

Конкурс ВМШ 2017-2018

Лист 1

1. **Соответствие.** В школе волшебства состоялся экзамен по левитации. Мальчиков, сдавших экзамен, оказалось столько же, сколько девочек, не сдавших его. Кого больше в этой школе: девочек или сдавших экзамен по левитации?

2. **Четность.** Петя выписал произвольные 17 натуральных чисел, а Ваня хочет убрать одно из них так, чтобы сумма оставшихся была четной. Всегда ли Ваня сможет это сделать?

3. **Пироги.** Если Робин-Бобин приходит в школу, то на каждой перемене между уроками этого дня он съедает один пирог. За год он побывал на 499 уроках и съел 350 пирогов. Сколько дней в году Робин-Бобин посетил школу?

4. **Таблица.** Таблица 3x3 заполнена нулями. За один ход можно выбрать в ней любой квадрат 2x2 и увеличить каждое число в нем на 1. Можно ли за несколько ходов получить квадрат, показанный на рисунке?

3	10	7
8	19	13
5	11	6

№	Название	Ответы, идеи
1	Соответствие	Равны. Заменяем несдавших девочек на сдавших мальчиков.
2	Четность	Всегда. Если сумма всех четная, то найдется четное. Если сумма всех нечетная, то найдется нечетное.
3	Пироги	149. Каждый день число уроков на 1 больше числа пирогов.
4	Таблица	Нельзя. Число в центре должно равняться сумме угловых.

Лист 2

1. **Деление.** Найдите все такие натуральные числа, при делении которых на 5 в частном получается то же число, что и в остатке.

2. **Кубики.** У Вани 100 кубиков – красных, синих и зеленых. 75 – не красные, 60 – не синие. Сколько зеленых кубиков у Вани?

3. **Ручки.** Магазин купил на фабрике ручки и продает их по 100 рублей. Если покупатель купит две ручки, то третью ему дадут в подарок. Известно, что магазин получает одну и ту же прибыль как от продажи одной ручки, так и от продажи двух ручек. По какой цене магазин купил ручки на фабрике? (Прибыль – это разность между стоимостью продажи и стоимостью покупки).

4. **Разрезалка.** Разрежьте квадрат 7x7 на 10 различных прямоугольников с целыми сторонами. Прямоугольники одинаковые, если их можно совместить.

№	Название	Ответы, идеи
1	Деление	6, 12, 18, 24
2	Кубики	Зеленых 35
3	Ручки	50 руб.
4	Разрезалка	Разбиение на пары по длине стороны 1x1+1x6, 1x2+1x5, 1x3+1x4, 2x2+2x5, 2x3+2x4

Лист 3

1. **Будильник.** У Сони неторопливый будильник: за каждый час он отстает на 3 минуты. Сейчас на этом будильнике 11:41. Через сколько минут на нем будет 12.00?
2. **Возрасты.** Терри сейчас вдвое меньше лет, чем было Алисе, когда она была на 5 лет старше, чем Терри сейчас. Сколько лет Терри сейчас?
3. **Волосы.** Волосы на голове у Печкина растут равномерно, каждый волос живет ровно 1500 дней, а потом выпадает, каждый день выпадает ровно 100 волос. Сколько волос на голове у Печкина?
4. **Клетки.** Каким наименьшим числом прямых можно зачеркнуть все клетки доски 3×3 ? Касание – это не зачеркивание. Клетка зачеркнута, если прямая пересекает ее на две части.

№	Название	Ответы, идеи
1.	Будильник	20 минут. $19 / 57 \times 60$
2.	Возрасты	5 лет
3.	Волосы	150 тыс. За 1500 дней выпадут все волосы, которые есть сегодня
4.	Клетки	Двумя. Нельзя зачеркнуть одной прямой три угловые клетки

Лист 4

1. **Шарики.** В ящике 10 белых, 15 синих и 20 красных шариков. Какое наименьшее число шариков нужно вытащить, не видя их цвета, чтобы среди вытасненных шариков обязательно оказалось три шарика одного цвета?
2. **Разность.** Есть 6 карточек с цифрами 1, 2, 3, 4, 5, 6. Из них можно составить два трехзначных числа. Если вычесть из большего числа меньшее, то какую наименьшую разность можно получить?
3. **Делимое.** Делимое в 6 раз больше делителя, а делитель в 6 раз больше частного, остатка нет. Чему равны делимое, делитель и частное?
4. **Множества.** Петя посчитал число шахматистов в классе, кроме тех шахматистов, которые не отличники, а Вася посчитал тех отличников, кроме тех отличников, которые не шахматисты. Верно ли, что у них получились одинаковые числа?

№	Название	Ответы, идеи
1.	Шарики	7
2.	Разность	$412 - 365 = 47$
3.	Делимое	$316 : 36 = 6$
4.	Множества	Верно, это пересечение двух множеств

Лист 5

- Воскресенья.** Какое наименьшее число воскресений может быть в году?
- Периметр.** Диагональ делит четырехугольник с периметром 31 см на два треугольника с периметрами 21 и 30 см. Найдите длину этой диагонали.
- Хоровод.** В хороводе стоят 30 детей. Правый сосед каждой девочки – мальчик. У половины мальчиков правый сосед – тоже мальчик, а у остальных мальчиков справа стоит девочка. Сколько мальчиков в хороводе?
- Великаны.** Илья Муромец, Добрыня Никитич и Алеша Попович вступили в бой с великанами. Все великаны, получив по три удара богатырскими палицами, обратились в бегство. Больше всех ударов нанес Илья – 7, меньше всех Алеша – 3. Сколько великанов обратилось в бегство?

№	Название	Ответы, идеи
1.	Воскресенье	52 (в полных неделях есть воскресенье, а в неполной - не всегда)
2.	Периметр	10
3.	Хоровод	20 мальчиков
4.	Великаны	5 великанов. Делимость на 3.

Лист 6

- Прирост.** Каждую из сторон прямоугольника, периметр которого равен 16,2 см, увеличили на 1 см. На сколько при этом увеличилась площадь прямоугольника?
- Гири.** Имеется 6 одинаковых по виду монет: 3 настоящих и 3 фальшивых, которые легче настоящих и весят одинаково. Как за 2 взвешивания на чашечных весах без гирь найти две настоящие монеты?
- Повторы.** Компьютер каждую секунду выполняет две операции: умножает число на 2, затем из результата вычитает 0,123 и т.д. Придумайте начальное число, чтобы через 100 секунд компьютер получил такое же число.
- Делимость.** Докажите, что при любых цифрах А и В шестизначное число \overline{ABABAB} делится на 7.
- Шары.** В ящике 70 шаров: 20 красных, 20 зеленых, 20 желтых, остальные – черные и белые. Какое наименьшее число шаров нужно вытащить в темноте, чтобы среди них обязательно нашлись 10 шаров одного цвета? Шары отличаются только цветом.

№	Название	Ответы, идеи
1.	Прирост	На 9,1 см ²
2.	Гири	1) 3 и 3; 2) из «тяжелых» 1 и 1
3.	Повторы	$X = 0,123$. $X = 2X - 0,123$
4.	Делимость	$\overline{ABABAB} = \overline{AB} \cdot 10101 = \overline{AB} \cdot 7 \cdot 1443$
5.	Шары	38 шаров. 9 + 9 + 9 + 10 + 1

Лист 7

- 1. Грани.** Можно ли раскрасить грани куба в три цвета так, чтобы каждый цвет присутствовал, но нельзя было увидеть одновременно грани всех трех цветов. Одновременно можно увидеть только три грани с общей вершиной.
- 2. Лжецы.** По кругу стоят 10 человек. Каждого спросили, кто стоит справа от него, рыцарь или лжец? Могло ли так случиться, что ровно один человек ответил: «лжец»? Каждый из них либо рыцарь, либо лжец.
- 3. Фотографы.** Спортсмен пробежал один круг с постоянной скоростью. В точках круга А и Б стояли два фотографа. В течении 3 минут спортсмен был ближе к А, чем к Б. За какое время он пробежал дистанцию?
- 4. Олимпиада.** В олимпиаде по математической лингвистике участвовали математики и лингвисты. Мальчиков было 18, а математиков было 24. Мальчиков-математиков было столько же, сколько девочек-лингвистов. Сколько всего детей участвовало в олимпиаде?

№	Название	Ответы, идеи
1.	Грани	Противоположные – синяя и красная, боковые грани – желтые.
2.	Лжецы	Ответ «лжец» только на границах между рыцарями и лжецами.
3.	Фотографы	Ответ: 6. Середины дуг образуют диаметр.
4.	Олимпиада	Ответ: 42

Лист 8

- 1. Шарик.** В Радужном городе живут 100 чебурашек. У каждого из них есть 7 воздушных шариков – по одному шарик у каждого из цветов радуги. Могут ли чебурашки поменяться своими шариками так, чтобы у каждого оказались шарик только какого-то одного цвета?
- 2. Скамейки.** Зрители сели на скамейки по 3 человека, и троим не хватило места. Когда они сели по 4 человека, то 3 скамейки оказались лишними. Сколько было зрителей?
- 3. Соседи.** Сколькими способами на шахматной доске (8×8) можно отметить две соседние по стороне клетки?
- 4. Пазл.** Паша клеил картину-пазл. За одну минуту он склеивал вместе 2 куса (начальных или уже склеенных). В результате он затратил на склеивание пазла 2 часа. За какое время он закончил бы работу, если бы склеивал за одну минуту не по 2, а по 3 куса?

№	Название	Ответы, идеи
1.	Шарик	Ответ: нельзя . 100 не делится на 7.
2.	Скамейки	Ответ: 48 . Пусть x – число скамеек, $3x + 3 = 4(x - 3)$; $x = 15$; $15 \times 3 + 3 = 48$
3.	Соседи	Ответ: 112 . По горизонтали 7×8 , по вертикали 7×8
4.	Пазл	Ответ: 1 час . Прибавлялось по 1, а стало прибавляться по 2.

Лист 9

- Среднее.** Сумма трех различных натуральных чисел равна 99. Какое наибольшее значение может принимать среднее по величине число?
- Эскалатор.** Двое бегут с разной скоростью вниз по ходу эскалатора метро. Кто из них насчитает больше ступенек — тот, кто бежит быстрее, или тот, кто бежит медленнее? (Считают пройденные ступеньки).
- Фонари.** Расположите на плоскости несколько фонарей, которые светят только в одном направлении (вершина и луч) так, чтобы ни к одному фонарю нельзя было подойти ближе, чем на 1 м, не попав под луч одного из фонарей.
- Письма.** В компании 10 друзей, и каждый послал 5 писем разным друзьям в этой компании. Докажите, что какие-то двое послали письма друг другу.

№	Название	Ответы, идеи
1.	Среднее	48. Наименьшее число не меньше 1, среднее не больше 48.
2.	Эскалатор	Быстрый насчитает больше, т.к. эскалатор «съест» меньше.
3.	Фонари	Например: 
4.	Письма	Кто-то получил ≥ 5 писем, но он не посылал только четверым.

Лист 10

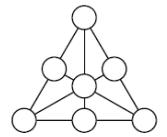
- Кот.** С полудня до полуночи Ученый Кот спит под дубом, а с полуночи до полудня он рассказывает сказки. Табличка на дубе говорит: «Два часа назад Учёный Кот делал то же, что он будет делать через час». Сколько часов в сутки табличка говорит правду?
- Делители.** Простые числа имеют ровно два различных делителя — единицу и само это число. А какие числа имеют ровно три различных делителя?
- Вставка.** Существуют ли такие три треугольника, что первый нельзя поместить во второй, второй нельзя поместить в третий, но первый можно поместить в третий?
- Тетради.** Тетрадь, ручка и карандаш стоят 120 рубля. А 5 тетрадей, 2 ручки и 3 карандаша стоят 350 рублей. Что дороже, 2 тетради или 1 ручка?

Кот	Ответ: 18. Надпись на табличке правдива с 2 часов дня до 11 вечера и с 2 часов ночи до 11 дня. $9 + 9 = 18$.
Делители	Квадраты простых чисел. Почему не могут быть разные простые делители?
Вставка	Существует много примеров.
Ручки	Ручка дороже, чем 2 тетради (на 10 руб.)

Лист 11

1. Углы. Можно ли на плоскости отметить 100 точек так, чтобы любые три из них были вершинами тупоугольного треугольника?

2. Шаги. Папа, Маша и Яша идут в школу. Пока папа делает 3 шага, Маша делает 5 шагов. Пока Маша делает 3 шага, Яша делает 5 шагов. Яша сделал 1000 шагов. Сколько шагов сделал папа?



3. Кружочки. Можно ли в кружках разместить различные натуральные числа так, чтобы суммы трёх чисел вдоль каждого отрезка оказались равными?

4. Хоровод. Водили хоровод 40 детей. Из них 22 держали за руку мальчика и 30 держали за руку девочку. Сколько девочек было в хороводе?

Углы	Достаточно примера с интуитивными комментариями
Шаги	$1000 \times (3/5) \times (3/5) = 360$
Кружочки	Нельзя. Рассмотрим кружки, из которых выходят три линии, они дают сумму всех чисел с добавлением удвоенного общего кружка. Но тогда числа в таких кружках равны между собой. Противоречие.
Хоровод	Девочек 24. В цепочке мальчиков все мальчики держат мальчика, девочки – девочку, а мальчиков, держащих девочку = девочек, держащих мальчика. Разность $M - Д = 30 - 22 = 8$.

Лист 12

1. Жители. На острове 5 жителей, каждый из них либо правдивый, либо лжец. Первый житель сказал: «Все мы лжецы». Остальные по очереди сказали: «Все, кто говорили до меня, лжецы». Сколько правдивых жителей на острове?

2. Возрасты. Возраст корабля вдвое превышает возраст, в котором был его двигатель, когда кораблю было столько же лет, сколько двигателю в настоящее время. Каково отношение возрастов корабля и двигателя?

3. Монеты. У Пети 10 монет. Если он наугад вытащит 7 монет, то среди них обязательно найдутся три разные. Какое наибольшее число одинаковых монет могло быть у Пети?

4. Кафтан. Хозяин обещал работнику за 30 дней 54 рубля и кафтан. Через 3 дня работник уволился и получил кафтан. Сколько стоил кафтан?

Жители	Первый лжец, второй правдивый, остальные лжецы.
Возрасты	4:3
Монеты	5 одинаковых. Сумма двух номиналов не больше 6.
Кафтан	6 руб.

Лист 13

1. Бусы. Бусы в виде кольца содержат 35 бусин. Любые две бусины, между которыми ровно две бусины, одинакового цвета. Сколько разных цветов бусин может быть в этих бусах?

2. Ребус. Шестизначное число оканчивается цифрой 5. Если переставить эту цифру с последнего места на первое, то получится число в 4 раза больше первоначального. Найдите эти числа.

3. **Башни.** Замок имеет форму квадрата с четырьмя башнями по углам. Имеется 21 талисман. Если в двух соседних башнях сумма талисманов будет 11 или больше, то стена между ними станет неприступной. Докажите, что как бы не распределять талисманы между башнями, ровно две стены окажутся неприступными.

4. **Варианты.** В комнате находится 10 человек. Каждый из них сказал: «Среди остальных 9-и человек (всех, кроме меня) ровно пятеро — шахматисты». Сколько человек сказали правду? Перечислите все варианты и объясните, почему других вариантов нет.

№	Название	Ответы, идеи
1	Бусы	Одного цвета номера 1,4,...,34,2 – значит, все одного цвета
2	Ребус	$128205 \times 4 = 512820$. Записать умножение столбиком.
3	Башни	Если стена непробиваема, то стена напротив пробиваема.
4	Варианты	Если шахмат-ов 5, то правдивых 5; если 6, то 6; иначе 0

Лист 14

1. **Драконы.** 10 драконов отличаются только цветом. Среди любых четырех из них найдутся двое одного цвета. Докажите, что найдутся 4 дракона одного цвета.
2. **Раскраска.** Каждая грань куба 2×2 разделена на 4 квадратика. Какое наибольшее число квадратиков можно покрасить, чтобы никакие два покрашенных квадратика не имели общей стороны?
3. **Суммы.** Коля задумал четыре числа и выписал на доске пять из шести их попарных сумм. Это оказались числа 17, 19, 20, 24, 26. Найдите шестую сумму (объясните, почему других вариантов нет).
4. **Пираты.** На вечеринку пришло 30 пиратов. Пират считается крутым, если он выбросит за борт двух других (они не возвращаются). Какое наибольшее число крутых пиратов может оказаться? Крутой пират, упавший за борт, остается крутым.

№	Название	Ответы, идеи
1	Драконы	Разных цветов не больше 3, $10 : 3 > 3$.
2	Раскраска	8. При каждой вершине 1 покрашенный.
3	Суммы	Ответ 23. Ответ без объяснения +/2
4	Пираты	Ответ: 14. За бортом не больше 29 человек, не больше 14 пар.