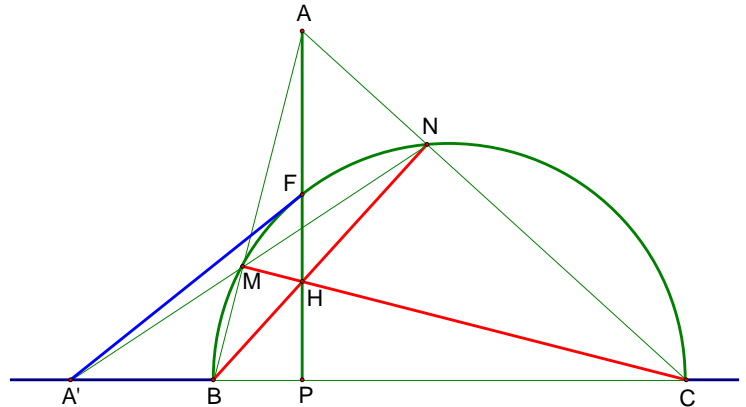


Рис. 24:

Рассмотрим теперь неевклидовы отрезки  $FM$ ,  $FH$ ,  $FN$  и  $FA$ .

**Предложение 7.** *Эти неевклидовы отрезки равны.*

*Доказательство.* Равенство отрезков  $MF$  и  $NF$  доказано выше. Докажем, что равны отрезки  $MF$  и  $AF$  (для пары отрезков  $NF$  и  $HF$  доказательство аналогично). Рассмотрим инверсию относительно окружности с центром в точке  $B$  и радиусом  $BF$ . Эта инверсия переведет полуокружность  $\omega$  в луч  $PA$ , потому что полуокружность  $\omega$  проходит через центр инверсии, точку  $F$  и ортогональна абсолюту. Значит, точка  $M$  при такой инверсии перейдет в  $A$  и  $MF = AF$ , что и требовалось доказать.  $\square$

Таким образом, четыре точки  $A$ ,  $M$ ,  $H$  и  $N$  лежат на одной неевклидовой окружности с центром в точке  $F$ . Однако можно доказать, что неевклидова окружность по форме совпадает с евклидовой (только с другим центром), поэтому евклидову окружность  $\Omega$  с рис. 15 можно рассматривать как неевклидову окружность с центром в точке  $F$ .

А теперь применим утверждение 6, согласно которому окружность  $\Omega$  (рассматриваемая как евклидова окружность) является окружностью Аполлония  $Apoll(F, F')$  для пары точек  $F$  и  $F'$  (здесь  $F'$  — точка, симметричная  $F$  относительно абсолютa). Зафиксируем окружность  $\omega$  и точки  $B$ ,  $F$ ,  $C$  и  $F'$ , а точки  $M$  и  $N$  будем двигать таким образом, чтобы  $F$  оставалась серединой отрезка  $MN$  (для этого достаточно двигать точку  $A'$  и отмечать точки пересечения луча, выходящего из  $A'$ , с окружностью  $\omega$ ). Тогда окружность  $\Omega$  тоже будет меняться, причем с точки зрения евклидовой геометрии она всегда будет окружностью Аполлония для пары неподвижных точек  $F$  и  $F'$ , а с точки зрения неевклидовой геометрии — это просто пучок концентрических окружностей с центром в точке  $F$ .

Таким образом, мы доказали следующее потрясающее утверждение: *пучок окружностей Аполлония является пучком концентрических окружностей с точки зрения геометрии Лобачевского!*

Совершенно невероятно, что на пути из геометрии Евклида в геометрию Лобачевского мы не только активно использовали разнообразные результаты, доказанные нами в предыдущих разделах, но и развивали саму геометрию Лобачевского, которая также позволяет взглянуть на окружности Аполлония под совершенно неожиданным углом. В который раз мы убеждаемся, что математика — это единая наука, и казалось бы, далекие ее области на самом деле тесно связаны между собой.